เอกสารคำสอน
รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์คชินทร์ โกกนุทาภรณ์

ตัวอย่าง

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
2560

ຕົວຢ່າງ

เอกสารคำสอน
รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์

ผู้ช่วยศาสตราจารย์คชินทร์ โกกนุทาภรณ์
วท.ม. (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ตัวอย่าง

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
2560

ຫ້າມຈ່າຍ

คำนำ

เอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ รหัส 4094403 ใช้ในการเรียนการสอน ในภาคการเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 ได้แบ่งเนื้อหาการเรียนการสอนออกเป็น 5 บท ได้แก่ บทที่ 1 เวกเตอร์ บทที่ 2 ผลคูณของเวกเตอร์ บทที่ 3 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ บทที่ 4 เวกเตอร์เชิงอนุพันธ์สำหรับพื้นผิว และบทที่ 5 ปริพันธ์เชิงเวกเตอร์ แต่ละบทใช้เวลาสอนประมาณ 3 สัปดาห์

รายวิชานี้มุ่งเน้นให้ผู้เรียนมีความรู้เข้าใจในถึงพีชคณิตของเวกเตอร์ ใน 2 มิติ 3 มิติ สามารถหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ สามารถหาปริพันธ์ของเวกเตอร์ ได้

เอกสารคำสอนนี้คงอำนวยประโยชน์ต่อการเรียนการสอนในรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ ตามสมควร หากท่านที่นำเอกสารคำสอนนี้ไปใช้ และมีข้อเสนอแนะผู้เขียนยินดีรับฟังและขอขอบคุณในความอนุเคราะห์นั้นมา ณ โอกาสนี้ด้วย

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์
10 มกราคม 2560

ตัวอย่าง

ห้ามถ่าย

สารบัญ

หน้า

ตัวอย่าง

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ตัวอย่าง

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ตัวอย่าง

ห้ามจำหน่าย

สารบัญภาพ

ตัวอย่าง

สารบัญภาพ (ต่อ)

ตัวอย่าง

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

ตัวอย่าง

สารบัญภาพ (ต่อ)

ตัวอย่าง

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

แผนบริหารการสอนประจำวิชา

รหัสวิชา 4094403

รายวิชา การวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ 3(3-0-6) หน่วยกิต

Vector Analysis

คำอธิบายรายวิชา

พีชคณิตของเวกเตอร์ อนุพันธ์ของเวกเตอร์ ปริพันธ์ของเวกเตอร์ พิกัดเชิงเส้นโค้ง และการวิเคราะห์เทนเซอร์

วัตถุประสงค์ทั่วไป

1. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจในถึงพีชคณิตของเวกเตอร์ ใน 2 มิติ และ 3 มิติ
2. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาปริพันธ์ของเวกเตอร์ ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาพิกัดเชิงเส้นโค้งได้
5. เพื่อให้นักศึกษาสามารถวิเคราะห์เทนเซอร์ได้

เนื้อหาวิชา

บทที่ 1 เวกเตอร์ 9 ชั่วโมง

1.1 ปริมาณเวกเตอร์

1.2 เวกเตอร์ในระนาบ

1.3 การดำเนินการของเวกเตอร์ในระนาบ

1.4 เวกเตอร์ฐานในระนาบ

1.5 การดำเนินการของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $a\vec{i}+b\vec{j}$

1.6 มุมระหว่างเวกเตอร์กับแกน X

1.7 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

1.8 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

1.9 เวกเตอร์ฐานในปริภูมิสามมิติ

1.10 เวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

1.11 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

1.12 สรุป

แบบฝึกหัด

เอกสารอ้างอิง

บทที่ 2 ผลคูณของเวกเตอร์ 9 ชั่วโมง

2.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

2.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์บนระบบพิกัดฉาก

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

วิธีสอนและกิจกรรม

1. ศึกษาเอกสารคำสอนการสิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย ซักถาม ทอลองและ การสาธิตประกอบการสอนด้วย Power point
3. แบ่งกลุ่มอภิปราย ช่วยกันสรุปบทเรียน
4. ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป GPS (the geometer's sketchpad) ในการวาดกราฟ
5. ฝึกทำใบงานและแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนแต่ละบทในชั้นเรียน
6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นกรบ้าน
7. ผู้สอนสรุปเนื้อหาเพิ่มเติมและมอบหายงาให้ผลิตเป็นชิ้นงาน การเรียนรู้เชิงผลิตภาพ (Productivity Learning)

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. ใบงาน
4. เครื่อง LCD และคอมพิวเตอร์
5. โปรแกรมสำเร็จรูป GPS

ตัวอย่าง

การวัดผลและการประเมินผล

1. การวัดผล

1.1 คะแนนระหว่างภาคเรียน รวม 60%

1.1.1 คะแนนเข้าชั้นเรียน 10 %

1.1.2 คะแนนสอบกลางภาค 30 %

1.1.3 คะแนนการตอบปัญหาและการแสดงความคิดเห็นในชั้นเรียน 5 %

1.1.4 คะแนนการมีส่วนร่วมในชั้นเรียน 5 %

1.1.5 คะแนนแบบฝึกหัดและชิ้นงาน Productivity Learning 10 %

1.2 คะแนนสอบปลายภาค 40%

2. การประเมินผล

คะแนนระหว่าง	80 – 100	ได้ระดับคะแนน A
คะแนนระหว่าง	75 – 79	ได้ระดับคะแนน B^+
คะแนนระหว่าง	70 – 74	ได้ระดับคะแนน B
คะแนนระหว่าง	65 – 69	ได้ระดับคะแนน C^+
คะแนนระหว่าง	60 – 64	ได้ระดับคะแนน C
คะแนนระหว่าง	55 – 59	ได้ระดับคะแนน D^+
คะแนนระหว่าง	50 – 54	ได้ระดับคะแนน D
คะแนนระหว่าง	0 – 49	ได้ระดับคะแนน F

ตัวอย่าง

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 1

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

1.1 ปริมาณเวกเตอร์
1.2 เวกเตอร์ในระนาบ
1.3 การดำเนินการของเวกเตอร์ในระนาบ
1.4 เวกเตอร์ฐานในระนาบ
1.5 การดำเนินการของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $a\vec{i}+b\vec{j}$
1.6 มุมระหว่างเวกเตอร์กับแกน X
1.7 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ
1.8 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ
1.9 เวกเตอร์ฐานในปริภูมิสามมิติ
1.10 เวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ
1.11 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ
1.12 สรุป
แบบฝึกหัด
เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจ เกี่ยวกับปริมาณเวกเตอร์และปริมาณสเกลาร์
2. เพื่อให้นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเวกเตอร์ในระนาบ ปริภูมิสามมิติ และปริภูมิ n มิติ
3. เพื่อให้นักศึกษามีความเข้าใจและสามารถหาค่าการดำเนินการของเวกเตอร์ในระนาบ ปริภูมิสามมิติ และปริภูมิ n มิติได้
4. เพื่อให้นักศึกษามีความเข้าใจและสามารถหาค่าการดำเนินการของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $a\vec{i}+b\vec{j}$ ได้
5. เพื่อให้นักศึกษาสามารถหาค่ามุมระหว่างเวกเตอร์กับแกน X ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ศึกษาเอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย และซักถามประกอบการสอนด้วย Power point
3. ศึกษาจากคอมพิวเตอร์ประกอบการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป GSP
4. แบ่งกลุ่มอภิปราย สรุปบทเรียน
5. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน
7. ผู้สอบสรุปเนื้อหาเพิ่มเติม

ตัวอย่าง

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. เครื่องคอมพิวเตอร์และ LCD
4. โปรแกรมสำเร็จรูป GSP

การวัดผลและการประเมินผล

1. นักศึกษาสามารถตอบข้อซักถามได้
2. นักศึกษาให้ความสนใจในการเรียนการสอน
3. สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม
4. นักศึกษาสามารถทำแบบฝึกหัดได้

ตัวอย่าง

บทที่ 1
เวกเตอร์

บทนี้จะกล่าวถึงปริมาณเวกเตอร์ เวกเตอร์ในระนาบ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ และการดำเนินการของเวกเตอร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานในการศึกษาเวกเตอร์ต่อไป

1.1 ปริมาณเวกเตอร์

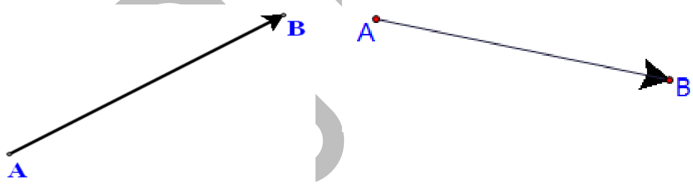
นิยาม 1.1.1 ขนาด (magnitude) ของเวกเตอร์ คือ ความยาวของเวกเตอร์

นิยาม 1.1.2 ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) คือ ปริมาณที่มีแต่ขนาดไม่มีทิศทาง โดยใช้จำนวนกับหน่วยของสิ่งที่วัดเป็นตัวบ่งบอก
เช่น ความสูง 175 เมตร น้ำหนัก 63 กิโลกรัม เป็นต้น

นิยาม 1.1.3 ปริมาณเวกเตอร์ (vectors quantity) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง
เช่น ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น

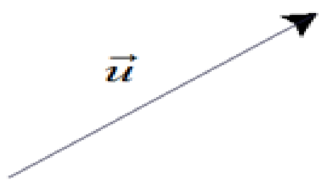
ในการศึกษาเวกเตอร์จะใช้ส่วนของเส้นตรงมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ โดยมีความยาวของส่วนของเส้นตรงแทนขนาดและ ลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์

เวกเตอร์จากจุด A ไปจุด B ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ เรียก A ว่าจุดเริ่มต้น (initial point) เรียก B ว่าจุดสิ้นสุด (terminal point) ของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ แทนด้วย $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ดังภาพที่ 1.1.1



ภาพที่ 1.1.1 เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$

ในกรณีที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดในการเรียกเวกเตอร์อาจเขียนแทนเวกเตอร์ด้วยตัวอักษรซึ่งมีลูกศรกำกับ เช่น $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นต้น

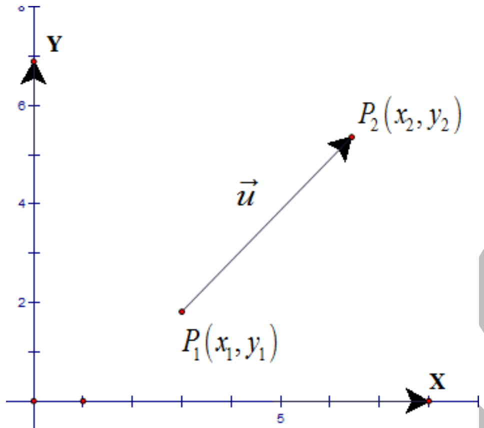


ภาพที่ 1.1.2 เวกเตอร์ $\vec{u}$

ตัวอย่าง

1.2 เวกเตอร์ในระนาบ

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ใด ๆ ในระนาบที่มี X และ Y เป็นแกนพิกัด แทนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยส่วนของเส้นตรง ถ้าจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์ $\vec{u}$ อยู่ที่จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ จุดสิ้นสุดอยู่ที่ $P_2(x_2, y_2)$ จะได้ว่าจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{u}$ มีพิกัด $(a,b)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}=(a,b)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ ดังภาพที่ 1.2.1

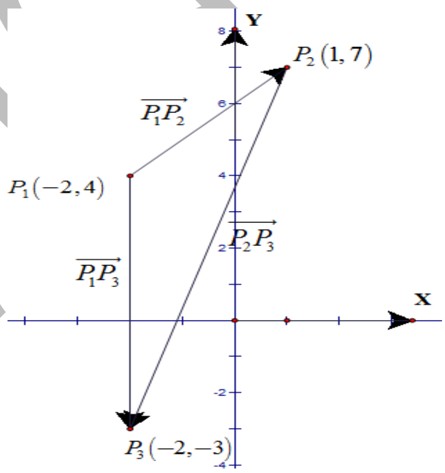


ภาพที่ 1.2.1 เวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$

เซตของเวกเตอร์ทั้งหมดในระนาบ XY แทนด้วยคู่อันดับ (a,b) เรียกว่า ปริภูมิเวกเตอร์สองมิติ (two dimensional vector space)

ตัวอย่าง 1.2.1 กำหนดจุด $P_1(-2,4), P_2(1,7)$ และ $P_3(-2,-3)$ เป็นจุดสามจุดในระนาบ XY จงวาดรูปเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ และ $\overrightarrow{P_2P_3}$

วิธีทำ



ขนาดของเวกเตอร์ ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ ขนาดของ $\vec{u}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|\vec{u}|$ กำหนดโดย $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$

ตัวอย่าง 1.2.2 กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u}=(3,4)$ จงหาขนาดของ $\vec{u}$

วิธีทำ $|\vec{u}|=|(3,4)|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

เวกเตอร์ศูนย์ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ ไม่มีทิศทาง หรือมีทิศทางไปทุกทิศทุกทาง ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{0}$ เช่น $\vec{0}=(0,0)$

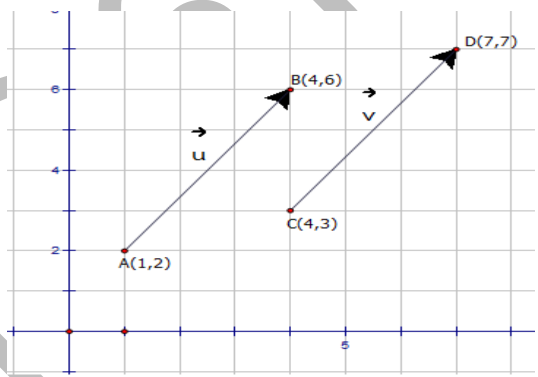
1.3 การดำเนินการของเวกเตอร์ในระนาบ

การเท่ากันของเวกเตอร์

นิยาม 1.3.1 เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน

สำหรับเวกเตอร์ (a,b) จะเท่ากับเวกเตอร์ (c,d) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(a,b)=(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

ตัวอย่าง 1.3.1 กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(1,2)$ จุดสิ้นสุดที่ $B(4,6)$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $C(4,3)$ จุดสิ้นสุดที่ $D(7,7)$ ดังภาพ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ทั้งสองเท่ากันหรือไม่



วิธีทำ พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{u}=(4-1,6-2)=(3,4)$

และ เวกเตอร์ $\vec{v}=(7-4,7-3)=(3,4)$

จึงได้ว่า เวกเตอร์ $\vec{u}$ เท่ากับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ตัวอย่าง 1.3.2 ให้ $\vec{u}=(2x,-16)$ และ $\vec{v}=(10,4y)$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ใด ๆ ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ จงหา x และ y

วิธีทำ จาก

$$\vec{u}=\vec{v}$$
$$(2x,-16)=(10,4y)$$

จะได้ว่า $\quad 2x=10 \quad$ ....(1)

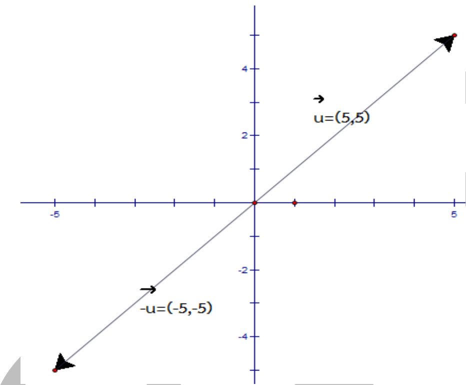
และ $\quad 4y=-16 \quad$ ....(2)

จากสมการ (1); $x=5$ และ สมการ (2); $y=-4$

ดังนั้น ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ ทำให้ $x=5$ และ $y=-4$

นิยาม 1.3.2 ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}$

สำหรับ $\vec{u}=(a,b)$ จึงได้ $-\vec{u}=-(a,b)=(-a,-b)$



ภาพที่ 1.3.1 เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $-\vec{u}$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาลบของเวกเตอร์ $(4,5),(-3,2)$ และ $(-5,-9)$

วิธีทำ ลบของเวกเตอร์ $(4,5)$ คือ $(-4,-5)$

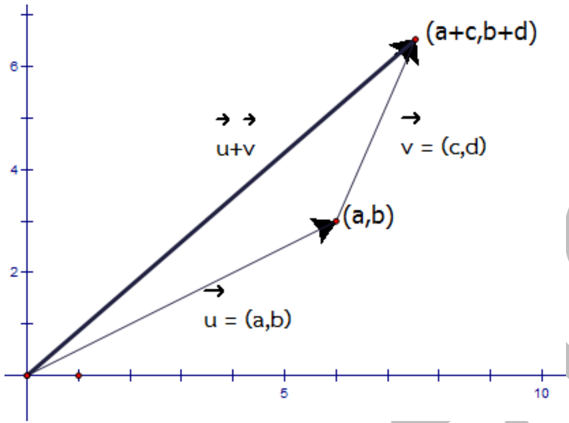
ลบของเวกเตอร์ $(-3,2)$ คือ $(3,-2)$

ลบของเวกเตอร์ $(-5,-9)$ คือ $(5,9)$

ผลบวกของเวกเตอร์

นิยาม 1.3.3 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}+\vec{v}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น คือจุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุด คือจุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$ ภายหลังจากที่วาง $\vec{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ ทับจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ และ เวกเตอร์ $\vec{v}=(c,d)$ ผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ กำหนดโดย $\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$



ภาพที่ 1.3.2 $\vec{u}+\vec{v}$

จากภาพที่ 1.3.2 พบว่าผลบวกที่กำหนดนี้จะสอดคล้องนิยาม ซึ่งเป็นการนำส่วนของเส้นตรงมาต่อกันดังภาพ เมื่อจุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่พิกัด (a,b)จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$ จะมีพิกัด $(a+c,b+d)$ ดังนั้นเวกเตอร์ผลบวกระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}+\vec{v}=(a+c,b+d)$

ตัวอย่าง 1.3.4 กำหนด $\vec{u}=(4,5)$ และ $\vec{v}=(3,-4)$ จงหา $\vec{u}+\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=(4,5)+(3,-4)\\&=(4+3,5-4)\\&=(7,1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v}=(7,1)$

สมบัติการบวกเวกเตอร์ สำหรับ $(a,b),(c,d)$ และ (e,f) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ

1. การเปลี่ยนกลุ่ม ; $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$
2. การสลับที่ ; $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$
3. มีเอกลักษณ์ของการบวก ; $(a,b)+(0,0)=(a,b)$
4. มีตัวผกผันของการบวก สำหรับเวกเตอร์ (a,b) ใด ๆ จะมีเวกเตอร์ $(-a,-b)$ โดยที่ $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.3.5 กำหนดให้ $\vec{u}=(-3,4),\vec{v}=(4,-1)$ และ $\vec{w}=(-2,2)$ จงหา

1. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
2. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3. $\vec{u}+\vec{v}$
4. $\vec{v}+\vec{u}$
5. $\vec{u}+\vec{0}$
6. $\vec{v}+(-\vec{v})$

วิธีทำ 1.

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} &= [(-3,4)+(4,-1)]+(-2,2)\\ &= (-3+4,4+(-1))+(-2,2)\\ &= (1,3)+(-2,2)\\ &= (1+(-2),3+2)\\ &= (-1,5)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=(-1,5)$

2.

$$\begin{aligned}\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) &= (-3,4)+[(4,-1)+(-2,2)]\\ &= (-3,4)+(4+(-2),-1+2)\\ &= (-3,4)+(2,1)\\ &= (-3+2,4+1)\\ &= (-1,5)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(-1,5)$

3.

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= (-3,4)+(4,-1)\\ &= (-3+4,4+(-1))\\ &= (1,3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v}=(1,3)$

4.

$$\begin{aligned}\vec{v}+\vec{u} &= (4,-1)+(-3,4)\\ &= (4+(-3),(-1)+4)\\ &= (1,3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{v}+\vec{u}=(1,3)$

ตัวอย่าง

5.
$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{0} &= (-3,4)+(0,0)\\ &= (-3+0,4+0)\\ &= (-3,4)\\ &= \vec{u}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

6.
$$\begin{aligned}\vec{v}+(-\vec{v}) &= (4,-1)+(-4,1)\\ &= (4+(-4),-1+1)\\ &= (0,0)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

จากตัวอย่าง 1.4.2 ข้อ 1. และข้อ 2. สนับสนุนสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
ข้อ 3. และข้อ 4. สนับสนุนสมบัติการสลับที่
ข้อ 5. สนับสนุนสมบัติการมีอกลักษณ์ของการบวก
ข้อ 6. สนับสนุนสมบัติการมีตัวผกผันของการบวก

การลบเวกเตอร์

นิยาม 1.3.4 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ การลบเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยเวกเตอร์ $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}-\vec{v}$ คือ การบวกระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยลบของเวกเตอร์ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ และ $\vec{v}=(c,d)$ พิจารณา $\vec{u}-\vec{v}$

$$\begin{aligned}\vec{u}-\vec{v} &= \vec{u}+(-\vec{v})\\ &= (a,b)+(-c,-d)\\ &= (a-c,b-d)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3.6 กำหนดให้ $\vec{u}=(-3,4)$ และ $\vec{v}=(-2,2)$ จงหา $\vec{u}-\vec{v}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\vec{u}-\vec{v} &= \vec{u}+(-\vec{v})\\ &= (-3,4)+(2,-2)\\ &= (-3+2,4+(-2))\\ &= (-1,2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}-\vec{v}=(-1,2)$

ตัวอย่าง

การคูณเวกเตอร์ด้วยของสเกลาร์

นิยาม 1.3.5 ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ และ x เป็นสเลาร์ใด ๆ ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับเกลาร์ x ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $x\vec{u}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|x||\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ถ้า $x>0$ และมีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ถ้า $x<0$

สำหรับผลคูณของ เวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ กับ สเกลาร์ x กำหนดโดย $x\vec{u}=(xa,xb)$

ตัวอย่าง 1.3.7 กำหนดให้ $\vec{u}=(-3,4)$ และ $\vec{v}=(-2,2)$ จงหา

1. $2\vec{u}$ และ $|2\vec{u}|$
2. $-3\vec{v}$ และ $|-3\vec{v}|$

วิธีทำ 1. $2\vec{u}=2(-3,4)=(-6,8)$

$$|2\vec{u}|=|(-6,8)|=\sqrt{(-6)^2+(8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$

ดังนั้น $2\vec{u}=(-6,8)$ และ $|2\vec{u}|=10$

2. $-3\vec{v}=-3(-2,2)=(6,-6)$

$$|-3\vec{v}|=|(6,-6)|=\sqrt{6^2+(-6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$$

ดังนั้น $-3\vec{v}=(6,-6)$ และ $|-3\vec{v}|=\sqrt{72}$

สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ให้ k และ l เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1. การเปลี่ยนกลุ่ม ; $k(l(a,b))=(kl)(a,b)$
2. การแจกแจง; $k[(a,b)+(c,d)]=k(a,b)+k(c,d)$

   $(k+l)(a,b)=k(a,b)+l(a,b)$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

นิยาม 1.3.6 เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ถ้ากำหนดเวกเตอร์ $\vec{v}$ ที่ไม่ใช้เวกเตอร์ศูนย์ สามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ ได้คือ $\vec{u}=\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$ จะได้ว่า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.3.8 กำหนดให้ $\vec{u}=(-3,4)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $\dfrac{(-3,4)}{|(-3,4)|}=\left(\dfrac{-3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

เวกเตอร์ที่มีขนาด k หน่วยและ มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{w}$ คือ $\dfrac{k}{|\vec{w}|}\vec{w}$

ถ้ามี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จากนิยาม 1.3.6 ถ้า $\vec{u}=k\vec{v}$ แล้ว เวกเตอร์ $\vec{u}$ จะขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ในทางกลับกัน ถ้า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ สามารถหา สเกลาร์ k ซึ่งทำให้ $\vec{u}=k\vec{v}$ ได้ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 1.3.1 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อมีสเกลาร์ k ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ซึ่งทำให้ $\vec{u}=k\vec{v}$

ทฤษฎีบท 1.3.2 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้ามีสเกลาร์ a และ b ซึ่ง ทำให้ $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$ แล้ว จะได้ว่า $a=0$ และ $b=0$ หรือเวกเตอร์ $\vec{u}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

พิสูจน์ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ a และ b เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ให้ $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$

ถ้า $a\neq 0$

จะได้ว่า $\vec{u}=\left(\dfrac{-b}{a}\right)\vec{v}$ ให้ $c=\dfrac{-b}{a}$ สำหรับ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ดังนั้น $\vec{u}=c\vec{v}$

นั่นคือ เวกเตอร์ $\vec{u}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ถ้า $a=0$

จะได้ $b\vec{v}=\vec{0}$ แต่ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

ดังนั้น $b=0$

นั่นคือ ถ้า $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$ แล้ว จะได้ว่า $a=0$ และ $b=0$ หรือเวกเตอร์ $\vec{u}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ทฤษฎีบท 1.3.3 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ที่ไม่ขนานกัน ถ้า $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}$ แล้วจะได้ว่า $a=c$ และ $b=d$

พิสูจน์ จาก $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}$

จัดสมการใหม่ได้ $(a-c)\vec{u}+(b-d)\vec{v}=0$

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ขนานกันจะได้ $a-c=0$ และ $b-d=0$

ดังนั้น ถ้า $a\vec{u}+b\vec{v}=c\vec{u}+d\vec{v}$ แล้ว $a=c$ และ $b=d$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 1.3.4 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์สามเวกเตอร์ จะอยู่ในระนาบเดียวกันก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ a,b และ c บางตัวที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้ $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

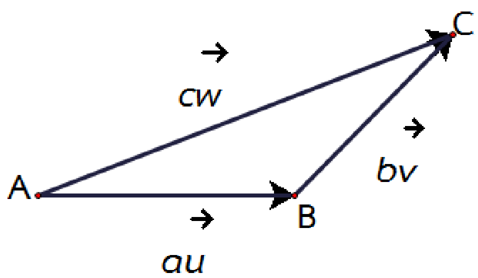
พิสูจน์ สมมติว่า $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์จะอยู่ในระนาบเดียวกัน

$\Rightarrow$ ถ้ามีเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งเป็นศูนย์

สมมติว่า $\vec{u}=\vec{0}$ ให้ $a>0$ และ $b=0,c=0$ จะได้ว่า $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

ถ้ามีสองเวกเตอร์ที่ไม่เป็นศูนย์ขนานกัน สมมติว่า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ จะได้ว่า มีจำนวนจริง a ที่ไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้ $a\vec{u}=\vec{v}$ ให้ $b=-1,c=0$ จะได้ $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{v})+0\vec{w}=\vec{0}$

ถ้าทั้งสามเวกเตอร์ไม่มีคู่ใดขนานกัน สร้างสามเหลี่ยม ABC โดยให้ด้าน AB ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้าน BC ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ และด้าน AC ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{w}$



ภาพที่ 1.3.3 $a\vec{u},b\vec{v}$ และ $c\vec{w}$

จะได้ว่ามีสเกลาร์ a,b และ c ที่ไม่เป็นศูนย์

ที่ทำให้ $\overrightarrow{AB}=a\vec{u},\overrightarrow{BC}=b\vec{v}$ และ $\overrightarrow{CA}=c\vec{w}$

และจากภาพที่ 1.7 จะได้ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

ดังนั้น จะได้ $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

$\Leftarrow$ ให้ สเกลาร์ a,b และ c บางจำนวนไม่เป็นศูนย์

ที่ทำให้ $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

สมมติว่า $c\neq 0$

จึงได้ $\vec{w}=\left(-\frac{a}{c}\right)\vec{u}+\left(-\frac{b}{c}\right)\vec{v}$

จะได้ว่า $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกันกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์จะอยู่ในระนาบเดียวกันก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ a,b และ c บางตัวที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้ $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

บทแทรก 1.3.1 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบเดียวกัน ถ้า $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ไม่ขนานกัน แล้ว จะมีสเกลาร์ a และ b ที่ทำให้ $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

ตัวอย่าง 1.3.9 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $5\vec{u}-3\vec{v}=2\vec{u}+\vec{v}$ จงแสดงว่า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน

วิธีทำ จาก

$$5\vec{u}-3\vec{v}=2\vec{u}+\vec{v}$$
$$5\vec{u}-2\vec{u}=3\vec{v}+\vec{v}$$
$$3\vec{u}=4\vec{v}$$
$$\vec{u}=\frac{4}{3}\vec{v}$$

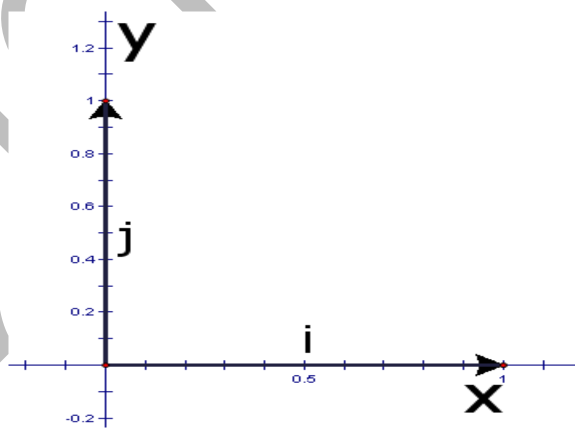
จากทฤษฎีบท 1.1 ทำให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน
ดังนั้น $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน

เวกเตอร์อิสระเชิงเส้น ให้ $\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n$ เป็นเวกเตอร์ จะกล่าวว่าเป็นอิสระเชิงเส้น ถ้าไม่มีสเกลาร์ $a_1,a_2,...,a_n$ ใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ที่ทำให้ $a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2+...+a_n\vec{u}_n=\vec{0}$

จะพบว่า เวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์นั้นไม่ขนานกัน และ เวกเตอร์สามเวกเตอร์จะเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันก็ต่อเมื่อ สามเวกเตอร์นั้นไม่อยู่ในระนาบเดียวกัน

1.4 เวกเตอร์ฐาน

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานที่มีทิศทางเดียวกับแกน X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{i}$ โดยที่ $\vec{i}=(1,0)$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานที่มีทิศทางเดียวกับแกน Y ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{j}$ โดยที่ $\vec{j}=(0,1)$ ดังภาพที่ 1.4.1



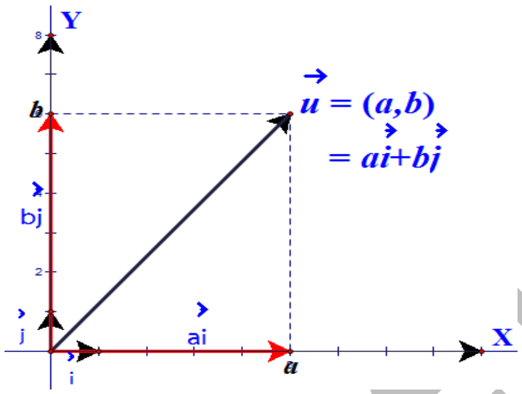
ภาพที่ 1.4.1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

ตัวอย่าง

ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ สามารถเขียนในรูปผลรวมของเวกเตอร์ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{u}&=(a,b)\\&=(a,0)+(0,b)\\&=a(1,0)+b(0,1)\\&=a\vec{i}+b\vec{j}\end{aligned}$$

เรียก เวกเตอร์ $\vec{u}$ ว่าเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ โดยที่ a เป็นสเกลาร์ในแนวแกน X และ b เป็นสเกลาร์ในแนวแกน Y ดังภาพที่ 1.4.2



ภาพที่ 1.4.2 เวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

กล่าวว่าเซตของเวกเตอร์ $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$ เป็นฐานของปริภูมิเวกเตอร์สองมิติ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น (ไม่ขนานกัน) ในปริภูมิสองมิติ เวกเตอร์ $\vec{w}$ ในระนาบเดียวกันกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะสามารถเขียนอยู่ในรูป $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ ได้ ซึ่งกล่าวว่าเซต $\{\vec{u},\vec{v}\}$ เป็นฐานของปริภูมิสองมิติด้วย และกล่าวว่า $\vec{w}$ มีพิกัดเป็น a และ b เมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ และเขียนสัญลักษณ์ว่า $[\vec{w}]_B=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}_B$ ในกรณีที่ฐาน $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกนพิกัด คือ $[(a,b)]=[a\vec{i}+b\vec{j}]=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$

จึงได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b)$ สามารถใช้สัญลักษณ์แทนด้วย

$$\vec{u}=(a,b)=a\vec{i}+b\vec{j}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$ ตามความเหมาะสม

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.4.1 ให้ $\vec{u}=(-2,3),\vec{v}=(-1,-1)$ และ $\vec{w}=(0,-5)$ จงหาพิกัดของ $\vec{w}$ เมื่อเทียบกับฐาน $S=\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ และเมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{w}=(0,-5)=0\vec{i}+(-5)\vec{j}$

ดังนั้น พิกัดของ $\vec{w}$ เมื่อเทียบกับฐาน $S=\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ คือ $[\vec{w}]=\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{w}&=a\vec{u}+b\vec{v}\\(0,-5)&=a(-2,3)+b(-1,-1)\\(0,-5)&=(-2a,3a)+(-b,-b)\\(0,-5)&=(-2a-b,3a-b)\end{aligned}$$

ได้ระบบสมการ

$$-2a-b=0 \qquad \text{............}(1)$$

$$3a-b=-5 \qquad \text{............}(2)$$

แก้สมการได้ $a=-1$ และ $b=2$

จะได้ $\vec{w}=(-1)\vec{u}+(2)\vec{v}=-\vec{u}+2\vec{v}$

ดังนั้น พิกัดของ $\vec{w}$ เมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v}\}$ คือ $[\vec{w}]=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_B$

1.5 การดำเนินการของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $a\vec{i}+b\vec{j}$

ให้ เวกเตอร์ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j},\vec{v}=c\vec{i}+d\vec{j}$ และ x เป็นสเกลาร์ใด ๆ การดำเนินการของเวกเตอร์จะมีสมบัติเช่นเดียวกับเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปคู่อันดับ (a,b) ทุกประการดังนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a=d$ และ $b=c$

ขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$

การบวกเวกเตอร์ $\vec{u}+\vec{v}=(a+c)\vec{i}+(b+d)\vec{j}$

เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}$ มีสมบัติ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ให้ x เป็นสเกลาร์ ผลคูณเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยสเกลาร์ x คือ $x\vec{u}=(xa)\vec{i}+(xb)\vec{j}$

เวกเตอร์ลบ เวกเตอร์ลบของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=-a\vec{i}-b\vec{j}$

การลบเวกเตอร์ $\vec{u}-\vec{v}=(a-c)\vec{i}+(b-c)\vec{j}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.5.1 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = 6\vec{i} + 5\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ จงหา $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}$ และ $5\vec{u}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &= \left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)+\left(6\vec{i}+5\vec{j}\right) \\ &= (2+6)\vec{i}+(3+5)\vec{j} \\ &= 8\vec{i}+8\vec{j} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v} = 8\vec{i}+8\vec{j}$

$$\begin{aligned} \vec{u}-\vec{v} &= \left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)-\left(6\vec{i}+5\vec{j}\right) \\ &= (2-6)\vec{i}+(3-5)\vec{j} \\ &= -4\vec{i}-2\vec{j} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}-\vec{v} = -4\vec{i}-2\vec{j}$

$$\begin{aligned} 5\vec{u} &= 5\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right) \\ &= 10\vec{i}+15\vec{j} \end{aligned}$$

ดังนั้น $5\vec{u} = 10\vec{i}+15\vec{j}$

ตัวอย่าง 1.5.2 ให้ $\vec{u} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - 10\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ ในระนาบ จงหา

1. ขนาดของ $\vec{u}+\vec{v}$
2. ขนาดของ $3\vec{v}$

วิธีทำ 1. พิจารณา

$$\begin{aligned} \vec{u}+\vec{v} &= (4+1)\vec{i}+(5-10)\vec{j} \\ &= 5\vec{i}-5\vec{j} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \left|\vec{u}+\vec{v}\right| &= \sqrt{(5)^2+(-5)^2} \\ &= \sqrt{25+25} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}+\vec{v}$ คือ $5\sqrt{2}$

2. พิจารณา $3\vec{v} = 3\left(\vec{i}-10\vec{j}\right) = 3\vec{i}-30\vec{j}$

และ $|3v| = \sqrt{(3)^2+(-30)^2} = \sqrt{909}$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $3\vec{v}$ คือ $\sqrt{909}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ในระนาบ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ และ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ จงหา $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ จาก

$$\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j} \qquad \text{............}(1)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j} \qquad \text{............}(2)$$

นำสมการ $(1)+$ สมการ (2) จะได้ว่า

$$(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})=\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)+\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$$

$$2\vec{u}=4\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$$

จากสมการ (1)

$$\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$$

แทนค่า $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ จึงได้ $\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$

$$\vec{v}=\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)+\left[-\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)\right]$$

$$=\vec{i}-3\vec{j}$$

ดังนั้น $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-3\vec{j}$

ตัวอย่าง 1.5.4 ให้ $\vec{u}=(x+1)\vec{i}+4\vec{j}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ กำหนดให้ $\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{w}=x\vec{i}+y\vec{j}$

วิธีทำ จาก

$$\vec{u}=\vec{v}$$

$$(x+1)\vec{i}+4\vec{j}=2\vec{i}+(x+y)\vec{j}$$

จึงได้ระบบสมการดังนี้

$$x+1=2 \qquad \text{.............}(1)$$

และ

$$x+y=4 \qquad \text{.............}(2)$$

จากสมการที่ (1) $x=1$ แทนค่าในสมการ (2)

$$1+y=4$$

$$y=3$$

จึงได้ $\vec{w}=\vec{i}+3\vec{j}$

พิจารณา

$$|\vec{w}|=\left|\vec{i}+3\vec{j}\right|$$

$$=\sqrt{1+9}$$

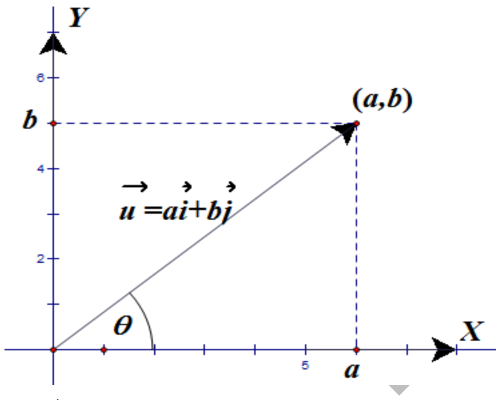
$$=\sqrt{10}$$

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{w}$ คือ $\sqrt{10}$ หน่วย

ตัวอย่าง

1.6 มุมระหว่างเวกเตอร์กับแกน X

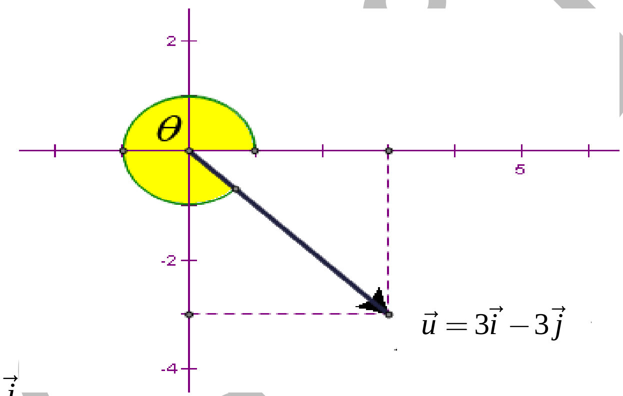
ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ และ θ เป็นมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับแกน X จึงได้ว่ามุม $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ ดังภาพที่ 1.6.1



ภาพที่ 1.6.1 มุม θ ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ทำกับแกน X

ตัวอย่าง 1.6.1 จงหาขนาดและทิศทางของ $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

วิธีทำ พิจารณาภาพ



จากเวกเตอร์ $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ คือ $\sqrt{18}$ หน่วย

จากเวกเตอร์ $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

พิจารณา $\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1$

เนื่องจาก $\tan\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1$

จึงได้ว่า $\theta = \frac{7\pi}{4}$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ ทำมุม $\frac{7\pi}{4}$ กับแกน X

ตัวอย่าง 1.6.2 จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ซึ่ง $\vec{u}=\vec{w}+2\vec{v}-\vec{z}$ เมื่อ $\vec{w}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{z}=\vec{i}-3\vec{j}$

วิธีทำ

$$2\vec{v}=2\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)=2\vec{i}+4\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{w}+2\vec{v}-\vec{z}&=\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)+\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)+\left(\vec{i}-3\vec{j}\right)\\&=(2+2-1)\vec{i}+(-1+4+3)\vec{j}\\&=3\vec{i}+6\vec{j}\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}$

พิจารณา $|\vec{u}|=\sqrt{(3)^2+(6)^2}=\sqrt{45}$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $\sqrt{45}$ หน่วย

จาก $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}$

จึงได้ว่า $\tan\theta=\dfrac{6}{3}=2$

เนื่องจาก $\tan\left(\dfrac{7\pi}{20}\right)=2$

จึงได้ $\theta=\dfrac{7\pi}{20}$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}$ ทำมุมประมาณ $\dfrac{7\pi}{20}$ กับแกน X

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$ คือ $\dfrac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j}$

ตัวอย่าง 1.6.3 ให้ $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\vec{v}$

วิธีทำ ให้ $\vec{u}$ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$

จึงได้

$$\begin{aligned}\vec{u}&=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\\&=\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}\\&=\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}\end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.6.4 ให้ $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-9\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จงหาเวกเตอร์ $\vec{w}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$

วิธีทำ พิจารณา
$$\vec{w}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}|\vec{v}|$$

จาก
$$\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=5$$

จาก
$$\vec{v}=\vec{i}-9\vec{j}$$
$$|\vec{v}|=|\vec{i}-9\vec{j}|=\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$$

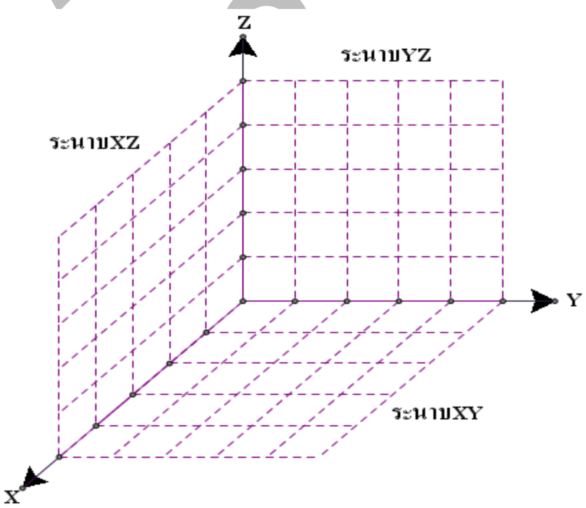
พิจารณา
$$\vec{w}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}|\vec{v}|=\left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5}\right)\sqrt{82}$$
$$=\frac{3\sqrt{82}}{5}\vec{i}+\frac{4\sqrt{82}}{5}\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{w}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$ คือ $\frac{3\sqrt{82}}{5}\vec{i}+\frac{4\sqrt{82}}{5}\vec{j}$

1.7 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

ระบบแกนพิกัดฉากสามมิติ

ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติโดยเริ่มพิจารณาจาก จุดบนแกน X จะมีพิกัดเป็น $(x,0,0)$ จุดบนแกน Y จะมีพิกัดเป็น $(0,y,0)$ และ จุดบนแกน Z จะมีพิกัดเป็น $(0,0,z)$ สำหรับระนาบที่ผ่านแกน X และแกน Y โดยมีค่า $z=0$ เรียกระนาบ XY จุดต่างๆ ที่มีค่า $x=0$ เรียกระนาบ YZ และถ้าจุดต่างๆ ที่มีค่า $y=0$ เรียกระนาบ XZ ดังภาพที่ 1.7.1

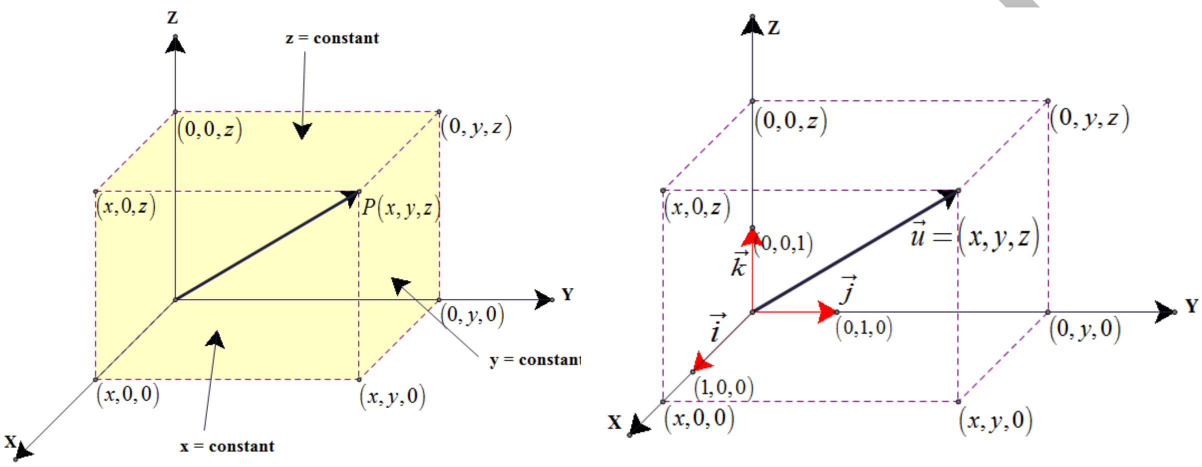


ภาพที่ 1.7.1 ระนาบ XY ระนาบ XZ และระนาบ YZ

ตัวอย่าง

การระบุตำแหน่งของจุดในสามมิติ ใช้พิกัดฉากสามแกน ช่วยในการกำหนดตำแหน่ง แกนทั้งสามแกนจะประกอบกันขึ้นตามกฎมือขวา โดยถ้ากราดมือขวาจากแกน $+X$ ไปตามทางของแนวแกน $+Y$ จะได้แกน $+Z$ ในทิศทางชี้ขึ้นตามทิศทางของนิ้วหัวแม่มือตำแหน่งของจุด P ในพิกัดคาร์ทีเซียน (x,y,z) คือตัวเลขที่แสดงอยู่บนแกนทั้งสามที่มีระนาบผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกนที่ตัดอยู่ บางครั้งเรียกพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinate system) ว่าพิกัดฉาก เพราะแกนที่อ้างอิงตั้งฉากกัน

แกนทั้งสามจะตั้งฉากกันและตัดกันที่จุดศูนย์เรียกว่าจุดกำเนิด $(0,0,0)$ ซึ่งถ้ามีจุด P ใด ๆ อยู่ในระนาบจะบอกพิกัดเป็น (x,y,z) โดยเรียก x,y,z ว่าเป็นส่วนประกอบที่ 1,2 และ 3 ของพิกัดฉาก (x,y,z) ของจุด P ดังภาพที่ 1.12



ภาพที่ 1.7.2 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

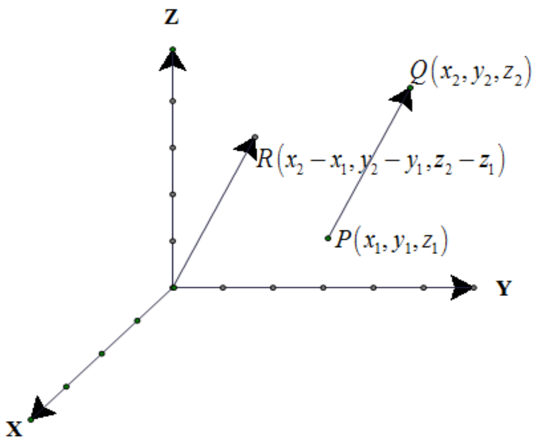
ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ ถ้าแทนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยเส้นตรง OP เมื่อจุด O เป็นจุดกำเนิดและเป็นเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และ P เป็นจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ ซึ่งมีพิกัด (a,b,c) ใช้สัญลักษณ์แทนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยคู่อันดับ (a,b,c) คือ $\vec{u}=(a,b,c)$

เซตของเวกเตอร์ทั้งหมดที่แทนด้วยอันดับสามตัวนี้เรียกว่า ปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ (tree dimensional vector space)

ถ้าจุด P มีพิกัด (x_1,y_1,z_1) และจุด Q มีพิกัด (x_2,y_2,z_2) จะหาอันดับสามตัวแทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ได้ โดยการเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ ที่เท่ากับ $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่จุดเริ่มต้น O เป็นจุดกำเนิดพิกัดจุดปลายของเวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ จะเป็นอันดับสามตัวที่แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OR}$ จะได้ว่า

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$ ดังภาพที่ 1.7.3

ตัวอย่าง



ภาพที่ 1.7.3 เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$

ทิศทางของเวกเตอร์ เมื่อ เวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนในแบบอันดับเลขสามตัวเป็น $\vec{u}=(a,b,c)$ กล่าวว่า เวกเตอร์ $\vec{u}$ มีทิศทางเป็น a,b,c เรียกจำนวนสามจำนวนนี้ว่า จำนวนแสดงทิศทางของเวกเตอร์ และกล่าวว่า เส้นที่ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ จะมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ มีจำนวนแสดงทิศทางเดียวกัน

ขนาดของเวกเตอร์ ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b,c)$ จะได้ว่า ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ตัวอย่าง 1.7.1 เวกเตอร์ $\vec{u}=(2,4,-1)$ จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$

วิธีทำ
$$|\vec{u}|=|(2,4,-1)|$$
$$=\sqrt{2^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$$
ดังนั้น ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $\sqrt{21}$

ระยะระหว่างจุด ให้จุด P_1 มีพิกัด (x_1,y_1,z_1) และจุด P_2 มีพิกัด (x_2,y_2,z_2) ระยะระหว่างจุด P_1 และ P_2 คือ ขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P_2}$ จาก $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ จะได้

$$\text{ระยะ } P_1P_2=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

1.8 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

ใช้นิยามของของการเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ลบ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เช่นเดียวกับเวกเตอร์ในระนาบ และมีสมบัติเช่นกันทุกประการ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ และ $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ

ตัวอย่าง

การเท่ากันของเวกเตอร์ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_1$ และ $b_1=b_2$ และ $c_1=c_2$

การบวกเวกเตอร์ $\vec{u}+\vec{v}=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$

เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=(0,0,0)$ มีสมบัติ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

ลบของเวกเตอร์ เวกเตอร์ลบของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=(-a_1,-b_1,-c_1)$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ให้ x เป็นสเกลาร์ ผลคูณเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยสเกลาร์ x คือ $x\vec{u}=(xa_1,xb_1,xc_1)$

การลบเวกเตอร์ $\vec{u}-\vec{v}=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$

ตัวอย่าง 1.8.1 ให้ $\vec{u}=(x-y,x+y,z+2)$ และ $\vec{v}=(4,2,5)$ เป็นเวกเตอร์บน R^3 ถ้า $\vec{u}=\vec{v}$ จงหา x,y และ z

วิธีทำ จาก $(x-y,x+y,z+2)=(4,2,5)$

ได้ระบบสมการ

$$x-y=4 \qquad \text{.............}(1)$$

$$x+y=2 \qquad \text{.............}(2)$$

$$z+2=5 \qquad \text{.............}(3)$$

นำสมการ $(1)+$ สมการ (2); $(x-y)+(x+y)=4+2$

$$2x=6$$

$$x=3$$

แทนค่า $x=3$ ในสมการที่ (1); จึงได้ $y=-1$

จากสมการ (3) จึงได้ $z=5-2=3$

ดังนั้น $x=3, y=-1$ และ $z=3$

ตัวอย่าง 1.8.2 กำหนดให้ $\vec{u}=(1,1,1),\vec{v}=(0,1,1)$ และ $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ จงหา a และ b ซึ่งทำให้ $\vec{w}=(2,6,6)$

วิธีทำ จาก

$$\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$$

$$(2,6,6)=a(1,1,1)+b(0,1,1)$$

$$(2,6,6)=(a,a,a)+(0,b,b)$$

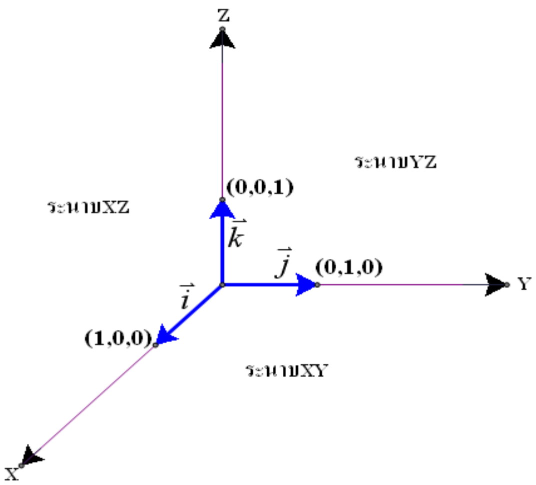
$$(2,6,6)=(a+0,a+b,a+b)$$

จึงได้ $a=2, a+b=6$

ดังนั้น $a=2$ และ $b=4$

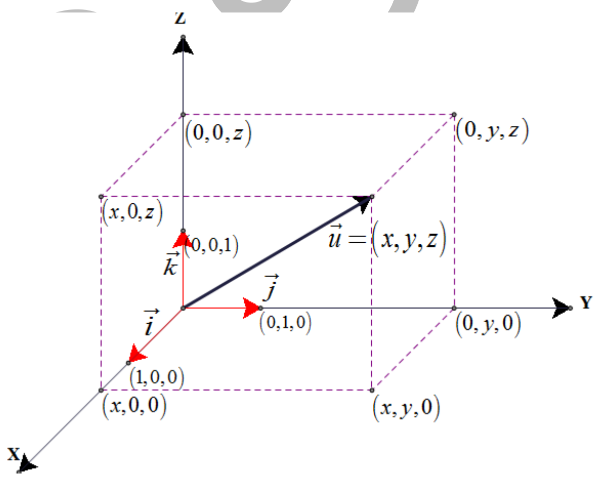
1.9 เวกเตอร์ฐานในปริภูมิสามมิติ

เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติที่แทนด้วยเส้นตรงซึ่งลากจากจุดกำเนิด ไปยังจุด $(1,0,0)$ จุด $(0,1,0)$ และจุด $(0,0,1)$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ หรือเขียนได้ดังนี้ $\vec{i}=(1,0,0), \vec{j}=(0,1,0)$ และ $\vec{k}=(0,0,1)$ ดังภาพที่ 1.9.1



ภาพที่ 1.9.1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$

กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u}$ ในปริภูมิสามมิติ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0,0,0)$ และจุดปลายที่ (x,y,z) จะได้ส่วนประกอบ (component) ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ x, y, z เขียนเวกเตอร์ $\vec{u}$ แทนด้วย $\vec{u}=(x,y,z)$ และเรียกเวกเตอร์ $\vec{u}$ ว่าเวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector) ของจุด (x,y,z) ดังภาพที่ 1.9.2



ภาพที่ 1.9.2 เวกเตอร์ตำแหน่งในระบบพิกัดฉากสามมิติ

กำหนดให้ $\vec{u}=(x,y,z)$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และมีจุดสิ้นสุดที่จุด (x,y,z) แล้วสามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ได้แบบเดียว คือ

$$\begin{aligned}\vec{u}&=(x,y,z)=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)\\&=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\\&=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\end{aligned}$$

กล่าวว่า เซตของเวกเตอร์ $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ เป็นฐานของเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

เมื่อเวกเตอร์ $\vec{z}$ ในปริภูมิสามมิติอยู่ในรูป $\vec{z}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ กล่าวว่า $\vec{z}$ มีพิกัดเป็น a,b และ c เมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ และใช้สัญลักษณ์ว่า $[\vec{z}]_B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}_B$

ถ้าฐาน $B=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกนพิกัด จะได้ว่า

$$[(a,b,c)]=\left[a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\right]=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

จึงได้ว่า สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=(a,b,c)$ สามารถใช้สัญลักษณ์แทนด้วย

$$\vec{u}=(a,b,c)=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$ ตามความเหมาะสม

ตัวอย่าง 1.9.1 ให้ $\vec{u}=(-2,3,-2),\vec{v}=(-1,-1,1),\vec{w}=(0,-1,0)$ และ $\vec{z}=(-4,2,0)$ จงหาพิกัดของ $\vec{z}$ เมื่อเทียบกับฐาน $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ และเมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{z}=(-4,2,0)=(-4)\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}$

ดังนั้น พิกัดของ $\vec{z}$ เมื่อเทียบกับฐาน $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ คือ $[\vec{z}]=\begin{bmatrix}-4\\2\\0\end{bmatrix}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{z}&=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}\\(-4,2,0)&=a(-2,3,-2)+b(-1,-1,1)+c(0,-1,0)\\(-4,2,0)&=(-2a,3a,-2a)+(-b,-b,b)+(0,-c,0)\\(-4,2,0)&=(-2a-b,3a-b-c,-2a+b)\end{aligned}$$

ได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}-2a-b&=-4 \qquad \text{...........(1)}\\3a-b-c&=2 \qquad \text{...........(2)}\\-2a+b&=0 \qquad \text{...........(3)}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

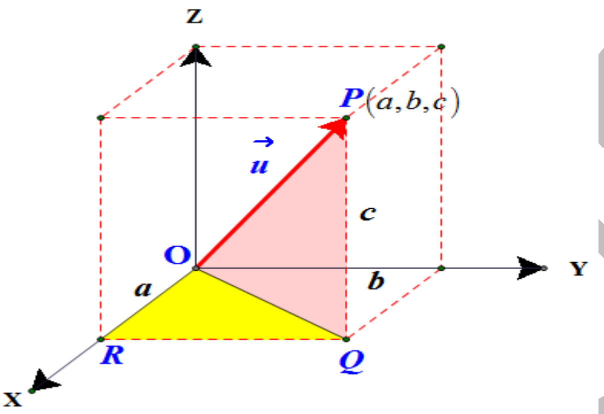
แก้สมการได้ $a=1,b=2$ และ $c=-1$

จะได้ $\vec{z}=(1)\vec{u}+(2)\vec{v}+(-1)\vec{w}=\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$

ดังนั้น พิกัดของ $\vec{z}$ เมื่อเทียบกับฐาน $B=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ คือ $[\vec{z}]=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}_B$

ขนาดของเวกเตอร์ ให้ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|\vec{u}|$ โดยที่ $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

ให้ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง สำหรับจุด (a,b,c) ดังภาพที่ 1.9.3



ภาพที่ 1.9.3 การพิสูจน์ขนาดเวกเตอร์ $\vec{u}$

จากภาพ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งเป็นเส้นทแยงมุมของกล่องสี่เหลี่ยมซึ่งความยาวด้านเป็น a,b และ c วัดตามแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

ดังนั้น $|\vec{u}|$ คือความยาวของเส้นทแยงมุม $\overline{OP}$ ซึ่งสามารถหาความยาวจากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก OPQ

จากสามเหลี่ยม ORQ $\quad \overline{OQ}^2=\overline{OR}^2+\overline{RQ}^2$

$$=a^2+b^2$$

จากสามเหลี่ยม OPQ $\quad \overline{OP}^2=\overline{OQ}^2+\overline{OP}^2$

$$=(a^2+b^2)+c^2$$

$$\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติจะได้ว่า $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

การดำเนินการของเวกเตอร์ที่อยู่ในรูป $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}, \vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ x เป็นสเกลาร์ใด ๆ การดำเนินการของเวกเตอร์จะมีสมบัติเช่นเดียวกับเวกเตอร์ที่อยู่ในรูปคู่อันดับ (a,b,c) ทุกประการดังนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$ และ $c_1=c_2$

การบวกเวกเตอร์ $\vec{u}+\vec{v}=(a_1+a_2)\vec{i}+(b_1+b_2)\vec{j}+(c_1+c_2)\vec{k}$

เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}$ มีสมบัติ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

ลบของเวกเตอร์ เวกเตอร์ลบของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=-a_1\vec{i}-b_1\vec{j}-c_1\vec{k}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ให้ x เป็นสเกลาร์ ผลคูณเวกเตอร์ $\vec{u}$ ด้วยสเกลาร์ x คือ
$x\vec{u}=(xa_1)\vec{i}+(xb_1)\vec{j}+(xc_1)\vec{k}$

การลบเวกเตอร์ $\vec{u}-\vec{v}=(a_1-a_2)\vec{i}+(b_1-b_2)\vec{j}+(c_1-c_2)\vec{k}$

ตัวอย่าง 1.9.2 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ และ $\vec{v}=4\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ บนปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}+4\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{u}+4\vec{v}&=\left(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\right)+4\left(4\vec{i}-5\vec{j}+7\vec{k}\right)\\&=\left(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\right)+\left(16\vec{i}-20\vec{j}+28\vec{k}\right)\\&=(2+16)\vec{i}+(3-20)\vec{j}+(4+28)\vec{k}\\&=18\vec{i}-17\vec{j}+32\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+4\vec{v}=18\vec{i}-17\vec{j}+32\vec{k}$

ตัวอย่าง 1.9.3 ให้ $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}, \vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ จงหา a และ b ที่ทำให้ $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{w}&=a\vec{u}+b\vec{v}\\\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}&=a\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+b\left(\vec{j}+\vec{k}\right)\\\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}&=a\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{j}+b\vec{k}\\\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}&=a\vec{i}+(a+b)\vec{j}+b\vec{k}\end{aligned}$$

$$a=1$$
$$a+b=4$$
$$b=3$$

จึงได้ว่า $a=1, b=3$

ดังนั้น $a=1$ และ $b=3$ ที่ทำให้ $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$

ตัวอย่าง 1.9.4 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ บนปริภูมิสามมิติ จงหา $4\vec{u}-2\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}4\vec{u}-2\vec{v}&=4\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)-2\left(6\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}\right)\\&=\left(8\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)-\left(12\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}\right)\\&=(8-12)\vec{i}+\left(-12-(-4)\right)\vec{j}+(4-8)\vec{k}\\&=-4\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $4\vec{u}-2\vec{v}=-4\vec{i}-8\vec{j}-4\vec{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$ คือ

$$\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{i}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{j}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\vec{k}$$

ตัวอย่าง 1.9.5 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $P(1,0,1)$ และ มีจุดสิ้นสุดที่จุด $Q(3,2,0)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=(3-1)\vec{i}+(2-0)\vec{j}+(0-1)\vec{k}\\&=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\\\left|\overrightarrow{PQ}\right|&=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{9}=3\\\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|}&=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$

ตัวอย่าง 1.9.6 ให้ $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ จงหาขนาดของ $\vec{u}$ และ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}\vec{u}&=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\\|\vec{u}|&=\sqrt{(5)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{30}\end{aligned}$$

จึงได้ว่า ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $\sqrt{30}$

พิจารณา

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{30}}$$

ตัวอย่าง

$$=\frac{5}{\sqrt{30}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{30}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{30}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $\frac{5}{\sqrt{30}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{30}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{30}}\vec{k}$

ตัวอย่าง 1.9.7 ให้ $\vec{u}=\sqrt{2}\vec{i}+3\vec{j}+\sqrt{5}\vec{k}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ จงหาเวกเตอร์ $\vec{w}$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ คือ $\vec{w}=|\vec{u}|\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)$

หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$

$$\begin{aligned}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}&=\frac{2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(2)^2}}\\&=\frac{2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}}{3}\\&=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\end{aligned}$$

หาขนาดของ $\vec{u}$ จาก $\vec{u}=\sqrt{2}\vec{i}+3\vec{j}+\sqrt{5}\vec{k}$ จะได้

$$\begin{aligned}|\vec{u}|&=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(3)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=4\\\vec{w}&=|\vec{u}|\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)=4\left(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k}\right)\\&=\frac{8}{3}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}+\frac{8}{3}\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{w}=\frac{8}{3}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}+\frac{8}{3}\vec{k}$

ตัวอย่าง 1.9.8 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}+\vec{v}$

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}+\vec{v}$ คือ $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{|\vec{u}+\vec{v}|}$

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=\left(2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}\right)+\left(-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\right)\\&=(2-1)\vec{i}+(4-2)\vec{j}+(-3+3)\vec{k}\\&=\vec{i}+2\vec{j}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{(1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\frac{\vec{u}+\vec{v}}{|\vec{u}+\vec{v}|}=\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}+\vec{v}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$

ตัวอย่าง 1.9.9 ให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด $P(1,0,-3)$ และมีขนาดสามหน่วย จงหาพิกัดจุดสิ้นสุด Q ที่ทำให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$

วิธีทำ ให้พิกัดจุด Q คือ (a,b,c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=(a-1)\vec{i}+(b-0)\vec{j}+(c+3)\vec{k}\\&=(a-1)\vec{i}+b\vec{j}+(c+3)\vec{k}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ}$ ขนานกับ $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$

จึงได้ว่าต้องมีสเกลาร์ t ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{PQ}=t\vec{v}$

$$(a-1)\vec{i}+b\vec{j}+(c+3)\vec{k}=t\left(2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}\right)$$

$$(a-1)\vec{i}+b\vec{j}+(c+3)\vec{k}=2t\vec{i}-3t\vec{j}+6t\vec{k}$$

$$(a-1)=2t \quad ....(1)$$

$$b=-3t \quad ....(2)$$

$$(c+3)=6t \quad ....(3)$$

จาก $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=3$

ดังนั้น $\sqrt{(a-1)^2+b^2+(c+3)^2}=3$

$$(a-1)^2+b^2+(c+3)^2=9$$

แทนค่า $(2t)^2+(-3t)^2+(6t)^2=9$

$$4t^2+9t^2+36t^2=9$$

$$49t^2=9$$

$$t^2=\frac{9}{49}$$

$$t=\pm\frac{3}{7}$$

จากสมการ (1) $\quad (a-1)=2t$

$$a=2t+1$$

แทนค่า $t=\frac{3}{7}$ $\quad a=2\left(\frac{3}{7}\right)+1=\frac{13}{7}$

แทนค่า $t=-\frac{3}{7}$ $\quad a=2\left(-\frac{3}{7}\right)+1=\frac{1}{7}$

จากสมการ (2) $\quad b=-3t$

แทนค่า $t=\frac{3}{7}$ $\quad b=-3\left(\frac{3}{7}\right)=-\frac{9}{7}$

แทนค่า $t=-\frac{3}{7}$ $\quad b=-3\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{9}{7}$

จากสมการ(3) $\quad c+3=6t$

$$c=6t-3$$

แทนค่า $t=\frac{3}{7}$ $\quad c=6\left(\frac{3}{7}\right)-3=-\frac{3}{7}$

แทนค่า $t=-\frac{3}{7}$ $\quad c=6\left(-\frac{3}{7}\right)-3=-\frac{39}{7}$

ดังนั้น เมื่อ $t=\frac{3}{7}$ จุด $Q\left(\frac{13}{7},-\frac{9}{7},-\frac{3}{7}\right)$ และ เมื่อ $t=-\frac{3}{7}$ จุด $Q\left(\frac{1}{7},\frac{9}{7},-\frac{39}{7}\right)$

1.10 เวกเตอร์ในปริภูมิ *n* มิติ

นิยาม 1.10.1 ถ้า n แทนจำนวนจำนวนเต็มบวกแล้ว n สิ่งอันดับ (ordered n-tuple) หมายถึงลำดับของจำนวนจริง n จำนวน $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ เรียกเซตของ n สิ่งอันดับว่าปริภูมิ n มิติ (n - space) และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย R^n ซึ่ง

$$R^n=\{(a_1,a_2,a_3,...,a_n)\,|\,a_i\in R; i=1,2,3,...,n\}$$

$R^1=\{(v_1)\,|\,v_i\in R; i=1\}$ แทนปริภูมิหนึ่งมิติ สมาชิกของ R^1 ประกอบด้วย หนึ่งสิ่งอันดับ $(n=1)$ คือ จำนวนจริงหนึ่งจำนวน ความหมายทางพีชคณิตคือ เซตของจำนวนจริงแสดงได้ด้วยเส้นจำนวน

$R^2=\{(v_1,v_2)\,|\,v_i\in R; i=1,2\}$ แทนปริภูมิสองมิติ สมาชิกของ R^2 ประกอบด้วยเซตของคู่อันดับ $(n=2)$ ความหมายทางพีชคณิตคือ เซตคู่อันดับของจำนวนจริงแสดงด้วยระนาบสองมิติ

$R^3=\{(v_1,v_2,v_3)\,|\,v_i\in R; i=1,2,3\}$ แทนปริภูมิสามมิติสมาชิกของ R^3 ประกอบด้วยเซตของสามสิ่งอันดับของจำนวนจริง แสดงด้วยระนาบสามมิติ

$R^n=\{(v_1,v_2,v_3,...,v_n)\,|\,v_i\in R; i=1,2,3,...,n\}$ แทนปริภูมิ n มิติ สมาชิกของ R^n ประกอบด้วยเซตของ n สิ่งอันดับของจำนวนจริง ซึ่งทางเรขาคณิตหมายถึงระนาบใน n มิติ และยากที่จะแสดงด้วยภาพทางเรขาคณิต ในทางเรขาคณิตเราอาจใช้ $u=(u_1,u_2,...,u_n)$ แทนจุดพิกัดหรือแทนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ซึ่งมีส่วนประกอบ n สิ่งอันดับ

ตัวอย่าง

เช่น เวกเตอร์ $\vec{0}=(0,0,...,0)$ แทนเวกเตอร์ศูนย์หรือจุดกำเนิดของ R^n ดังนั้นต่อไปนี้จะเรียกสมาชิก $(u_1,u_2,...,u_n)$ ของปริภูมิ n มิติว่าจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

นิยาม 1.10.1 ให้ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$ เป็นเวกเตอร์บน R^n ขนาดของ $\vec{u}$ แบบยูคลีเดียน (Euclidean norm) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|\vec{u}|$ กำหนดโดย

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2}$$

ตัวอย่าง 1.10.1 ให้ $\vec{u}=(5,2,-1,3)$ เป็นเวกเตอร์บน R^4 จงหาขนาดของ $\vec{u}$

วิธีทำ
$$|\vec{u}|=|(5,2,-1,3)|$$
$$=\sqrt{(5)^2+(2)^2+(-1)^2+(3)^2} \quad =\sqrt{39}$$

ดังนั้น ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $\sqrt{39}$ หน่วย

สมบัติขนาดของเวกเตอร์ ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n สำหรับ สเกลาร์ k ใด ๆ

1. $|\vec{u}|\geq 0$
2. $|\vec{u}|=0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}=\vec{0}$
3. $|k\vec{u}|=|k||\vec{u}|$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$ เป็นเวกเตอร์บน R^n

ข้อ 1 พิจารณา
$$|\vec{u}|=|(u_1,u_2,u_3,...,u_n)|$$
$$=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2}$$

เนื่องจาก $u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2\geq 0$

จึงได้ $\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2}\geq 0$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n แล้ว $|\vec{u}|\geq 0$

ข้อ 2 $\Rightarrow$ ถ้า $|\vec{u}|=0$ แล้ว $\vec{u}=\vec{0}$

ให้
$$|\vec{u}|=0$$
$$|(u_1,u_2,u_3,...,u_n)|=0$$
$$\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2}=0$$
$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2=0$$

จึงได้
$$u_1=u_2=u_3=...=u_n=0$$
$$(u_1,u_2,u_3,...,u_n)=(0,0,0,...,0)$$
$$\vec{u}=\vec{0}$$

ตัวอย่าง

จึงได้ว่า ถ้า $|\vec{u}| = 0$ แล้ว $\vec{u} = \vec{0}$

$\Leftarrow$ ถ้า $\vec{u} = \vec{0}$ แล้ว $|\vec{u}| = 0$

ให้ $\vec{u} = \vec{0}$

พิจารณา
$$|\vec{u}| = |(0,0,0,...,0)|$$
$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + ... + 0^2} = 0$$

จึงได้ว่า ถ้า $\vec{u} = \vec{0}$ แล้ว $|\vec{u}| = 0$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n แล้ว $|\vec{u}| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0}$

ข้อ 3 พิจารณา
$$k\vec{u} = k(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$$
$$= (ku_1, ku_2, ku_3, ..., ku_n)$$

และ
$$|k\vec{u}| = |(ku_1, ku_2, ku_3, ..., ku_2)|$$
$$= \sqrt{k^2u_1^2 + k^2u_2^2 + k^2u_3^2 + ... + k^2u_n^2}$$
$$= \sqrt{k^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2)}$$
$$= \left(\sqrt{k^2}\right)\left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2}\right)$$
$$= |k||\vec{u}|$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว $|k\vec{u}| = |k||\vec{u}|$

ตัวอย่าง 1.10.2 ให้ $\vec{u} = (4,1,2,3,2)$ และ $\vec{v} = (1,0,2,7,-3)$ เป็นเวกเตอร์บน R^5 จงหา $|2\vec{u}|$

วิธีทำ พิจารณา
$$|2\vec{u}| = 2|\vec{u}|$$
$$= 2\sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (2)^2}$$
$$= 2\sqrt{34}$$

ดังนั้น $|2\vec{u}| = 2\sqrt{34}$

1.11 การดำเนินการของเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

ให้ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ เป็นเวกเตอร์บน R^n และ x เป็นสเกลาร์ใด ๆ

การเท่ากันของสองเวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3, ..., u_n = v_n$

การบวกเวกเตอร์ $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, ..., u_n + v_n)$

เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0} = (0,0,...,0)$ มีสมบัติ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{u}$

ตัวอย่าง

ลบของเวกเตอร์ ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=(-u_1,-u_2,-u_3,...,-u_n)$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $x\vec{u}=(xu_1,xu_2,xu_3,...,xu_n)$

การลบเวกเตอร์ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3,...,u_n-v_n)$

ตัวอย่าง 1.11.1 ให้ $\vec{u}=(2,-3,4,-1)$ และ $\vec{v}=(5,-3,-4,4)$ เป็นเวกเตอร์บน R^4 จงหา $\vec{u}+\vec{v}$ และ $6\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}&=(2,-3,4,-1)+(5,-3,-4,4)\\&=(2+5,-3+(-3),4+(-4),-1+4)\\&=(7,-6,0,3)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v}$ คือ $(7,-6,0,3)$

$$\begin{aligned}6\vec{v}&=6(5,-3,-4,4)\\&=(30,-18,-24,24)\end{aligned}$$

ดังนั้น $6\vec{v}$ คือ $(30,-18,-24,24)$

ตัวอย่าง 1.11.2 ให้ $\vec{u}=(2,1,-3,0,1)$ และ $\vec{v}=(1,-5,2,0,3)$ เป็นเวกเตอร์บน R^5 จงหา $\vec{u}-\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{u}-\vec{v}&=(2,1,-3,0,1)-(1,-5,2,0,3)\\&=(2-1,1-(-5),-3-2,0-0,1-3)\\&=(1,6,-5,0,-2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}-\vec{v}=(1,6,-5,0,-2)$

สมบัติการดำเนินการบวกและการคูณด้วยสเกลาร์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n สำหรับสเกลาร์ k และ l ใด ๆ

1. $\vec{u}+\vec{v}\in R^n$
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
3. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
4. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
5. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
6. $k\vec{u}\in R^n$
7. $k(l\vec{u})=(kl)\vec{u}$

ตัวอย่าง

8. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
9. $(k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u}$
10. $1\vec{u}=\vec{u}$
11. $0\vec{u}=\vec{0}$
12. $k\vec{0}=\vec{0}$
13. $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3,...,v_n)$ และ $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3,...,w_n)$ เป็นเวกเตอร์บน R^n

ข้อ 1 $\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(v_1,v_2,v_3,...,v_n)$

$$=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...,u_n+v_n)\in R^n$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}\in R^n$ แล้ว $\vec{u}+\vec{v}\in R^n$

ข้อ 2 $\vec{u}+\vec{v}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(v_1,v_2,v_3...,v_n)$

$$\begin{aligned}&=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...,u_n+v_n)\\&=(v_1+u_1,v_2+u_2,v_3+u_3,...,v_n+u_n)\\&=(v_1,v_2,v_3,...,v_n)+(u_1,u_2,u_3,...,u_n)\\&=\vec{v}+\vec{u}\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}\in R^n$ แล้ว $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ข้อ 3 $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+[(v_1,v_2,v_3,...,v_n)+(w_1,w_2,w_3,...,w_n)]$

$$\begin{aligned}&=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(v_1+w_1,v_2+w_2,v_3+w_3,...,v_n+w_n)\\&=(u_1+(v_1+w_1),u_2+(v_2+w_2),u_3+(v_3+w_3),...,u_n+(v_n+w_n))\\&=((u_1+v_1)+w_1,(u_2+v_2)+w_2,(u_3+v_3)+w_3,...,(u_n+v_n)+w_n)\\&=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...,u_n+v_n)+(w_1,w_2,w_3,...,w_n)\\&=[(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(v_1,v_2,v_3,...,v_n)]+(w_1,w_2,w_3,...,w_n)\\&=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}\in R^n$ แล้ว $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

ข้อ 4 $\vec{u}+\vec{0}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(0,0,0,...,0)$

$$\begin{aligned}&=(u_1+0,u_2+0,u_3+0,...,u_n+0)\\&=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)=\vec{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{0}+\vec{u}&=(0,0,0,...,0)+(u_1,u_2,u_3,...,u_n)\\&=(0+u_1,0+u_2,0+u_3,...,0+u_n)\\&=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)=\vec{u}\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}\in R^n$ แล้ว $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

ข้อ 5 $\vec{u}+(-\vec{u})=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(-u_1,-u_2,-u_3,...,-u_n)$

$$=(u_1+(-u_1),u_2+(-u_2),u_3+(-u_3),...,u_n+(-u_n))$$

$$=(0,0,0,...,0)=\vec{0}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}\in R^n$ แล้ว $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

ข้อ 6 $k\vec{u}=k(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$

$$=(ku_1,ku_2,ku_3,...,ku_n)\in R^n$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}\in R^n$ และสเกลาร์ k ใด ๆ แล้ว $k\vec{u}\in R^n$

ข้อ 7 $k(l\vec{u})=k[l(u_1,u_2,u_3,...,u_n)]$

$$=k((lu_1),(lu_2),(lu_3),...,(lu_n))$$

$$=(k(lu_1),k(lu_2),k(lu_3),...,k(lu_n))$$

$$=((kl)u_1,(kl)u_2,(kl)u_3,...,(kl)u_n)$$

$$=(kl)(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$$

$$=(kl)\vec{u}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}\in R^n$ แล้ว $k(l\vec{u})=(kl)\vec{u}$

ข้อ 8 $k(\vec{u}+\vec{v})=k[(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+(v_1,v_2,v_3,...,v_n)]$

$$=k(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...,u_n+v_n)$$

$$=(k(u_1+v_1),k(u_2+v_2),k(u_3+v_3),...,k(u_n+v_n))$$

$$=(ku_1+kv_1,ku_2+kv_2,ku_3+kv_3,...,ku_n+kv_n)$$

$$=(ku_1,ku_2,ku_3,...,ku_n)+(kv_1,kv_2,kv_3,...,kv_n)$$

$$=k(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+k(v_1,v_2,v_3,...,v_n)$$

$$=k\vec{u}+k\vec{v}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u},\vec{v}\in R^n$ แล้ว $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

ข้อ 9 $(k+l)\vec{u}=(k+l)(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$

$$=((k+l)u_1,(k+l)u_2,(k+l)u_3,...,(k+l)u_n)$$

$$=(ku_1+lu_1,ku_2+lu_2,ku_3+lu_3,...,ku_n+lu_n)$$

$$=(ku_1,ku_2,ku_3,...,ku_n)+(lu_1,lu_2,lu_3,...,lu_n)$$

$$=k(u_1,u_2,u_3,...,u_n)+l(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$$

$$=k\vec{u}+l\vec{u}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}\in R^n$ และ k,l เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว $(k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u}$

ข้อ 10 $1\vec{u}=1(u_1,u_2,u_3,...,u_n)$

$$=(1u_1,1u_2,1u_3,...,1u_n)$$

$$=(u_1,u_2,u_3,...,u_n)=\vec{u}$$

ตัวอย่าง

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u} \in R^n$ แล้ว $1\vec{u} = \vec{u}$

ข้อ 11 $\quad 0\vec{u} = 0(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$

$$= (0u_1, 0u_2, 0u_3, ..., 0u_n)$$

$$= (0, 0, 0, ..., 0) = \vec{0}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u} \in R^n$ แล้ว $0\vec{u} = \vec{0}$

ข้อ 12 $\quad k\vec{0} = k(0, 0, 0, ..., 0)$

$$= (k0, k0, k0, ..., k0)$$

$$= (0, 0, 0, ..., 0) = \vec{0}$$

ดังนั้น สำหรับเวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0} \in R^n$ และสเกลาร์ k ใด ๆ แล้ว $k\vec{0} = \vec{0}$

ข้อ 13 $\quad (-1)\vec{u} = (-1)(u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$

$$= ((-1)u_1, (-1)u_2, (-1)u_3, ..., (-1)u_n)$$

$$= (-u_1, -u_2, -u_3, ..., -u_n)$$

$$= -\vec{u}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u} \in R^n$ แล้ว $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ ฃ

หมายเหตุ การเขียนเวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, ..., v_n)$ ใน R^n บางครั้งเขียนในรูปเวกเตอร์แถว (row-vector) $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3, ..., u_n]$ หรือเขียนในเวกเตอร์หลัก (column-vector) $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

การเขียนเวกเตอร์ทั้ง 3 รูปแบบอาจแตกต่างกันไปแล้วแต่ความสะดวกและปัญหาที่เกี่ยวข้อง

นิยาม 1.11.2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน R^n คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ใน R^n จะกล่าวว่า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเมื่อ $|\vec{u}| = 1$

สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์บน R^n จะกล่าวว่า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเวกเตอร์ $\vec{v}$ เมื่อ $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ในทำนองเดียวกัน จะกล่าวว่า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ เมื่อ $\vec{u} = -\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.11.3 ให้ $\vec{v}=(2,5,1,-1)$ เป็นเวกเตอร์บน R^4 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{v}$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$

วิธีทำ ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{v}$

จึงได้
$$
\begin{aligned}
\vec{u} &= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\
&= \frac{(2,5,1,-1)}{\sqrt{(2)^2+(5)^2+(1)^2+(-1)^2}} \\
&= \frac{(2,5,1,-1)}{\sqrt{31}} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{31}},\frac{5}{\sqrt{31}},\frac{1}{\sqrt{31}},-\frac{1}{\sqrt{31}}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{v}$ คือ $\left(\frac{2}{\sqrt{31}},\frac{5}{\sqrt{31}},\frac{1}{\sqrt{31}},-\frac{1}{\sqrt{31}}\right)$

ให้ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$

จึงได้
$$\vec{w}=-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

นั่นคือ
$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{2}{\sqrt{31}},\frac{5}{\sqrt{31}},\frac{1}{\sqrt{31}},-\frac{1}{\sqrt{31}}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{\sqrt{31}},-\frac{5}{\sqrt{31}},-\frac{1}{\sqrt{31}},\frac{1}{\sqrt{31}}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ คือ $\left(-\frac{2}{\sqrt{31}},-\frac{5}{\sqrt{31}},-\frac{1}{\sqrt{31}},\frac{1}{\sqrt{31}}\right)$

1.12 สรุป

บทนี้เป็นการศึกษาถึงปริมาณเวกเตอร์ เวกเตอร์ในระนาบ เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ และการดำเนินการของเวกเตอร์ สรุปได้ดังนี้

ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยใช่ส่วนของเส้นตรงที่มีลูกศรแทนเวกเตอร์ ซึ่งความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ ลูกศรแทนทิศทางของเวกเตอร์

เวกเตอร์ในระนาบ

สำหรับ $\vec{u}=(a,b)$ และ $\vec{v}=(c,d)$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบและสเกลาร์ k

พีชคณิตของเวกเตอร์

1. การเท่ากับ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. ขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$
3. การบวก $\vec{u}+\vec{v}=(a+c,b+d)$

ตัวอย่าง

4. เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=(0,0)$

5. การคูณด้วยสเกลาร์ $k\vec{u}=(ka,kb)$

6. ลบของ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=(-a,-b)$

7. การลบ $\vec{u}-\vec{v}=(a-c,b-d)$

เวกเตอร์ฐาน สำหรับ $\vec{i}=(1,0),\vec{j}=(0,1)$ ให้ $\vec{u}=(a,b)$ สามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ในรูปผลร่วมเชิงเส้นของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ดังนี้ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$

พีชคณิตของเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ และ $\vec{v}=c\vec{i}+d\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบและสเกลาร์ k

1. การเท่ากับ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

2. ขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{u}|=\sqrt{a^2+b^2}$

3. การบวก $\vec{u}+\vec{v}=(a+c)\vec{i}+(b+d)\vec{j}$

4. เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}$

5. การคูณด้วยสเกลาร์ $k\vec{u}=ka\vec{i}+kb\vec{j}$

6. ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=-a\vec{i}-b\vec{j}$

7. การลบ $\vec{u}-\vec{v}=(a-c)\vec{i}+(b-d)\vec{j}$

เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

พีชคณิตของเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ และ $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติและสเกลาร์ x ใด ๆ

1. การเท่ากับ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$ และ $c_1=c_2$

2. ขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{u}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$

3. การบวก $\vec{u}+\vec{v}=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$

4. เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=(0,0,0)$

5. การคูณด้วยสเกลาร์ $x\vec{u}=(xa_1,xb_1,xc_1)$

6. ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=(-a_1,-b_1,-c_1)$

7. การลบ $\vec{u}-\vec{v}=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$

เวกเตอร์ฐาน สำหรับ $\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0)$ และ $\vec{k}=(0,0,1)$ ให้ $\vec{u}=(a,b,c)$ สามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ในรูปผลร่วมเชิงเส้นของ $\vec{i},\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ดังนี้ $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

พีชคณิตของเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติและ สเกลาร์ x ใด ๆ

1. การเท่ากับ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$ และ $c_1=c_2$

2. ขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{u}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$

ตัวอย่าง

3. การบวก $\vec{u}+\vec{v}=(a_1+a_2)\vec{i}+(b_1+b_2)\vec{j}+(c_1+c_2)\vec{k}$

4. เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$

5. การคูณด้วยสเกลาร์ $x\vec{u}=xa_1\vec{i}+xb_1\vec{j}+xc_1\vec{k}$

6. ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=-a_1\vec{i}-b_1\vec{j}-c_1\vec{k}$

7. การลบ $\vec{u}-\vec{v}=(a_1-a_2)\vec{i}+(b_1-b_2)\vec{j}+(c_1-c_2)\vec{k}$

พีชคณิตของเวกเตอร์ บน R^n สำหรับ $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,...,u_n),\vec{v}=(v_1,v_2,v_3,...,v_n)$ และ $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3,...,w_n)$ เป็นเวกเตอร์บน R^n และสเกลาร์ k

1. การเท่ากับ $\vec{u}=\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_1=v_1,u_2=v_2,u_3=v_3,...,u_n=v_n$

2. ขนาดของ $\vec{u}$ คือ $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_n^2}$

3. การบวก $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3,...,u_n+v_n)$

4. เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{0}=(0,0,0,...,0)$

5. การคูณด้วยสเกลาร์ $k\vec{u}=(ku_1,ku_2,ku_3,...,ku_n)$

6. ลบของเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}=(-u_1,-u_2,-u_3,...,-u_n)$

7. การลบ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3,...,u_n-v_n)$

สมบัติของเวกเตอร์บน R^n

1. การปิดสำหรับการบวก $\vec{u}+\vec{v}\in R^n$
2. การสลับที่สำหรับการบวก $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
3. การเปลี่ยนหมู่ $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
4. การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
5. การมีตัวผกผันสำหรับการบวก $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
6. การปิดสำหรับการคูณ $k\vec{u}\in R^n$
7. การมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ $1\vec{u}=\vec{u}$
8. $c(k\vec{u})=(ck)\vec{u}$
9. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
10. $(k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u}$
11. $0\vec{u}=\vec{0}$
12. $k\vec{0}=\vec{0}$
13. $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$

ตัวอย่าง

แบบฝึกหัด 1

1. ให้ $\vec{u}=3\vec{i}+5\vec{j}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}+7\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์จงหา

1.1 $3\vec{u}$
1.2 $-2\vec{v}$
1.3 $\vec{u}+\vec{v}$
1.4 $\vec{u}-\vec{v}$
1.5 $2\vec{u}+3\vec{v}$

2. จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ต่อไปนี้

2.1 $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$
2.2 $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$
2.3 $\vec{u}=\vec{i}-\vec{k}$
2.4 $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$
2.5 $\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$
2.6 $\vec{u}=(3,-5,4)$
2.7 $\vec{u}=(1,2,3,4)$
2.8 $\vec{u}=(-1,4,-1,3)$
2.9 $\vec{u}=(0,1,-3,4,8)$
2.10 $\vec{u}=(1,2,0,-3,5,-1)$

3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ที่เกิดจากจุดเริ่มต้นที่จุด P จุดสิ้นสุดที่จุด Q ต่อไปนี้

3.1 $P(3,4,5)$ และ $Q(0,-6,3)$
3.2 $P(3,-5,4)$ และ $Q(2,-1,3)$
3.3 $P(3,3,-4)$ และ $Q(-2,1,3)$
3.4 $P(2,-1,1)$ และ $Q(3,5,2)$
3.5 $P(2,3,-4)$ และ $Q(0,3,7)$

4. จงหา $\vec{w}$ ซึ่งมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่อไปนี้

4.1 $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=-6\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$
4.2 $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=12\vec{i}-16\vec{j}+4\vec{k}$
4.3 $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$
4.4 $\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$
4.5 $\vec{u}=-3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

5. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}+\vec{v}$ และ $2\vec{u}-\vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่อไปนี้

5.1 $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$
5.2 $\vec{u}=-3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$
5.3 $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{k}$ และ $\vec{v}=6\vec{j}+2\vec{k}$
5.4 $\vec{u}=3\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}$ และ $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$
5.5 $\vec{u}=-3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

ตัวอย่าง

6. ให้ $\vec{u}=(-3,-5,3,0),\vec{v}=(4,1,3,-1)$ และ $\vec{w}=(0,5,-2,1)$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ R^4 จงหาค่า

6.1 $2\vec{u}+3\vec{v}$

6.2 $-5\vec{u}+2\vec{w}+\vec{v}$

6.3 $4\vec{u}-7(\vec{v}-2\vec{w})$

6.4 $2\vec{u}-3(\vec{w}+5\vec{v})$

6.5 $(5\vec{u}+2\vec{v})+(\vec{w}-7\vec{v})$

ตัวอย่าง

เอกสารอ้างอิง

จินดา อาจริยะกุล, ผู้แปล. (2539). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นามมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สมพงษ์ ใจดี. (2522). **เวกเตอร์และโคออร์ดิเนท.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนัญญ อภิชาตบุตร. (2549). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Cumpbell, H. G. (1968). **Matrices with Application.** New York: Meredith.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2^{nd} ed). U.S.A: Addison Wesley.

Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3^{nd} ed). New York: Harper & Row Publishers.

Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.

Spiegel, M. R. (1981). **Vector Analysis.** Singapore: McGraw–Hill International Book Company.

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 2

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

2.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์
2.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์บนระบบพิกัดฉาก
2.3 มุมระหว่างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์
2.4 ภาพฉายของเวกเตอร์
2.5 การประยุกต์เวกเตอร์ในระนาบ
2.6 ผลคูณเชิงเวกเตอร์
2.7 ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์
2.8 ความหมายของผลคูณเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต
2.9 ทอร์ก
2.10 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์
2.11 ผลคูณสามเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ในเชิงเรขาคณิต
2.12 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์
2.13 สรุป
แบบฝึกหัด
เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ในระนาบและระบบพิกัดฉากได้
2. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหามุมระหว่างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าภาพฉายของเวกเตอร์ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและสามารถประยุกต์เวกเตอร์ในระนาบได้
5. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
6. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจความหมายของผลคูณเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิตได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าทอร์กได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ได้
9. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ได้

ตัวอย่าง

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ศึกษาเอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย และซักถามประกอบการสอนด้วย Power point
3. ศึกษาจากคอมพิวเตอร์ประกอบการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป GSP
4. แบ่งกลุ่มอภิปราย สรุปบทเรียน
5. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน
7. ผู้สอบสรุปเนื้อหาเพิ่มเติม

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. เครื่องคอมพิวเตอร์และ LCD
4. โปรแกรมสำเร็จรูป GSP

การวัดผลและการประเมินผล

1. นักศึกษาสามารถตอบข้อซักถามได้
2. นักศึกษาให้ความสนใจในการเรียนการสอน
3. สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม
4. นักศึกษาสามารถทำแบบฝึกหัดได้

ตัวอย่าง

บทที่ 2
ผลคูณของเวกเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึง ผลคูณเชิงสเกลาร์ มุมระหว่างเวกเตอร์ ภาพฉายของเวกเตอร์ การประยุกต์เวกเตอร์ในระนาบ ผลคูณเป็นเวกเตอร์ ความหมายของผลคูณเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต ผลคูณสามเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ทอร์ก ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ และผลคูณเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์

2.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

นิยาม 2.1.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ ผลคูณของขนาดของเวกเตอร์ทั้งสองกับค่าโคไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ และ $0\le\theta\le\pi$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

ผลคูณเชิงสเกลาร์ ของสองเวกเตอร์จะมีค่าเป็นจำนวนจริง ผลคูณเชิงสเกลาร์มีชื่ออื่นอีก คือ ผลคูณภายใน (inner product) หรือ ผลคูณแบบจุด (dot product)

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เมื่อ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$
3. $(k\vec{u}\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$
4. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $\vec{u}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
5. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
6. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z})=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$
7. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$

พิสูจน์ ข้อ 1 จากนิยาม

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\&=|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta\\&=\vec{v}\cdot\vec{u}\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใด ๆ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

ข้อ 2 พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{u}&=|\vec{u}||\vec{u}|\cos\theta\\&=|\vec{u}||\vec{u}|\cos 0\\&=|\vec{u}|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$

ข้อ 3 แบ่งการพิสูจน์เป็น 3 กรณี

ตัวอย่าง

กรณีที่ 1 ถ้า $k>0$ ดังนั้น $|k|=k$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ρ เป็นมุมระหว่าง $k\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ϕ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $k\vec{v}$

จึงได้ว่า $\theta=\rho=\phi$

พิจารณา

$$\begin{aligned}k(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= |k\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= |k\vec{u}||\vec{v}|\cos\rho\\ &= (k\vec{u})\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= |\vec{u}||k\vec{v}|\cos\theta\\ &= |\vec{u}||k\vec{v}|\cos\phi\\ &= \vec{u}\cdot(k\vec{v})\end{aligned}$$

ดังนั้น $(k\vec{u}\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

กรณีที่ 2 ถ้า $k<0$ ดังนั้น $|k|=-k$

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ψ เป็นมุมระหว่าง $k\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เมื่อ $\psi=\pi-\theta$

และ ϕ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $k\vec{v}$ เมื่อ $\phi=\pi-\theta$

และ $\cos\psi=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

$\cos\phi=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

พิจารณา

$$\begin{aligned}k(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= -k|\vec{u}||\vec{v}|(-\cos\theta)\\ &= |k||\vec{u}||\vec{v}|(-\cos\theta)\\ &= |k\vec{u}||\vec{v}|\cos\psi\\ &= (k\vec{u})\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u}\cdot\vec{v})$

และ

$$\begin{aligned}k(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= k|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= -k|\vec{u}||\vec{v}|(-\cos\theta)\\ &= |k||\vec{u}||\vec{v}|(-\cos\theta)\\ &= |\vec{u}||k\vec{v}|\cos\phi\\ &= \vec{u}\cdot(k\vec{v})\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

ดังนั้น$(k\vec{u}\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

กรณีที่ 3 ถ้า $k=0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} k(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= 0(\vec{u}\cdot\vec{v}) \\ &= 0 \\ &= (0\vec{u})\vec{v} \\ &= \vec{u}(0\vec{v}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(k\vec{u}\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

ทั้ง 3 กรณี จึงได้ว่า $(k\vec{u}\cdot\vec{v})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$

ข้อ 4 สำหรับ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

$\Rightarrow$ ให้ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จึงได้ $\theta=\frac{\pi}{2}$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= |\vec{u}||\vec{v}|(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ....(1)

$\Leftarrow$ ให้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

พิจารณา $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=0$$

เนื่องจาก $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

จึงได้
$$\begin{aligned} \cos\theta &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

จาก θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

จึงได้ว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ....(2)

จาก (1)และ(2); ถ้า $\vec{u}$ และ$\vec{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $\vec{u}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ข้อ 5 สมบัติการกระจาย จะแสดงการพิสูจน์หลังจากศึกษาเรื่องภาพฉายของเวกเตอร์

ข้อ 6
$$\begin{aligned} (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z}) &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}+(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{z} \\ &= (\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w})+(\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{z}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z})=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$

ข้อ 7 พิจารณา $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot[\vec{u}+(-\vec{v})]+\vec{v}\cdot[\vec{u}+(-\vec{v})]$

$$=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot(-\vec{v})+\vec{v}\cdot\vec{u}+(-\vec{v})\cdot\vec{v}$$
$$=[\vec{u}\cdot\vec{u}+(-\vec{v}\cdot\vec{v})]+[(-\vec{u}\cdot\vec{v})+\vec{u}\cdot\vec{v}]$$
$$=|\vec{u}|^2+(-1)|\vec{v}|^2+0$$
$$=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$$

ดังนั้น สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใด ๆ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$

ข้อสังเกต

1. ผลคูณเชิงสเกลาร์ไม่มีสมบัติการตัดออก นั่นคือ
   ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ และ $\vec{u}\neq 0$ แล้วไม่จำเป็นที่ $\vec{v}=\vec{w}$
2. ผลคูณเชิงสเกลาร์ไม่มีสมบัติปิด นั่นคือ
   สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใด ๆ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์
3. สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ใด ๆ
   3.1 $\vec{u}+(\vec{v}\cdot\vec{w})$ ไม่มีความหมาย
   3.2 $\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$ ไม่มีความหมาย
   3.3 สำหรับสเกลาร์ k ใด ๆ $k\cdot\vec{u}$ ไม่มีความหมาย

ตัวอย่าง 2.1.1 สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า เวกเตอร์ $\vec{u}$ มีขนาด 2 หน่วย เวกเตอร์ $\vec{v}$ มีขนาด 5 หน่วย และมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองคือ $\frac{\pi}{3}$ จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ จากนิยาม $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

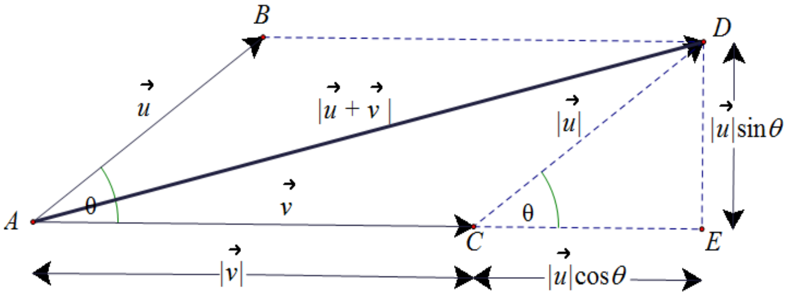
$$=(2)(5)\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=10\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=5$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$

ทฤษฎีบท 2.1.1 กฎของโคไซน์ (law of cosines) ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง จะได้ว่า $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ และ $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

ตัวอย่าง

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B เวกเตอร์ $\vec{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด C และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ดังภาพที่ 2.1.1



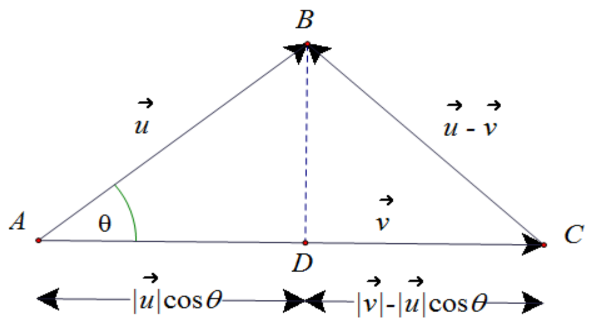
ภาพที่ 2.1.1 การพิสูจน์ $|\vec{u}+\vec{v}|^2$

พิจารณาภาพสามเหลี่ยม ADE โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = \left(|\vec{v}|+|\vec{u}|\cos\theta\right)^2 + \left(|\vec{u}|\sin\theta\right)^2$$
$$= \left(|\vec{v}|+|\vec{u}|\cos\theta\right)^2 + \left(|\vec{u}|\sin\theta\right)^2$$
$$= |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta + |\vec{u}|^2\cos^2\theta + |\vec{u}|^2\sin^2\theta$$
$$= |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta + |\vec{u}|^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABC ให้เวกเตอร์ $\vec{u}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B เวกเตอร์ $\vec{v}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด C และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จากจุด B ลากเส้นตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ที่จุด D และให้ $\left|\overline{BD}\right| = x$ ดังภาพที่ 2.1.2



ภาพที่ 2.1.2 การพิสูจน์ $|\vec{u}-\vec{v}|^2$

จากภาพที่ 2.1.2 รูปสามเหลี่ยม ABD โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$|\vec{u}|^2 = \left(|\vec{u}|\cos\theta\right)^2 + x^2$$
$$x^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{u}|^2\cos^2\theta \qquad \text{............}(1)$$

พิจารณาภาพสามเหลี่ยม BCD โดยทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=\left(|\vec{v}|-|\vec{u}|\cos\theta\right)^2+x^2$$

$$x^2=|\vec{u}-\vec{v}|^2-\left[|\vec{v}|^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta+|\vec{u}|^2\cos^2\theta\right]$$

$$=|\vec{u}-\vec{v}|^2-|\vec{v}|^2+2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta-|\vec{u}|^2\cos^2\theta \qquad \text{...........}(2)$$

สมการ $(1)=$ สมการ (2);

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2-|\vec{v}|^2+2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta-|\vec{u}|^2\cos^2\theta=|\vec{u}|^2-|\vec{u}|^2\cos^2\theta$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2-|\vec{v}|^2+2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta=|\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$$

ดังนั้น $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$

ทฤษฎีบท 2.1.2 กฎสี่เหลี่ยมด้านขนาน (law of parallelogram) ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะได้ $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2\left(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\right)$

พิสูจน์ $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=\left(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\right)+\left(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\right)$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta+|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2$$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{v}|^2$$

$$=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$$

$$=2\left(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\right)$$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2\left(|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2\right)$

ตัวอย่าง 2.1.2 สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=3$ และ $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$ จงหา

1. $|\vec{u}+\vec{v}|$ 2. $|\vec{u}-\vec{v}|$ 3. มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ ข้อ 1 พิจารณา $|\vec{u}+\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$=(2)^2+(3)^2+2(6)=25$$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}|=5$

ข้อ 2 พิจารณา $|\vec{u}-\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$$=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$=4+9-2(6)=1$$

ดังนั้น $|\vec{u}-\vec{v}|=1$

ข้อ 3 จาก $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{6}{(2)(3)}=1$

$$\theta=\arccos(1)=0$$

ดังนั้น มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ 0 แสดงว่า เวกเตอร์ทั้งสองขนานกัน

จากตัวอย่าง 2.1.2 พบว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ทำมุม 0 แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งสองขนานกัน

พิจารณา $|\vec{u}|+|\vec{v}|=2+3=5$ ....(1)

และ $|\vec{u}+\vec{v}|=5$ ....(2)

จาก สมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

ดังนั้น ถ้า เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน จะได้ว่า $|\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}|$

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $|\vec{u}|=4, |\vec{v}|=3$ และ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{11}{2}$ จงหา

1. $|\vec{u}+\vec{v}|$ 2. มุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

วิธีทำ ข้อ 1
$$\begin{aligned}|\vec{u}+\vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta\\ &= |\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\\ &= (4)^2+(3)^2+2\left(\frac{11}{2}\right)\\ &= 36\end{aligned}$$

ดังนั้น $|\vec{u}+\vec{v}|=6$

ข้อ 2 จาก $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{\frac{11}{2}}{(4)(3)}=\dfrac{11}{24}$

$$\theta=\arccos\left(\frac{11}{24}\right)=\frac{7\pi}{20}$$

ดังนั้น มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\dfrac{7\pi}{20}$

จากตัวอย่าง 2.1.3 พบว่าเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ทำมุม $\dfrac{7\pi}{20}$ แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งสองไม่ขนานกันพิจารณา $|\vec{u}|+|\vec{v}|=4+3=12$ ....(1)

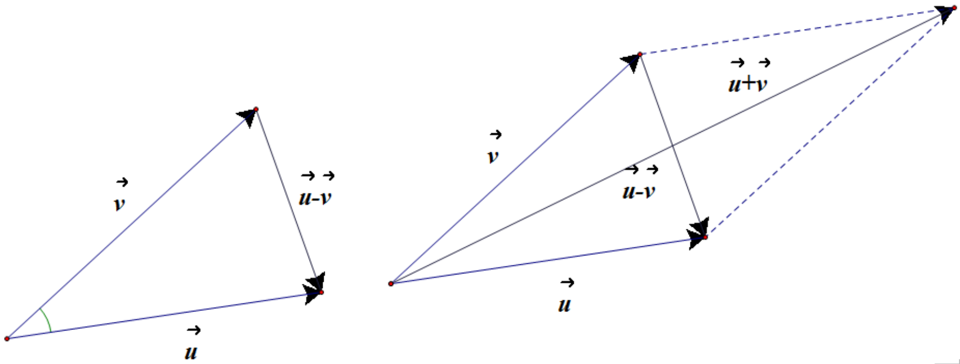
และ $|\vec{u}+\vec{v}|=6$ ....(2)

จาก สมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $|\vec{u}+\vec{v}|\neq|\vec{u}|+|\vec{v}|$

จึงได้ว่า ถ้า เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ขนานกัน แล้ว $|\vec{u}+\vec{v}|<|\vec{u}|+|\vec{v}|$

นั่นคือ ผลบวกความยาวของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมต้องยาวกว่าด้านที่สามเสมอ ดังภาพที่ 2.1.3

ตัวอย่าง



ภาพที่ 2.1.3 ผลบวกความยาวของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมต้องยาวกว่าด้านที่สาม

2.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์บนระบบพิกัดฉาก

ผลคูณเชิงสเกลาร์หนึ่งหน่วยตามแกนพิกัดฉากดังนี้

พิจารณา $\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0 = (1)(1)(1) = 1$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\cos 0 = (1)(1)(1) = 1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = |\vec{k}||\vec{k}|\cos 0 = (1)(1)(1) = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2} = (1)(1)(0) = 0$$

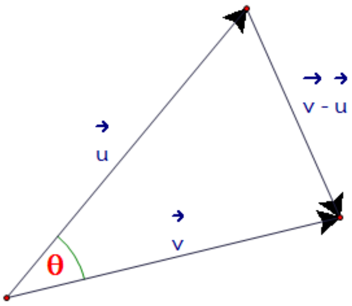
$$\vec{j}\cdot\vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\cos\frac{\pi}{2} = (1)(1)(0) = 0$$

$$\vec{k}\cdot\vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}|\cos\frac{\pi}{2} = (1)(1)(0) = 0$$

สรุปได้ดังนี้ $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ และ $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ ในระนาบใด ๆ สามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ และ $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ใด ๆ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

พิสูจน์



ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ใด ๆ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ตัวอย่าง

จากทฤษฎีบทของโคไซน์

$$|\vec{v}-\vec{u}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

$$2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{v}-\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{v}-\vec{u}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|a_1\vec{i}+b_1\vec{j}\right|^2 + \left|a_2\vec{i}+b_2\vec{j}\right|^2 - \left|\left(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}\right)-\left(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}\right)\right|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - a_2^2 + 2a_1a_2 - a_1^2 - b_2^2 + 2b_1b_2 - b_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a_1a_2 + 2b_1b_2\right)$$

$$= a_1a_2 + b_1b_2$$

จากนิยาม $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$

ในทำนองเดียวกันสำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ และ $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติใด ๆ ผลคูณเชิง สเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_2b_2 + c_1c_2$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จงหาค่า $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)$$

$$= (2)(2)+(3)(4)$$

$$= 16$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v} = 16$

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหาค่า $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(3\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)$$

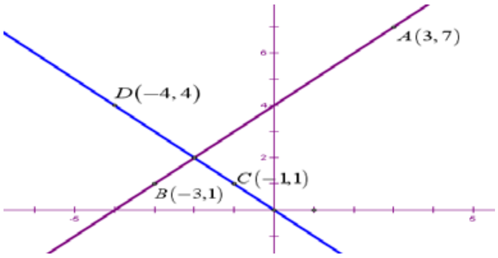
$$= (3)(2)+(4)(-2)+(-2)(1)$$

$$= -4$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v} = 16$

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3,7)$ จุด $B(-3,1)$ และเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(-1,1)$ และจุด $D(-4,4)$ ตั้งฉากกัน

วิธีทำ พิจารณาภาพ



$$\overrightarrow{AB}=(-3-3)\vec{i}+(1-7)\vec{j}=-6\vec{i}-6\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CD}=[-4-(-1)]\vec{i}+(4-1)\vec{j}=-3\vec{i}+3\vec{j}$$

พิจารณา $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-6)(-3)+(-6)(3)=18+(-18)=0$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

ทำให้เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{CD}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่านจุด $A(3,7)$ จุด $B(-3,1)$ และผ่านจุด $C(-1,1)$ จุด $D(-4,4)$ ตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 2.2.3 กำหนดสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ และเวกเตอร์ $\overrightarrow{AC}=-3\vec{i}+3\vec{j}$ เป็นเส้นขอบ จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

วิธีทำ พิจารณา $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\vec{i}+2\vec{j}\right)\cdot\left(-3\vec{i}+3\vec{j}\right)$

$$=2(-3)+(2)(3)=0$$

แสดงว่า ด้านทั้งสองตั้งฉากกัน จึงเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(2)^2+(2)^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+(3)^2}\right)=6$$

จึงได้ว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC คือ 6 ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ในระนาบ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ และ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$

วิธีทำ จาก

$$\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j} \qquad \text{............}(1)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j} \qquad \text{............}(2)$$

นำสมการ $(1)+$ สมการ (2); $(\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})=\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)+\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$

$$2\vec{u}=4\vec{i}-2\vec{j}$$

$$\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j} \qquad \text{............}(3)$$

ตัวอย่าง

แทนค่าสมการ (3) ในสมการ (2); $\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$

$$\vec{v}=\left(3\vec{i}-4\vec{j}\right)-\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)$$
$$=\vec{i}-3\vec{j}$$

พิจารณา $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)(1)+(-1)(-3)$

$$=5$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$

วิธีทำ 2 ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2+2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta \qquad ....(1)$$

และ $$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2-2\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta \qquad ....(2)$$

นำสมการ $(1)-$ สมการ (2); $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=4\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta \qquad ....(3)$

จาก $\vec{u}+\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ จึงได้ $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=(3)^2+(-4)^2=25$

และ $\vec{u}-\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ จึงได้ $\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2=(1)^2+(2)^2=5$

จาก $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

แทนค่าในสมการ (3); $25-5=4\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{20}{4}=5$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$

2.3 มุมระหว่างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จะได้ว่า $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง
จากนิยามผลคูณเชิงสเกลาร์คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

จัดสมการใหม่ $$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}$$

ดังนั้น สำหรับ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะได้ $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}$

ตัวอย่าง 2.3.1 ให้ $\vec{u}=4\vec{i}+3\vec{j}$ กับ $\vec{v}=5\vec{i}-12\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

วิธีทำ

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(4)(5)+(3)(-12)=20-36=-16$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{(4)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{(5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(-16)}{5\times 13}=-\frac{16}{65}$$

$$\theta=\arccos\left(-\frac{16}{65}\right)=\frac{29\pi}{50}$$

จึงได้ว่า มุมระหว่าง $\vec{u}=4\vec{i}+3\vec{j}$ กับ $\vec{v}=5\vec{i}-12\vec{j}$ คือ $\frac{29\pi}{50}$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}+a\vec{j}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ ในระนาบ เมื่อมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ เมื่อ $a>0$ จงหาเวกเตอร์ $\vec{u}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2)(1)+(3)a=2+3a$$

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$; $|\vec{u}|=\sqrt{4+a^2}$ และ $|\vec{v}|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2+3a}{\left(\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{4+a^2}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+3a}{\left(\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{4+a^2}\right)}$$

$$2+3a=\left(\frac{10\left(4+a^2\right)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2+3a=\left(20+5a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2+3a)^2=20+5a^2$$

$$4a^2+12a-16=0$$

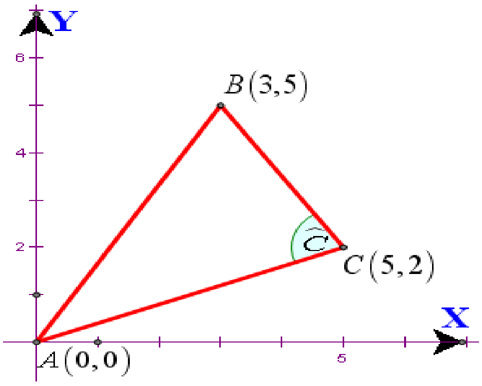
$$(a+4)(a-1)=0$$

$$a=-4,1$$

แทนค่า $a=1$ ดังนั้น $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$

ตัวอย่าง 2.3.3 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $A(0,0)$ จุด $B(3,5)$ และ $C(5,2)$ จงหามุม C

วิธีทำ พิจารณาภาพ



จากภาพ

$$\overrightarrow{CA} = (0-5)\vec{i} + (0-2)\vec{j}$$
$$= -5\vec{i} - 2\vec{j}$$
$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$
$$\overrightarrow{CB} = (3-5)\vec{i} + (5-2)\vec{j}$$
$$= -2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-5)(-2) + (-2)(3)$$
$$= 10 - 6 = 4$$

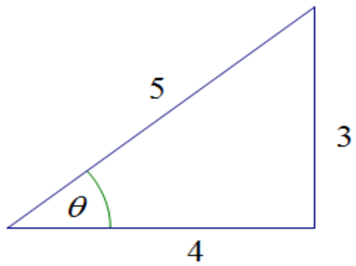
หามุม C คือ

$$\text{มุม}\, C = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{29}\sqrt{13}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{377}}\right)$$

ดังนั้น มุม C คือ $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{377}}\right)$

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ และ $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ โดยที่ a,b ไม่เป็นศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$ และ $\tan\theta=\frac{3}{4}$ จงหา $|\vec{v}|$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ จาก $\tan\theta=\frac{3}{4}$ พิจารณา สามเหลี่ยมมุมฉาก



จากภาพพบว่า $\cos\theta=\frac{4}{5}$

จาก $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

พิจารณา $4=\left(\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\right)|\vec{v}|\left(\frac{4}{5}\right)$

$$5=\sqrt{2}|\vec{v}|$$

$$|\vec{v}|=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{v}$ คือ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

จาก $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}$ และ $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1)(a)+(-1)(b)$$

กำหนดให้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$

จึงได้ $a-b=4$ ....(1)

จาก $|\vec{v}|=\sqrt{a^2+b^2}$

เนื่องจาก $|\vec{v}|=\frac{5}{\sqrt{2}}$

จึงได้ $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

$$a^2+b^2=\frac{25}{2} \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1); $a=b+4$ ....(3)

แทนค่าสมการ (3) ในสมการ (2);

จึงได้ $(b+4)^2+b^2=\frac{25}{2}$

$$2\left(b^2+8b+16+b^2\right)=25$$

$$2b^2+16b+32+2b^2=25$$
$$4b^2+16b+7=0$$
$$(2b+7)(2b+1)=0$$
$$b=-\frac{1}{2},-\frac{7}{2} \text{ แทนค่าในสมการ } (3)$$

จาก $a=b+4$

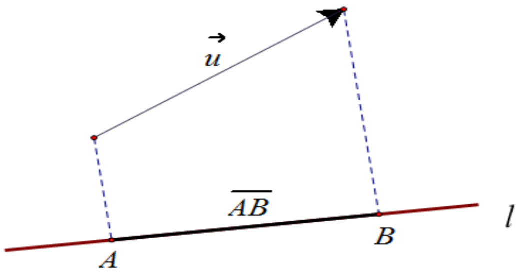
แทนค่า $b=-\frac{1}{2}$; $a=\left(-\frac{1}{2}\right)+4=\frac{7}{2}$

แทนค่า $b=-\frac{7}{2}$; $a=\left(-\frac{7}{2}\right)+4=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\vec{v}=\frac{7}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$ หรือ $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{7}{2}\vec{j}$

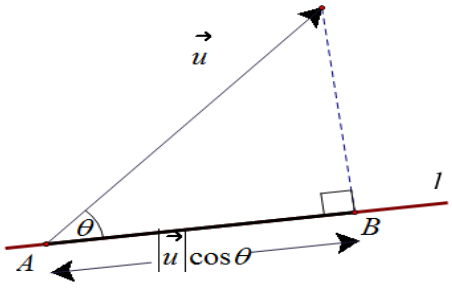
2.4 ภาพฉายของเวกเตอร์

นิยาม 2.4.1 ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์และ l เป็นเส้นตรง ถ้าลากเส้นตรง จากจุดตั้งต้นของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ไปตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด A และจุดปลายของ $\vec{u}$ ไปตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด B เรียกส่วนของเส้นตรง AB ว่าภาพฉายเชิงสเกลาร์ (scalar projection) ของ $\vec{u}$ บนเส้นตรง l ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $scal_l\vec{u}$ ดังภาพที่ 2.4.1



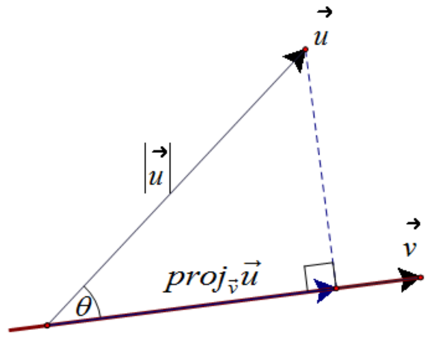
ภาพที่ 2.4.1 ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บนเส้นตรง l

ถ้า เวกเตอร์ $\vec{u}$ ทำมุม θ กับเส้นตรง l จะได้ว่า ระยะ AB เท่ากับ $|\vec{u}|\cos\theta$ แสดงดังภาพที่ 2.4.2



ภาพที่ 2.4.2 ขนาดภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บนเส้นตรง l

นิยาม 2.4.2 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง กำหนดภาพฉายเวกเตอร์ (vector projection) ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ โดยที่ $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(|\vec{u}|\cos\theta\right)\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ดังภาพที่ 2.4.3



ภาพที่ 2.4.3 ภาพฉายของเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

จากนิยาม
$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(|\vec{u}|\cos\theta\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$
$$= \left[|\vec{u}|\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)\right]\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

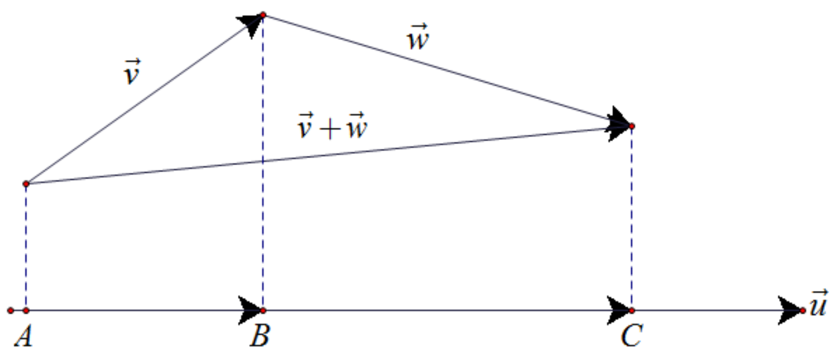
จากภาพที่ 2.4.3 $scal_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

ดังนั้น
$$scal_{\vec{v}}\vec{u} = |\vec{u}|\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

จาก
$$proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(scal_{\vec{v}}\vec{u}\right)\vec{w}$$

เมื่อ $\vec{w} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ เมื่อ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$

จะแสดงการพิสูจน์สมบัติการกระจาย $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ โดยพิจารณาจากภาพฉายของเวกเตอร์ $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ บนเวกเตอร์ $\vec{u}$ ดังนี้



ภาพที่ 2.4.4 การพิสูจน์สมบัติการกระจาย

ให้ $\vec{n}=\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$

ทราบว่า $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ ระยะภาพฉายของ $\vec{v}$ บน $\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{n}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=$ ระยะภาพฉายของ $\vec{w}$ บน $\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{n}$

และ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=$ ระยะภาพฉายของ $\vec{v}+\vec{w}$ บน $\vec{u}=(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{n}$

จาก $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|$ จะได้ $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{n}=\vec{v}\cdot\vec{n}+\vec{w}\cdot\vec{n}$

คูณด้วย $|\vec{u}|$ ได้ $|\vec{u}|\vec{n}=\vec{u}$ จะได้ $(\vec{v}+\vec{w})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{u}$

โดยสมบัติการสลับที่ จะได้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

ตัวอย่าง 2.4.1 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}+5\vec{j}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ จงหาภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ และภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

วิธีทำ จาก
$$scal_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)\cdot\left(-2\vec{i}-3\vec{j}\right)$$
$$=(2)(-2)+(5)(-3)=-19$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$

จึงได้ว่า
$$scal_{\vec{v}}\vec{u}=\frac{-19}{\sqrt{13}}$$

เนื่องจาก ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ คือความยาวจึงไม่สนใจเครื่องหมาย

ดังนั้น ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ บนเส้นตรง $\vec{v}$ คือ $\dfrac{19}{\sqrt{13}}$

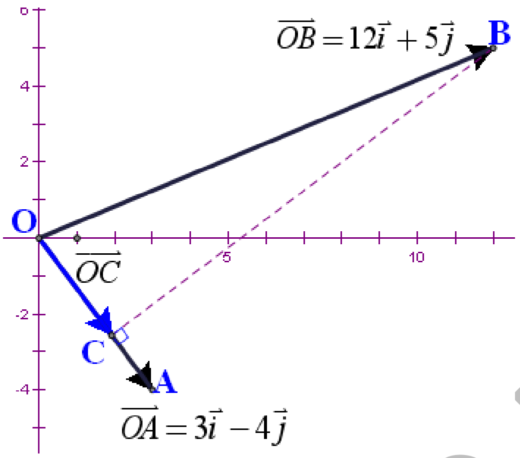
จาก
$$proj_{\vec{v}}\vec{u}=\left(scal_{\vec{v}}\vec{u}\right)\vec{w}$$
$$=\left(-\frac{19}{\sqrt{13}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}\right)$$
$$=\frac{38}{13}\vec{i}+\frac{57}{13}\vec{j}$$

ดังนั้น ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\dfrac{38}{13}\vec{i}+\dfrac{57}{13}\vec{j}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.4.2 กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิดให้ $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ และ $\overrightarrow{OB} = 12\vec{i} + 5\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ลากเส้น $\overline{BC}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$ ที่จุด C จงหา เวกเตอร์ $\overrightarrow{OC}$

วิธีทำ พิจารณาภาพ



จากภาพ พบว่า $\overrightarrow{OC}$ เป็น ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\overrightarrow{OB}$ บน $\overrightarrow{OA}$

$$proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}\right)\frac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \left(3\vec{i} - 4\vec{j}\right)\cdot\left(12\vec{i} + 5\vec{j}\right)$$

$$= (3)(12) + (-4)(5) = 16$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

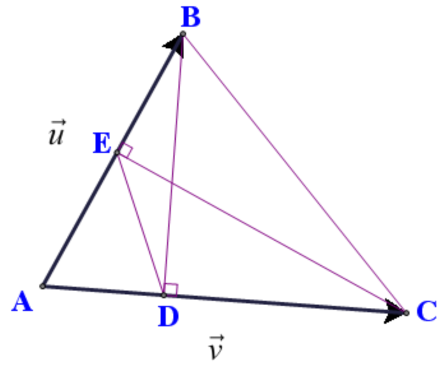
จึงได้
$$proj_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{3\vec{i} - 4\vec{j}}{5}\right)$$

$$= \frac{48}{25}\vec{i} - \frac{64}{25}\vec{j}$$

จึงได้ว่า $\overrightarrow{OC} = \frac{48}{25}\vec{i} - \frac{64}{25}\vec{j}$

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ลาก BD ตั้งฉากกับด้าน AC และ CD ตั้งฉากกับด้าน AB ถ้าให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ตามลำดับ แล้วจงหาเวกเตอร์ $\overrightarrow{DE}$

วิธีทำ พิจารณาภาพ



จากภาพจะพบว่า $\overrightarrow{DE}$ เกิดจากการ $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$

เนื่องจาก เวกเตอร์ $\overrightarrow{AE}$ เป็นภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{v}$ บน $\vec{u}$

และ เวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ เป็นภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

พิจารณา เวกเตอร์ $\overrightarrow{AE} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$

$$= \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) = \vec{v}\cdot\vec{u}\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)$$

เวกเตอร์ $\overrightarrow{AD} = proj_{\vec{v}}\vec{u}$

$$= \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \vec{v}\cdot\vec{u}\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)$$

จึงได้ว่า $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$

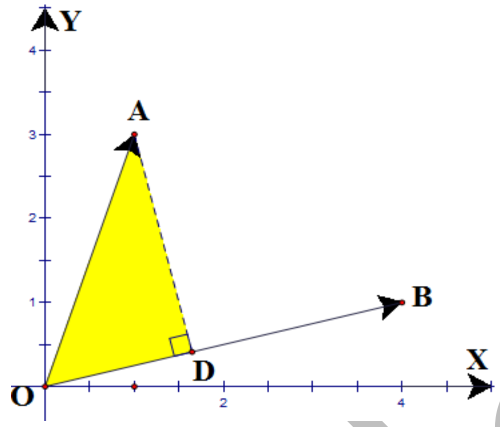
$$= \vec{v}\cdot\vec{u}\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right) - \vec{v}\cdot\vec{u}\left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)$$

$$= (\vec{u}\cdot\vec{v})\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)$$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\overrightarrow{DE}$ คือ $(\vec{u}\cdot\vec{v})\left(\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)$

ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ จุด O เป็นจุดกำเนิด $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{j}$ และ $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด D จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม OAD

วิธีทำ พิจารณาภาพ



จากรูปสามเหลี่ยม OAD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้าน AD เป็นส่วนสูง และมีความยาวด้าน OD เป็นฐาน

ซึ่ง
$$\left|\overrightarrow{OD}\right| = scal_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}$$
$$= \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot\left(4\vec{i}+\vec{j}\right)}{\sqrt{(4)^2+(1)^2}}$$
$$= \frac{(1)(4)+(3)(1)}{\sqrt{16+1}} = \frac{7}{\sqrt{17}}$$

จึงได้ความยาวฐาน คือ $\frac{7}{\sqrt{17}}$

$$\overrightarrow{OD} = proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(scal_{\overrightarrow{OB}}\overrightarrow{OA}\right)\frac{\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OB}\right|}$$
$$= \left(\frac{7}{\sqrt{17}}\right)\left(\frac{4\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{(17)}}\right)$$
$$= \frac{28}{17}\vec{i} + \frac{7}{17}\vec{j}$$

จึงได้ จุด D คือ $\left(\frac{28}{17},\frac{7}{17}\right)$

ส่วนสูง $|AD|$ คือระยะทางจากจุด A ถึงจุด D

จึงได้
$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{\left(\frac{28}{17}-1\right)^2+\left(\frac{7}{17}-3\right)^2} = \frac{11}{\sqrt{17}}$$

จึงได้ ความสูง คือ $\frac{11}{\sqrt{17}}$

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } OAD = \frac{1}{2}\times\left|\overline{AD}\right|\times\left|\overline{OD}\right|$$

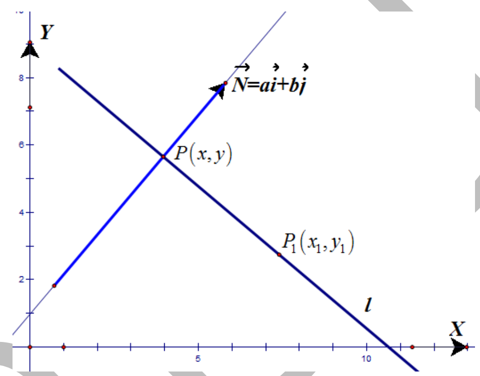
$$= \frac{1}{2}\times\frac{7}{\sqrt{17}}\times\frac{11}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{77}{34} = 2.26$$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม OAD คือ 2.26 ตารางหน่วย

2.5 การประยุกต์ของเวกเตอร์ในระนาบ

ทฤษฎีบท 2.5.1 ให้ l เป็นเส้นตรงในระนาบ ซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ที่จุด $P(x, y)$ จะได้ว่าสมการเส้นตรง l สามารถหาได้จากความสัมพันธ์คือ $\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P} = 0$ และสมการเส้นตรง คือ $ax + by + c = 0$ เมื่อ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ ดังภาพที่ 2.5.1



ภาพที่ 2.5.1 เส้นตรง l

พิสูจน์ ให้เส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นตั้งฉากกับเส้นตรง l ที่จุด $P(x, y)$ ดังภาพที่ 2.5.1 เวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P}$ คือ $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$

จาก $\overrightarrow{P_1P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ดังนั้น $\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P} = 0$

$$\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)\cdot\left[(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}\right] = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

$$ax - ax_1 + by - by_1 = 0$$

$$ax + by + c = 0 \quad \text{เมื่อ } c = (-ax_1 - by_1)$$

ดังนั้น สมการเส้นตรง l คือ $ax + by + c = 0$ เมื่อ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(5,-2)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}=2\vec{i}-3\vec{j}$

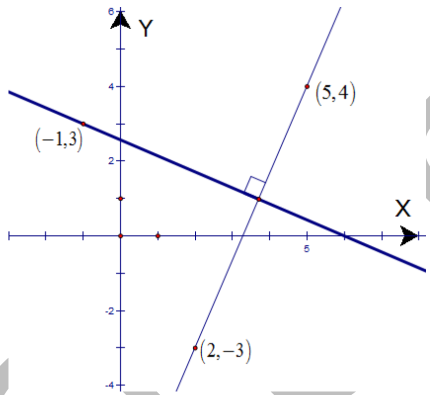
วิธีทำ ให้เส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(5,-2)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ที่จุด $P(x,y)$
พิจารณา $\overrightarrow{P_1P}=(x-5)\vec{i}+(y+2)\vec{j}$ จึงได้ว่า $\overrightarrow{P_1P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}=2\vec{i}-3\vec{j}$

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P}=0$$
$$\left(2\vec{i}-3\vec{j}\right)\cdot\left((x-5)\vec{i}+(y+2)\vec{j}\right)=0$$
$$2(x-5)+(-3)(y+2)=0$$
$$2x-10-3y-6=0$$
$$2x-3y-16=0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $2x-3y-16=0$

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,-3)$ และ $(5,4)$

วิธีทำ พิจารณาภาพ



ให้ l_1 แทนเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(-1,3)$ และ l_2 แทนเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,-3)$ และ $(5,4)$
ให้ l_1 ตั้งฉากกับ l_2 ที่จุด $P(x,y)$
ให้เวกเตอร์ $\vec{N}$ ผ่านจุด $(2,-3)$ และจุด $(5,4)$

$$\vec{N}=(5-2)\vec{i}+\left(4-(-3)\right)\vec{j}=3\vec{i}+7\vec{j}$$

พิจารณา $$\overrightarrow{P_1P}=(x+1)\vec{i}+(y-3)\vec{j}$$

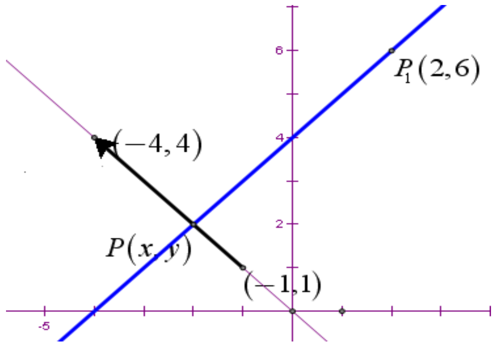
เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P}$

$$\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P}=0$$
$$3(x+1)+7(y-3)=0$$
$$3x+3+7y-21=0$$
$$3x+7y-18=0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $3x+7y-18=0$

ตัวอย่าง 2.5.3 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,6)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4,4)$ และ $(-1,1)$

วิธีทำ พิจารณาภาพ



ให้ l_1 แทนเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(2,6)$ และ l_2 แทนเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4,4)$ และ $(-1,1)$

ให้ l_1 ตั้งฉากกับ l_2 ที่จุด $P(x,y)$

ให้เวกเตอร์ $\vec{N}$ ผ่านจุด $(-4,4)$ และ $(-1,1)$

$$\vec{N} = [(-1)-(-4)]\vec{i} + (1-4)\vec{j} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$$

พิจารณาเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P} = (x-2)\vec{i} + (y-6)\vec{j}$

เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_1P}$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0$$

$$3(x-2) - 3(y-6) = 0$$

$$3x - 6 - 3y + 18 = 0$$

$$3x - 3y + 12 = 0$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงคือ $3x - 3y + 12 = 0$

ทฤษฎีบท 2.5.2 เวกเตอร์ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ จะตั้งฉากกับเส้นตรง $ax + by + c = 0$ เมื่อ $a,b \neq 0$

พิสูจน์ ให้ $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ สำหรับ $a,b \neq 0$ และ $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ เป็นสองจุดต่างกันบนเส้นตรง $ax + by + c = 0$

จึงได้ว่า $ax_1 + by_1 + c = 0$ ....(1)

และ $ax_2 + by_2 + c = 0$ ....(2)

นำสมการ (2) − สมการ (1); $(ax_2 + by_2 + c) - (ax_1 + by_1 + c) = 0$

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

$$(a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}\right] = 0$$

นั่นคือ $\vec{N} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$ เนื่องจาก $\vec{N} \neq 0$ และ $\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$

นั่นคือ เวกเตอร์ $\vec{N}$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $ax + by + c = 0$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.5.4 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ เส้นตรง $2x-3y+5=0$

วิธีทำ จากเส้นตรง $2x-3y+5=0$
โดยทฤษฎีบทเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $2x-3y+5=0$
คือ $\vec{N}=2\vec{i}-3\vec{j}$

ตัวอย่าง 2.5.4 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x+y=0$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x+y=0$ คือ $\vec{N}=2\vec{i}+\vec{j}$

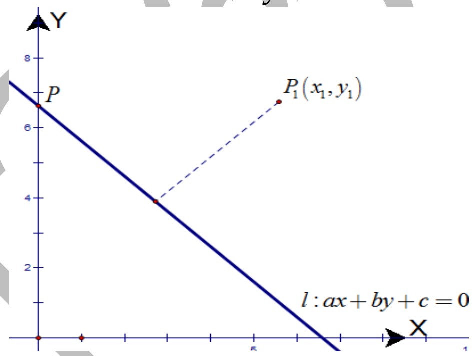
$$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{(2)^2+1}=\sqrt{5}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x+y=0$ คือ $\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$

ระยะทางตั้งฉากจากจุดไปยังเส้นตรง

ทฤษฎีบท 2.5.2 ให้ $P_1(x_1,y_1)$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ และสำหรับเส้นตรง $l:ax+by+c=0$ ระยะตั้งฉากจากจุด P_1 ไปยังเส้นตรง l ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย d กำหนดโดย $d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|$ เมื่อ P เป็นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง l เมื่อ P เป็นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง l

พิสูจน์ กำหนด จุด $P_1(x_1,y_1)$ และเส้นตรง $l:ax+by+c=0$ ดังภาพที่ 2.5.2



ภาพที่ 2.5.2 ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1)$ไปยังเส้นตรง l

จากเส้นตรง $l:ax+by+c=0$
หาจุดตัดแกน Y ให้ $x=0$
จึงได้

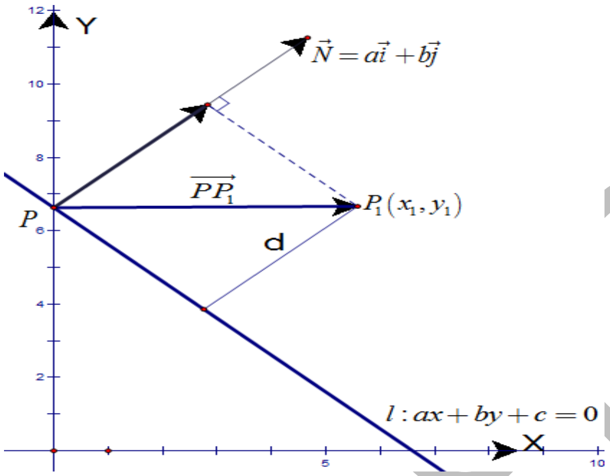
$$a(0)+by+c=0$$
$$by=-c$$
$$y=-\frac{c}{b}$$

จุดตัดแกน Y คือ $P\left(0,-\frac{c}{b}\right)$

พิจารณาเวกเตอร์ $\overrightarrow{PP_1}$ เมื่อ $P\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ และ $P_1(x_1,y_1)$

จึงได้ $\overrightarrow{PP_1}=(x-0)\vec{i}+\left(y-\left(-\frac{c}{b}\right)\right)\vec{j}=x\vec{i}+\left(y+\frac{c}{b}\right)\vec{j}$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $l: ax+by+c=0$ คือ $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}$ ดังภาพที่ 2.5.3



ภาพที่ 2.5.3 การพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5.2

จากภาพที่ 2.5.3 พบว่า $d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|$

ดังนั้น ระยะทางตั้งฉากจากจุด $P(x_1,y_1)$ ถึงเส้นตรง $l: ax+by+c=0$ คือ $d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|$

พิจารณา
$$d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PP_1}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\right|$$
$$=\frac{\left|\left(x_1\vec{i}+\left(y_1+\frac{c}{b}\right)\vec{j}\right)\cdot\left(a\vec{i}+b\vec{j}\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{\left|ax_1+b\left(y_1+\frac{c}{b}\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{\left|ax_1+by_1+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ดังนั้น ระยะทางตั้งฉากจากจุด $P(x_1,y_1)$ ถึงเส้นตรง $ax+by+c=0$ คือ $\frac{\left|a(x_1)+b(y_1)+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

ตัวอย่าง 2.5.5 จงหาระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $2x+5y-10=0$

วิธีทำ $2x+5y-10=0$

$$5y=-2x+10$$

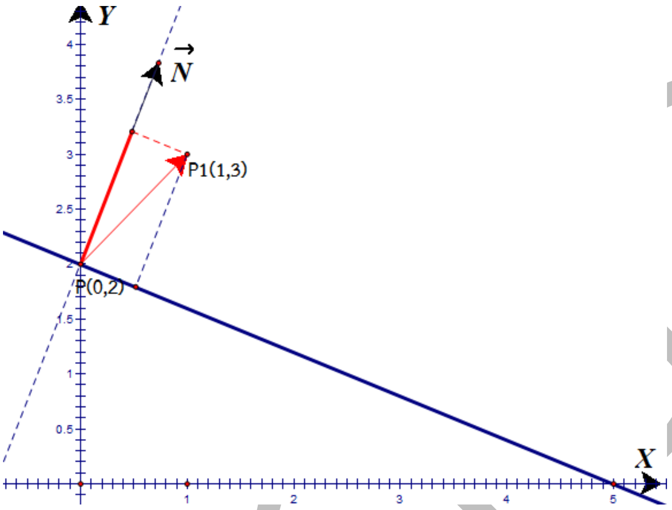
$$y=-\frac{2}{5}x+2$$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x=0$ ได้ค่า $y=2$ จุดตัดแกน Y คือ $(0,2)$

หาจุดตัดแกน X ให้ $x=5$ ได้ค่า $y=0$ จุดตัดแกน X คือ $(5,0)$

หาเวกเตอร์ $\overrightarrow{PP_1}$ โดยที่ จุด $P(0,2)$ และจุด $P_1(1,3)$

พิจารณาภาพ



$$\overrightarrow{PP_1}=(1-0)\vec{i}+(3-2)\vec{j}=\vec{i}+\vec{j}$$

$$d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|$$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{PP_1}\cdot\vec{N}\right|}{\left|\vec{N}\right|}$$

$$=\frac{\left|(\vec{i}+\vec{j})(2\vec{i}+5\vec{j})\right|}{\sqrt{4+25}}$$

$$=\frac{\left|(2\times1)+(5\times1)\right|}{\sqrt{29}}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $(1,3)$ ไปยังเส้นตรง $2x+5y-10=0$ คือ $\frac{7}{\sqrt{29}}$ หน่วย

ตัวอย่าง 2.5.6 จงหาระยะทางจากจุด $(3,-1)$ ไปยังเส้นตรง $l: x-3y-15=0$

วิธีทำ จาก $l: x-3y-15=0$

หาจุดตัดแกน Y ให้ $x=0$; $(0)-3y-15=0$

$$\begin{aligned} 3y &= -15 \\ y &= -5 \end{aligned}$$

จุดตัดแกน Y คือ $P(0,-5)$

ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $l: x-3y-15=0$

จึงได้ $\vec{N}=\vec{i}-3\vec{j}$

พิจารณาเวกเตอร์ $\overrightarrow{PP_1}$ เมื่อ $P_1(3,-1)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_1} &= (3-0)\vec{i}+(-1+5)\vec{j} \\ &= 3\vec{i}+4\vec{j} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_1}\cdot\vec{N} &= \left(3\vec{i}+4\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i}-3\vec{j}\right) \\ &= (3)(1)+(4)(-3) \\ &= -9 \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \left|\vec{N}\right| &= \left|\vec{i}-3\vec{j}\right| \\ &= \sqrt{(1)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned} d &= \left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right| \\ &= \left|\frac{\overrightarrow{PP_1}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\right| \\ &= \left|\frac{-9}{\sqrt{10}}\right| \\ &= \frac{9}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

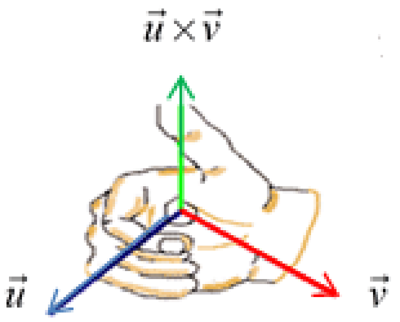
ดังนั้น ระยะทางตั้งฉากจากจุด $(3,-1)$ ไปยังเส้นตรง $l: x-3y-15=0$ คือ $\frac{9}{\sqrt{10}}$ หน่วย

ตัวอย่าง

2.6 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งทำมุม θ กันอยู่ในระนาบและจากกฎมือขวา เมื่อกวาดมือขวาจาก $\vec{u}$ ไป $\vec{v}$ จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{n}$ ที่มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบและชี้ไปในทางนิ้วหัวแม่มือ ซึ่งจะนิยามผลคูณเชิงเวกเตอร์ดังนี้

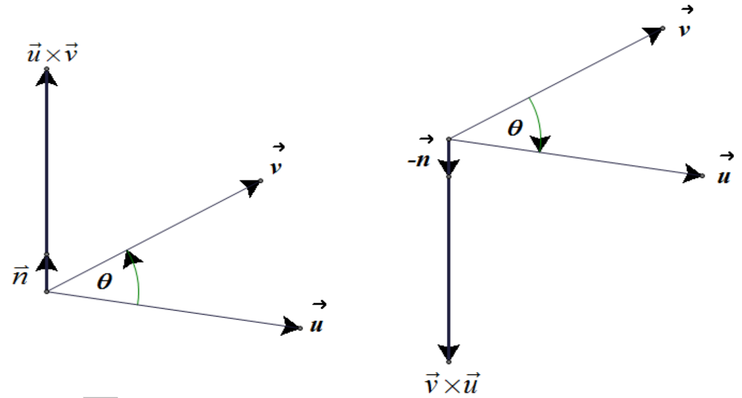
นิยาม 2.6.1 ในปริภูมิสามมิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product) ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}\times\vec{v}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ สอดคล้องตาม กฎมือขวา ดังภาพที่ 2.6.1



ภาพที่ 2.6.1 กฎมือขวา

และขนาดของ $\vec{u}\times\vec{v}$ คือ $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ซึ่ง $0\le\theta\le\pi$ กล่าว คือ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$

เมื่อ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งได้ฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{n}$ อยู่ในกฎมือขวาดังภาพที่ 2.6.2



ภาพที่ 2.6.2 $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$

จากนิยาม เวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ผลคูณไขว้ (cross product) ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เพราะอยู่ในรูปของผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$

ตัวอย่าง 2.6.1 ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ซึ่งไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จงพิจารณาผลคูณเชิงเวกเตอร์ระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{u}$

วิธีทำ พิจารณา $\vec{u}\times\vec{u}$ มุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ คือ 0

จากนิยาม จึงได้

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{u} &= \vec{n}|\vec{u}||\vec{u}|\sin(0)\\ &= \vec{n}|\vec{u}||\vec{u}|0\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเชิงเวกเตอร์ระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{u}$ คือ $\vec{0}$

ตัวอย่าง 2.6.2 จงพิจารณาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐานในปริภูมิสามมิติ

วิธีทำ พิจารณา $\vec{i}\times\vec{i}$ เนื่องจาก มุมระหว่าง $\vec{i}$ กับ $\vec{i}$ คือ 0

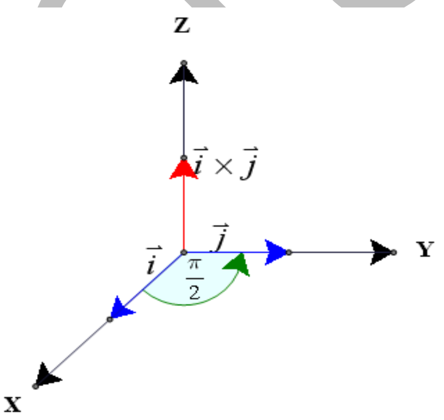
จากตัวอย่าง 2.6.2 จึงได้ว่า $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$

ในทำนองเดียวกัน $\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ และ $\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

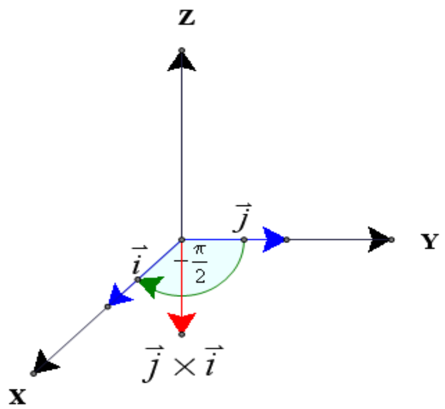
พิจารณา $\vec{i}\times\vec{j}$ จากภาพที่ 2.6.3 มุมระหว่าง $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ คือ $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{j} &= \vec{n}|\vec{i}||\vec{j}|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(1)\\ &= \vec{n}\end{aligned}$$

แต่เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{i}$ กับ $\vec{j}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $\vec{k}$ จึงได้ว่า $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ดังภาพที่ 2.6.3



ภาพที่ 2.6.3 $\vec{i}\times\vec{j}$



ภาพที่ 2.6.4 $\vec{j}\times\vec{i}$

ตัวอย่าง

พิจารณา $\vec{j}\times\vec{i}$ จากภาพที่ 2.6.4 มุมระหว่าง $\vec{j}$ กับ $\vec{i}$ คือ $-\dfrac{\pi}{2}$

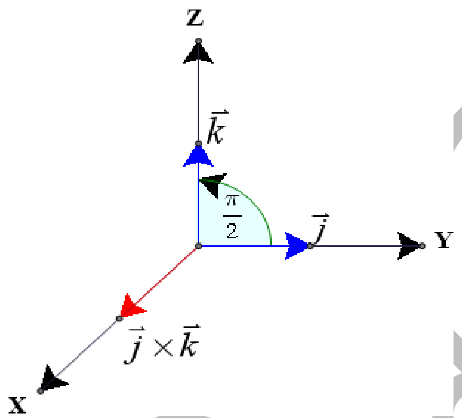
$$\begin{aligned}\vec{j}\times\vec{i} &= \vec{n}\left|\vec{j}\right|\left|\vec{i}\right|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(-1)\\ &= -\vec{n}\end{aligned}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{j}$ กับ $\vec{i}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $-\vec{k}$ จึงได้ว่า $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ ดังภาพ 2.6.4

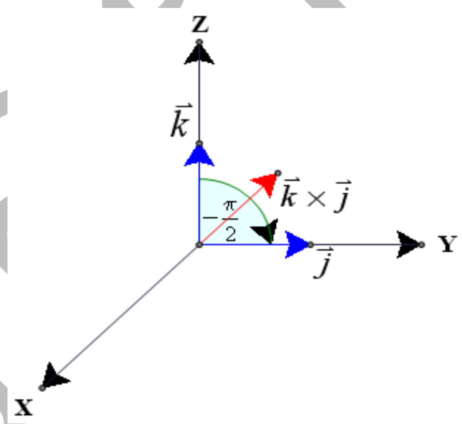
พิจารณา $\vec{j}\times\vec{k}$ จากภาพที่ 2.6.5 มุมระหว่าง $\vec{j}$ กับ $\vec{k}$ คือ $\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{j}\times\vec{k} &= \vec{n}\left|\vec{j}\right|\left|\vec{k}\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(1)\\ &= \vec{n}\end{aligned}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{j}$ กับ $\vec{k}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $\vec{i}$ จึงได้ว่า $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ ดังภาพที่ 2.6.5



ภาพที่ 2.6.5 $\vec{j}\times\vec{k}$



ภาพที่ 2.6.6 $\vec{k}\times\vec{j}$

พิจารณา $\vec{k}\times\vec{j}$ จากภาพที่ 2.6.6 มุมระหว่าง $\vec{k}$ กับ $\vec{j}$ คือ $-\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{k}\times\vec{j} &= \vec{n}\left|\vec{k}\right|\left|\vec{j}\right|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(-1)\\ &= -\vec{n}\end{aligned}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{k}$ กับ $\vec{j}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $-\vec{i}$ จึงได้ว่า $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ ดังภาพที่ 2.6.6

พิจารณา $\vec{k}\times\vec{i}$ จากภาพที่ 2.6.7 มุมระหว่าง $\vec{k}$ กับ $\vec{i}$ คือ $\frac{\pi}{2}$

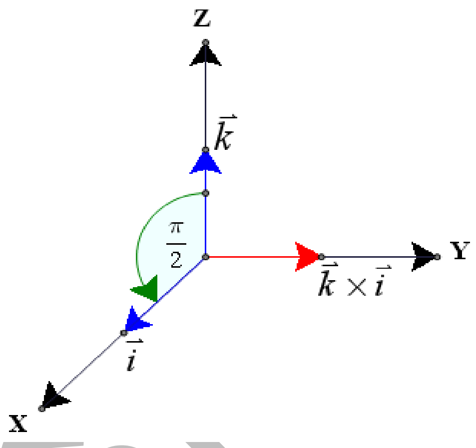
$$\begin{aligned}\vec{k}\times\vec{i} &= \vec{n}\left|\vec{k}\right|\left|\vec{i}\right|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(1)\\ &= \vec{n}\end{aligned}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{k}$ กับ $\vec{i}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $\vec{j}$ จึงได้ว่า $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ ดังภาพที่ 2.6.7

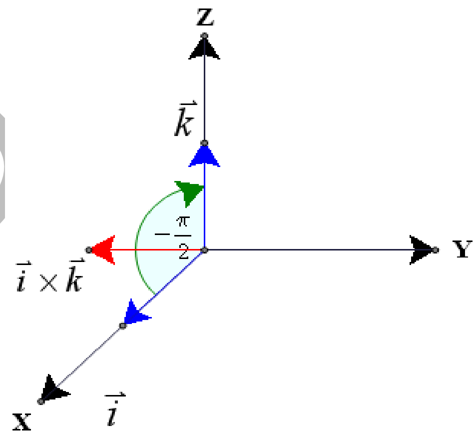
พิจารณา $\vec{i}\times\vec{k}$ จากภาพที่ 2.6.8 มุมระหว่าง $\vec{i}$ กับ $\vec{k}$ คือ $-\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{k} &= \vec{n}\left|\vec{i}\right|\left|\vec{k}\right|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \vec{n}(1)(1)(-1)\\ &= -\vec{n}\end{aligned}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{i}$ กับ $\vec{k}$ และอยู่ในกฎมือขวา คือ $-\vec{j}$ จึงได้ว่า $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ ดังภาพที่ 2.6.8



ภาพที่ 2.6.7 $\vec{k}\times\vec{i}$



ภาพที่ 2.6.8 $\vec{i}\times\vec{k}$

ดังนั้น ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ปกติมาตรฐานสรุปได้ดังนี้

$$\begin{array}{lll}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\end{array}$$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ r,s เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ $\vec{u}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$
2. $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
3. $(r\vec{u})\times(s\vec{v})=(rs)(\vec{u}\times\vec{v})$
4. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$
5. $\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$

พิสูจน์ 1. สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

$\Rightarrow$ ให้ $\quad \vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

จากนิยาม $\quad \vec{n}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=\vec{0}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

เนื่องจาก $|\vec{u}|\neq 0, |\vec{v}|\neq 0$ และ $\vec{n}\neq\vec{0}$

จึงได้ว่า $\quad \sin\theta=0$ เมื่อ $0\leq\theta\leq\pi$

นั่นคือ $\theta=0$ หรือ π

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน

$\Leftarrow$ ให้ เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน

จึงได้ว่า มีจำนวนจริง m ซึ่งทำให้ $\vec{u}=m\vec{v}$

ทำให้มุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ คือ 0 หรือ π

นั่นคือ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}|\vec{u}||\vec{v}|\sin(0)=\vec{0}$

จึงได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน

2. แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $\vec{u}=\vec{0}$ หรือ $\vec{v}=\vec{0}$

จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{0}$

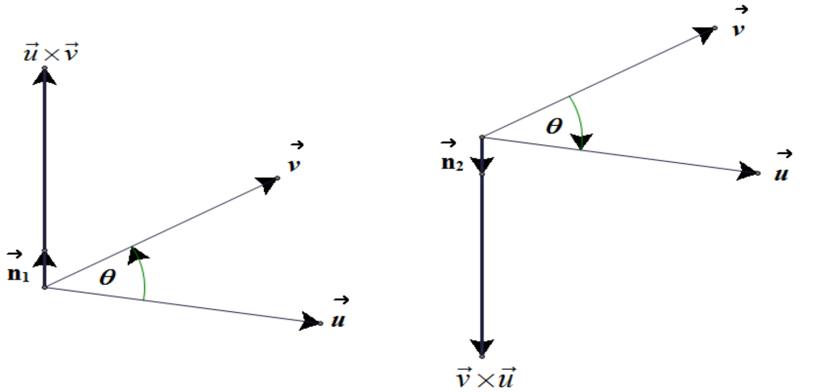
ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

กรณีที่ 2 ถ้า $\vec{u}\neq\vec{0}$ และ $\vec{v}\neq\vec{0}$

พิจารณา $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}_1|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ โดยที่ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{n}_1$ สอดคล้องกฎมือขวา

และ $\quad \vec{v}\times\vec{u}=\vec{n}_2|\vec{v}||\vec{u}|\sin\theta$ โดยที่ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{n}_2$ สอดคล้องกฎมือขวาดังภาพที่ 2.6.9

ตัวอย่าง



ภาพที่ 2.6.9 ทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ และทิศทางของ $\vec{v}\times\vec{u}$

จากภาพที่ 2.6.9 พบว่า $\vec{n}_1=-\vec{n}_2$
ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

3. สำหรับ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
จากนิยาม

$$\begin{aligned}(r\vec{u})\times(s\vec{v}) &= \vec{n}|r\vec{u}||s\vec{v}|\sin\theta\\ &= \vec{n}|r||\vec{u}||s||\vec{v}|\sin\theta\\ &= (rs)(\vec{n}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)\\ &= (rs)(\vec{u}\times\vec{v})\end{aligned}$$

ดังนั้น $(r\vec{u})\times(s\vec{v})=(rs)(\vec{u}\times\vec{v})$

4. สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ให้ $\vec{b}=\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{w})$
และสำหรับ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์
พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot[\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{w})]\\ &= \vec{a}\cdot[\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})]-\vec{a}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})-\vec{a}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\\ &= (\vec{a}\times\vec{u})\cdot(\vec{v}+\vec{w})-(\vec{a}\times\vec{u})\cdot\vec{v}-(\vec{a}\times\vec{u})\cdot\vec{w}\\ &= (\vec{a}\times\vec{u})\cdot[(\vec{v}+\vec{w})-\vec{v}-\vec{w}]\\ &= 0\end{aligned}$$

แสดงว่า $\vec{b}=\vec{0}$ หรือ $\vec{a}$ ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ ซึ่งเลือกเวกเตอร์ $\vec{a}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{b}$ จะได้ $\vec{b}=\vec{0}$
นั่นคือ $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})-(\vec{u}\times\vec{v})-(\vec{u}\times\vec{w})=0$
ดังนั้น $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$
ในการพิสูจน์ $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$ ใช้การพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

5. สำหรับ เวกเตอร์ $\vec{u}$ ใด ๆ

พิจารณา

$$\begin{aligned}\vec{0}\times\vec{u} &= \vec{n}|\vec{0}||\vec{u}|\sin\theta\\ &= \vec{n}(0)|\vec{u}|\sin\theta\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ $\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$

2.7 ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ แล้ว

ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\vec{u}\times\vec{v} &= \left(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}\right)\times\left(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}\right)\\
&= a_1\vec{i}\times\left(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}\right)+b_1\vec{j}\times\left(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}\right)+c_1\vec{k}\times\left(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}\right)\\
&= \left(a_1\vec{i}\times a_2\vec{i}\right)+\left(a_1\vec{i}\times b_2\vec{j}\right)+\left(a_1\vec{i}\times c_2\vec{k}\right)+\left(b_1\vec{j}\times a_2\vec{i}\right)+\left(b_1\vec{j}\times b_2\vec{j}\right)+\left(b_1\vec{j}\times c_2\vec{k}\right)+\\
&\quad \left(c_1\vec{k}\times a_2\vec{i}\right)+\left(c_1\vec{k}\times b_2\vec{j}\right)+\left(c_1\vec{k}\times c_2\vec{k}\right)\\
&= a_1a_2\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+(a_1b_2)\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+(a_1c_2)\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+(b_1a_2)\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+(b_1b_2)\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+\\
&\quad (b_1c_2)\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+(c_1a_2)\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+(c_1b_2)\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+(c_1c_2)\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)\\
&= (a_1b_2)\left(\vec{k}\right)+(a_1c_2)\left(-\vec{j}\right)+(a_2b_1)\left(-\vec{k}\right)+(b_1c_2)\left(\vec{i}\right)+(a_2c_1)\left(\vec{j}\right)+(b_2c_1)\left(-\vec{i}\right)\\
&= (b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}-(a_1c_2-a_2c_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}\\
&= \begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\\
&= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 2.7.1 ให้ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\times\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left[2-(-1)\right]\vec{i}-(1-1)\vec{j}+\left[1-(-2)\right]\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+3\vec{k}$$

จึงได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{k}$

ตัวอย่าง 2.7.2 จงหา $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ เมื่อ กำหนดจุด $A(3,5,2)$ จุด $B(1,-1,6)$ และจุด $C(-2,1,4)$

วิธีทำ

$$\overrightarrow{AB}=(1-3)\vec{i}+(-1-5)\vec{j}+(6-2)\vec{k}=-2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2-3)\vec{i}+(1-5)\vec{j}+(4-2)\vec{k}=-5\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -6 & 4\\ -5 & -4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-6 & 4\\ -4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & -6\\ -5 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left[-12-(-16)\right]\vec{i}-\left[-4-(-20)\right]\vec{j}+(8-30)\vec{k}$$

$$=4\vec{i}-16\vec{j}-22\vec{k}$$

จึงได้ว่า $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ คือ $4\vec{i}-16\vec{j}-22\vec{k}$

ตัวอย่าง 2.7.3 ให้ $\vec{u}=-3\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=-4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$

พิจารณา

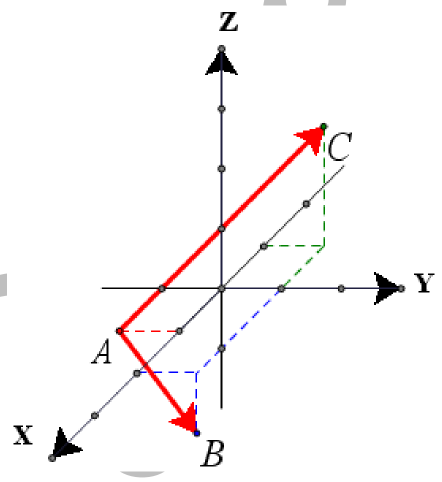
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 6 & 2\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(6-6)\vec{i}-[-3-(-8)]\vec{j}+[-9-(-24)]\vec{k}$$
$$=-5\vec{j}+15\vec{k}$$
$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-5)^2+(15)^2}$$
$$=\sqrt{25+225}$$
$$=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$$
$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{-5\vec{j}+15\vec{k}}{5\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ คือ $-\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{k}$

ตัวอย่าง 2.7.4 ให้จุด $A(1,-,1,0)$ จุด $B(2,1,-1)$ และจุด $C(-1,1,2)$ เป็นจุดใน 3 มิติ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด A,B และ C และมีความยาวเท่ากับ 5 หน่วย

วิธีทำ พิจารณาภาพ



$$\overrightarrow{AB}=(2-1)\vec{i}+(1-(-1))\vec{j}+(-1-0)\vec{k}$$
$$=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1-1)\vec{i}+(1-(-1))\vec{j}+(2-0)\vec{k}$$
$$=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

พิจารณา
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (4+2)\vec{i} + (2-2)\vec{j} + (2+4)\vec{k}$$
$$= 6\vec{i} + 6\vec{k}$$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากและยาว 5 หน่วย
$$= \pm 5\left(\frac{6\vec{i}+6\vec{k}}{\sqrt{(6)^2+(6)^2}}\right)$$
$$= \pm 5\left(\frac{6\vec{i}+6\vec{k}}{\sqrt{72}}\right)$$
$$= \pm 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)$$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่มีความยาวเท่ากับ 5 หน่วย คือ $\pm\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{k}\right)$

ตัวอย่าง 2.7.5 ให้ $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 9\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ พิจารณาว่า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ หรือไม่

วิธีทำ
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= (-6+6)\vec{i} - (-18+18)\vec{j} + (9-9)\vec{k}$$
$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

ดังนั้น $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$

ตัวอย่าง 2.7.6 ให้ $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{i} + a\vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{v} = -4\vec{i} - 9\vec{j} + \frac{8}{3}\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ โดย $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ จงหา a

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ จึงได้ $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$

พิจารณา
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3}{2} & a & -1 \\ -4 & -9 & \frac{8}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -1 \\ -9 & \frac{8}{3} \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -4 & \frac{8}{3} \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & a \\ -4 & -9 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left(\frac{8}{3}a - 9\right)\vec{i} - (4-4)\,\vec{j} + \left(-\frac{27}{2} + 4a\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{8a-27}{3}\right)\vec{i} + \left(\frac{8a-27}{2}\right)\vec{k}$$

เนื่องจาก $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$

$$\left(\frac{8a-27}{3}\right)\vec{i} + \left(\frac{8a-27}{2}\right)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

จึงได้ $\dfrac{8a-27}{3} = 0$

$$8a = 27$$

ดังนั้น $a = \dfrac{27}{8}$

ตัวอย่าง 2.7.7 ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงแสดงว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}\times\vec{v}$

วิธีทำ โดยพิจารณา $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$ หรือไม่

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (1-3)\vec{i} - [2-(-4)]\,\vec{j} + [6-(-4)]\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$$

พิจารณา $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = \left(-2\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$

$$= (-2)(2) + (-6)(1) + (10)(1)$$

$$= -4 - 6 + 10$$

$$= 0$$

เนื่องจากทฤษฎีบท $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = 0$

ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}\times\vec{v}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.7.8 ให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 2a\vec{i} - 3b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ถ้า $|\vec{u}| = 3$ และ $\cos\theta = \frac{1}{3}$ แล้ว $\vec{u} \times \vec{v}$

วิธีทำ พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 2 \\ 2a & -3b & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b & 2 \\ -3b & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -3b \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= [0 - (-6b)]\vec{i} - (0 - 4a)\vec{j} + (-3ab - 2ab)\vec{k} \\
&= 6b\vec{i} + 4a\vec{j} - 5ab\vec{k} \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}\right) \cdot \left(2a\vec{i} - 3b\vec{j}\right) \\
&= (a)(2a) + (b)(-3b) + (2)(0) \\
&= 2a^2 - 3b^2 \\
|\vec{v}| &= \left|2a\vec{i} - 3b\vec{j}\right| \\
&= \sqrt{(2a)^2 + (-3b)^2} \\
&= \sqrt{4a^2 + 9b^2}
\end{aligned}
$$

จาก

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\
\frac{1}{3} &= \frac{2a^2 - 3b^2}{(3)\left(\sqrt{4a^2 + 9b^2}\right)} \\
\sqrt{4a^2 + 9b^2} &= 2a^2 - 3b^2 \\
4a^2 + 9b^2 &= \left(2a^2 - 3b^2\right)^2 \\
4a^2 + 9b^2 &= 4a^4 - 12a^2b^2 + 9b^4
\end{aligned}
$$

$$4a^4 - 12a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2 - 9b^2 = 0 \qquad \text{...........}(1)$$

จาก

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \left|a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}\right| \\
3 &= \sqrt{a^2 + b^2 + 4} \\
a^2 + b^2 + 4 &= 9 \\
a^2 + b^2 &= 9 - 4 = 5 \\
a^2 &= 5 - b^2 \qquad \text{...........}(2)
\end{aligned}
$$

แทนค่าสมการ (2) ในสมการ (1)

$$4\left(5-b^2\right)^2-12b^2\left(5-b^2\right)+9b^4-4\left(5-b^2\right)-9b^2=0$$
$$4\left(25-10b^2+b^4\right)-60b^2+12b^4+9b^4-20+4b^2-9b^2=0$$
$$100-40b^2+4b^4-60b^2+12b^4+9b^4-20+4b^2-9b^2=0$$
$$\left(4b^4+12b^4+9b^4\right)+\left(4b^2-9b^2-40b^2-60b^2\right)+\left(100-20\right)=0$$
$$25b^4-105b^2+80=0$$
$$5b^4-21b^2+16=0$$
$$\left(5b^2-16\right)\left(b^2-1\right)=0$$

$5b^2-16=0$ หรือ $b^2-1=0$

$b^2=\dfrac{16}{5}$ หรือ $b^2=1$

$b=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ หรือ $b=\pm 1$

จากโจทย์กำหนดให้ b เป็นจำนวนเต็มบวก

จึงได้ว่า $b=1$ แทนค่าในสมการ (2)

จาก สมการ(2); $a^2=5-b^2$

แทนค่า $b=1$ $a^2=5-(1)^2$

$$=5-1=4$$
$$a=\pm 2$$

จากโจทย์กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก

จึงได้ $a=2$

จาก $\vec{u}\times\vec{v}=6b\vec{i}+4a\vec{j}-5ab\vec{k}$

แทนค่า $a=2,b=1$ จึงได้ $\vec{u}\times\vec{v}=6(1)\vec{i}+4(2)\vec{j}-5(2)(1)\vec{k}$

$$=6\vec{i}+8\vec{j}-10\vec{k}$$

ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v}=6\vec{i}+8\vec{j}-10\vec{k}$

ตัวอย่าง 2.7.9 ให้ $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ โดยที่ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ และ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-50$ จงหา $\vec{v}$

วิธีทำ ให้ $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

พิจารณา
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & -5\\ a & b & c\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}4 & -5\\ b & c\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -5\\ a & c\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & 4\\ a & b\end{vmatrix}\vec{k}$$

ตัวอย่าง

$$= \left[4c - (-5b)\right]\vec{i} - \left[3c - (-5a)\right]\vec{j} + (3b - 4a)\vec{k}$$
$$= (4c + 5b)\vec{i} - (3c + 5a)\vec{j} + (3b - 4a)\vec{k}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนด $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

$$(4c + 5b)\vec{i} - (3c + 5a)\vec{j} + (3b - 4a)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$4c + 5b = 0 \quad \text{............}(1)$$
$$-3c - 5a = 0 \quad \text{............}(2)$$
$$3b - 4a = 0 \quad \text{............}(3)$$

จากสมการ (1); $4c + 5b = 0$

$$5b = -4c$$
$$b = -\frac{4}{5}c$$

จากสมการ (2); $-3c - 5a = 0$

$$-5a = 3c$$
$$a = -\frac{3}{5}c$$

แทนค่า $a = -\frac{3}{5}c$ และ $b = -\frac{4}{5}c$ ในเวกเตอร์ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

จึงได้ว่า $\vec{v} = \left(-\frac{3c}{5}\right)\vec{i} + \left(-\frac{4c}{5}\right)\vec{j} + c\vec{k}$

จาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = -50$

พิจารณา $\vec{u} \cdot \vec{v} = -50$

$$3\left(-\frac{3c}{5}\right) + 4\left(-\frac{4c}{5}\right) + (-5)c = -50$$
$$-\frac{9c}{5} - \frac{16c}{5} - 5c = -50$$
$$-9c - 16c - 25c = -250$$
$$-50c = -250$$
$$c = 5$$
$$a = -\frac{3}{5}(5) = -3$$
$$b = -\frac{4}{5}(5) = -4$$

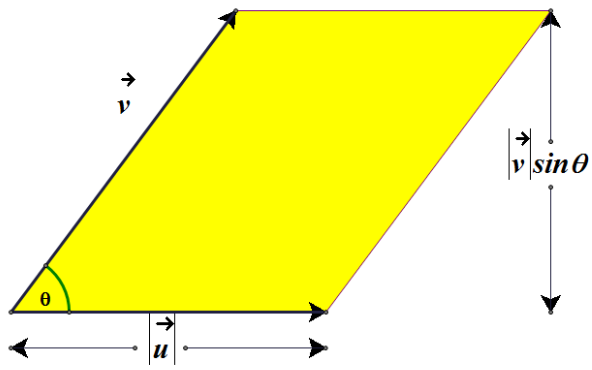
ดังนั้น $\vec{v} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

2.8 ความหมายของผลคูณเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 2.8.1 สี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram area) ที่มีเส้นขอบเป็นเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะได้ว่า พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ $|\vec{u}\times\vec{v}|$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ พิจารณาขนาดของผลคูณเวกเตอร์จะได้

$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}| &= |\vec{n}||\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \\ &= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta\end{aligned}$$



ภาพที่ 2.8.1 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ

พิจารณาภาพที่ 2.8.1 เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ จะได้ว่า $|\vec{u}|$ เป็นความยาวของฐาน และ $|\vec{v}|\sin\theta$ เป็นส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยม จะได้ว่า $|\vec{u}\times\vec{v}|$ คือพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเป็นเส้นขอบ โดยที่

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน } &= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \\ &= |\vec{u}\times\vec{v}|\end{aligned}$$

ผลคูณ $\vec{u}\times\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์พื้นที่กล่าวคือ $|\vec{u}\times\vec{v}|$ จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ และ $\vec{u}\times\vec{v}$ มีทิศทางตั้งฉากกับบริเวณพื้นที่นั้น

จากทฤษฎีบท 2.8.1จะได้ว่าพื้นที่รูปสามเหลี่ยม (triangle area) ซึ่งมี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ พื้นที่ของสามเหลี่ยมสามารถหาได้โดยพื้นที่ของสามเหลี่ยม $=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

จากผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ และทฤษฎีบท 2.8.1สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ คือ

$$\text{พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน } = |\vec{u}\times\vec{v}| = \left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}\right\|$$

ในทำนองเดียวกันสามารถคำนวณพื้นที่สามเหลี่ยมมี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ คือ

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}\right\|$$

ตัวอย่าง 2.8.1 ให้ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ เป็นเส้นขอบของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน และพื้นที่สามเหลี่ยม

วิธีทำ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $= \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$

$$= \left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{matrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{matrix}-2 & -2\\ -3 & 1\end{matrix}\right|\vec{i} - \left|\begin{matrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{matrix}\right|\vec{j} + \left|\begin{matrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{matrix}\right|\vec{k}\right|$$

$$= \left|(-2-6)\vec{i} - (3+10)\vec{j} + (-9+10)\vec{k}\right|$$

$$= \left|-8\vec{i} - 13\vec{j} + \vec{k}\right|$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (13)^2 + (1)^2}$$

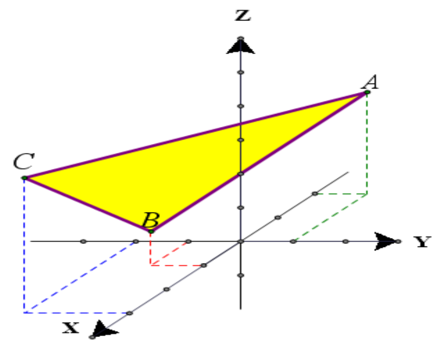
$$= \sqrt{234}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ $\sqrt{234}$ ตารางหน่วย

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม } = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{234}$$

ดังนั้น พื้นที่ของสามเหลี่ยม คือ $\frac{\sqrt{234}}{2}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 2.8.2 จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC โดยมีจุดยอดอยู่ที่จุด $A(-2,1,3)$ จุด $B(1,-1,1)$ และจุด $C(3,-2,4)$ ดังภาพ



วิธีทำ $\overrightarrow{AB}=[1-(-2)]\vec{i}+(-1-1)\vec{j}+(1-3)\vec{k}=3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC}=[3-(-2)]\vec{i}+(-2-1)\vec{j}+(4-3)\vec{k}=5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$

พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

พิจารณา

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-2-6)\vec{i}-[3-(-10)]\vec{j}+[-9-(-10)]\vec{k}$$

$$=-8\vec{i}-13\vec{j}+\vec{k}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC=\frac{1}{2}\left|-8\vec{i}-13\vec{j}+\vec{k}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(-8)^2+(-13)^2+(1)^2}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{26}}{2}$$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC คือ $\frac{3\sqrt{26}}{2}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 2.8.3 ให้ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา

1. พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ
2. พื้นที่สามเหลี่ยมที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ

วิธีทำ 1. พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$

$$=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 3\end{matrix}\right\|$$

$$=\left|\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}\right|$$

$$=\left|(6-0)\vec{i}-(3-2)\vec{j}+[0-(-4)]\vec{k}\right|$$

$$=\left|6\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{53}$$

ดังนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ $\sqrt{53}$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง

2. พื้นที่สามเหลี่ยม $=\frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{53}$$

ดังนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม คือ $\frac{\sqrt{53}}{2}$ ตารางหน่วย

ทฤษฎีบท 2.8.2 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองแล้ว $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\pi$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$

จาก $\vec{u}\times\vec{v}=\left(b_1c_2-b_2c_1\right)\vec{i}+\left(c_1a_2-c_2a_1\right)\vec{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\vec{k}$

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2+\left(c_1a_2-c_2a_1\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2 &= b_1^2c_2^1-2b_1c_2b_2c_1+b_2^2c_1^2+c_1^2a_2^2-2c_1a_2c_2a_1+c_2^2a_1^2+a_1^2b_2^2\\
&\quad -2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2\\
&=\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2\\
&=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|^2\\
&=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2-\left|\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta\right|^2\\
&=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\cos^2\theta\\
&=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&=\left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $0\le\theta\le\pi$ จึงได้ว่า $\sin\theta\ge 0$

ดังนั้น $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$

ตัวอย่าง 2.8.4 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ กำหนดให้ $\left|\vec{u}\right|=2,\left|\vec{v}\right|=3$ มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองเท่ากับ $\frac{\pi}{6}$ จงหา $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| &= \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta\\
&=(2)(3)\sin\frac{\pi}{6}\\
&=3
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=3$

ตัวอย่าง 2.8.5 จงแสดงว่า $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2$

วิธีทำ จาก $\quad \left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2 &= \left[\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin(\theta)\right]^2 \\
&= \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\sin^2(\theta) \\
&= \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\left(1-\cos^2(\theta)\right) \\
&= \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2\cos^2(\theta) \\
&= \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - \left(\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos(\theta)\right)^2 \\
&= \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2\left|\vec{v}\right|^2 - \left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)^2$

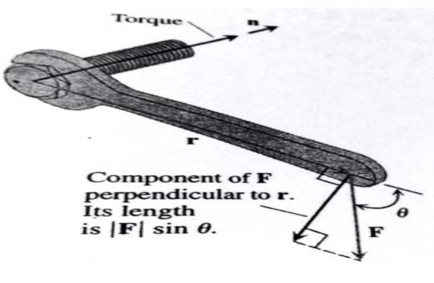
2.9 ทอร์ก

นิยาม 2.9.1 ทอร์ก (torque) คือ ปริมาณที่ทำให้เกิดการหมุนของวัตถุอันเนื่องมาจากแรงลัพธ์ที่กระทำต่อวัตถุไม่ผ่านศูนย์กลางมวล ทอร์กเป็นปริมาณเวกเตอร์ มีทิศทางตั้งฉากกับระนาบการหมุนของวัตถุ โดยทิศทางของทอร์กจะพุ่งออกตั้งฉากกับระนาบการหมุนเมื่อวัตถุหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และทิศทางของทอร์ก

จากภาพที่ 2.9.1 เมื่อหมุนสลักเกลียว (bolt) ด้วยแรง $\vec{F}$ ด้วยกุญแจปากตายเพื่อขัดสลักเกลียวให้หมุนไปข้างหน้า จะได้ขนาดของทอร์กขึ้นอยู่กับระยะและทิศทางของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำต่อกุญแจปากตาย โดยหาได้จากผลคูณของความยาวของคาน r และส่วนประกอบสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่ตั้งฉากกับ $\vec{r}$ ดังนั้น ขนาดของทอร์ก $=\left(\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta\right) \quad = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right|$

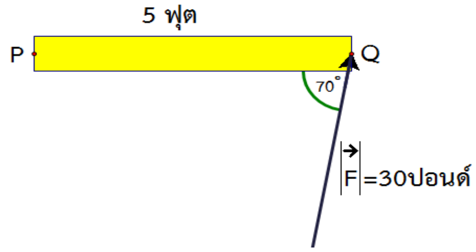
ให้ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกนน็อตในทิศทางของทอร์ก จะได้

$$\begin{aligned}
\text{เวกเตอร์ทอร์ก} &= \vec{r}\times\vec{F} \\
&= \vec{n}\left(\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta\right)
\end{aligned}$$



ภาพที่ 2.9.1เวกเตอร์ทอร์ก
ที่มา (แคลคูลัส, 2548: 631)

ตัวอย่าง 2.9.1 จงหาขนาดของทอร์กที่กระทำโดยแรง $\vec{F}$ ตามภาพ



วิธีทำ ขนาดของทอร์ก $= \left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{F}\right|$

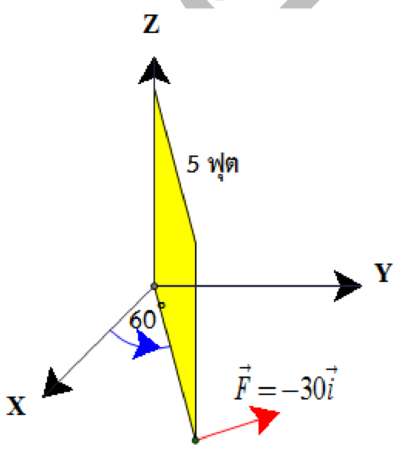
$$= \left(\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta\right)$$

$$= (4)(40)\sin\left(80^\circ\right)$$

$$= 157.57 \text{ ฟุต-ปอนด์}$$

ดังนั้น ขนาดของทอร์กที่กระทำโดยแรง $\vec{F}$ คือ 157.57 ฟุต-ปอนด์

ตัวอย่าง 2.9.2 ให้ประตูกว้าง 5 ฟุต ซึ่งแรงในแนวนอน (horizontal force) ขนาด 30 ปอนด์ กระทำที่ขอบประตูจงหา ทอร์กของแรงรอยบานพับของประตู



วิธีทำ จากภาพขนาดของทอร์ก $= \left|\overrightarrow{PQ} \times \vec{F}\right|$

$= \left(\left|\overrightarrow{PQ}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\theta\right)$ เมื่อ $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ คือ ความกว้างของประตู

$$= (5)(30)\sin\frac{\pi}{3} = (150)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 75\sqrt{3}$$

ดังนั้น ทอร์กของแรงรอยบานพับของประตูคือ $75\sqrt{3}$ ฟุต-ปอนด์

ตัวอย่าง

2.10 ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

นิยาม 2.10.1 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ สามเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ (scalar triple product) ใช้สัญลักษณ์ แทนด้วย $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ หรือ $\vec{u}\cdot\vec{v}\times\vec{w}$ หรือ $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ โดยมีรูปแบบสมการดังนี้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha$ เมื่อ α เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}\times\vec{w}$

ในบางครั้งเรียก $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ ว่าผลคูณแบบกล่อง (box product) ของเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ด้วย

ในการคำนวณหาค่าผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์โดยอาศัยส่วนประกอบของเวกเตอร์ สามารถหาได้ในรูปดีเทอร์มิแนนต์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.10.1 ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k},\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ $\vec{w}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ แล้ว $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k},\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ $\vec{w}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\vec{v}\times\vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{k} \\
\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}a_1 - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}b_1 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}c_1 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 2.10.1 ให้ $\vec{u}=4\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k},\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

วิธีทำ พิจารณา

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}4 & -2 & 5\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

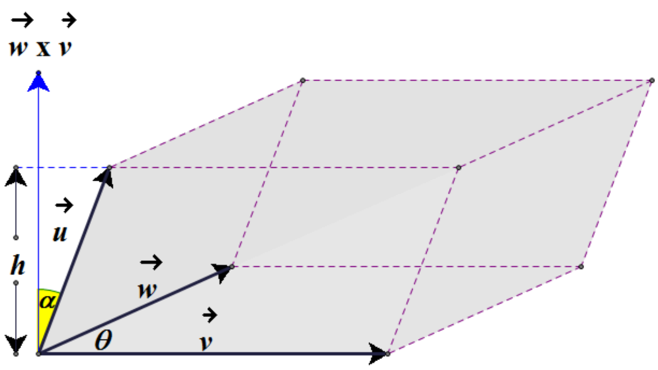
$$=8+14-5=17$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=17$

2.11 ผลคูณสามเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ในเชิงเรขาคณิต

ทฤษฎีบท 2.11.1 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelepiped) จะได้ว่า $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ คือปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พิสูจน์ ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภมิสามมิติ



ภาพที่ 2.11.1รูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมีเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ

พิจารณาภาพที่ 2.11.1 รูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมี $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ พบว่า $|\vec{v}\times\vec{w}|$ คือ พื้นที่ฐานของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ และ $|\vec{u}|\cos\alpha$ เป็นส่วนสูงของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน เมื่อ α เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}\times\vec{w}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\text{ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน} &= \text{พื้นที่ฐาน}\times\text{สูง}\\ &=|\vec{v}\times\vec{w}||\vec{u}|\cos\alpha\\ &=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha\\ &=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|\end{aligned}$$

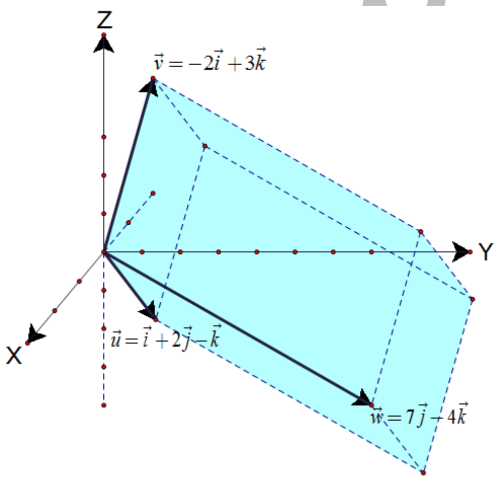
ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบคือ $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

จากทฤษฎีบท 2.11.1 จะพบว่า $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$ เท่ากับปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบโดยมี $|\vec{v}\times\vec{w}|$ เป็นพื้นที่ฐาน ในทำนองเดียวกัน จากภาพที่ 2.11.1 ถ้าพิจารณา $|\vec{w}\times\vec{u}|$ เป็นพื้นที่ฐานจะได้ว่า $|\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})|$ เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ในทำนองเดียวกัน $|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$ เป็นปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานของภาพที่ 2.11.1 เช่นกัน ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

ค่าสัมบูรณ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์ดังกล่าวจะเป็นปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเส้นขอบเป็นเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ สำหรับ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$,
$\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ $\vec{w}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$

จึงได้ว่า ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\|$

ตัวอย่าง 2.11.1 ให้เวกเตอร์ $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{k}$ และ $\vec{w}=7\vec{j}-4\vec{k}$ เป็นเส้นขอบรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานดังภาพ



วิธีทำ ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

$$=\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{matrix}\right\|$$

$$=\left|1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\right|$$

$$=|1(0-21)-2(8-0)+(-1)(-14-0)|$$

$$=|-23|=23$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ 23 ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 2.11.2 ให้ $\vec{u}=3\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}, \vec{v}=\vec{i}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=2\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติและ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ จาก ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$

$$=\left\|\begin{matrix}3 & 3 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & -2\end{matrix}\right\|$$

$$=\left|3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}\right|$$

$$=|3[0-(-4)]-3[-2-(-2)]-2(4-0)|$$

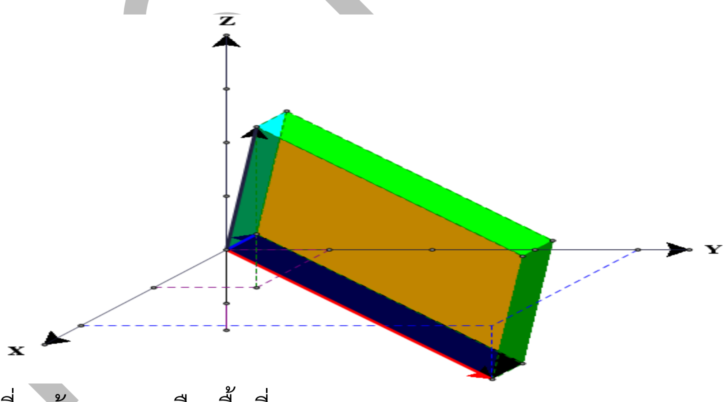
$$=|12-8|$$

$$=4$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ 4 ลูกบาศก์หน่วย

ตัวอย่าง 2.11.3 ให้ $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{v}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหาส่วนสูงของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยที่ เวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ ถ้าฐานที่เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานประกอบด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ



ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$

$$=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|$$

$$=|1(4+1)-1(2+1)+3(2-4)|$$

$$=|5-3-6|=4 \text{ ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$\text{พื้นที่ฐาน} = \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$$

$$= \left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{matrix}\right\|$$

$$= \left|\vec{i}\,(-1-4) - \vec{j}\,(-1-2) + \vec{k}\,(4-2)\right|$$

$$= \left|-5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right|$$

$$= \sqrt{38} \quad \text{หน่วย}^3$$

$$\text{ความสูง} = \frac{\text{ปริมาตร}}{\text{พื้นที่ฐาน}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{38}}$$

ดังนั้น ส่วนสูงของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ $\frac{4}{\sqrt{38}}$ หน่วย

ตัวอย่าง 2.11.4 กำหนดรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีจุดยอด $O(0,0,0), A(1,5,7), B(2a,-b,-1)$ และ $C(a,3b,2)$ โดยที่ a และ b เป็นสเกลาร์ใด ๆ ถ้า $\overrightarrow{OA}$ ตั้งฉากกับฐานที่ประกอบด้วย $\overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{OC}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{OB}$ กับ $\overrightarrow{OC}$ จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $OABC$

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ $\left|\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|$

สร้างเวกเตอร์

$$\overrightarrow{OA} = (1-0)\vec{i} + (5-0)\,\vec{j} + (7-0)\vec{k} = \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = (2a-0)\vec{i} + (-b-0)\,\vec{j} + (-1-0)\vec{k} = 2a\vec{i} - b\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = (a-0)\vec{i} + (3b-0)\,\vec{j} + (2-0)\vec{k} = a\vec{i} + 3b\vec{j} + 2\vec{k}$$

เนื่องจาก $\overrightarrow{OA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$$

$$\left(\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}\right)\cdot\left(2a\vec{i} - b\vec{j} - \vec{k}\right) = 0$$

$$2a - 5b - 7 = 0$$

$$2a - 5b = 7 \qquad \text{..........}(1)$$

และ

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$$

$$\left(\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}\right)\cdot\left(a\vec{i} + 3b\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 0$$

$$a + 15b + 14 = 0$$

$$a + 15b = -14 \qquad \text{..........}(2)$$

ตัวอย่าง

นำ $2\times$ สมการ (2); $\qquad 2a+30b=-28 \qquad$ ....(3)

นำสมการ $(1)-$ สมการ (3); $\quad (2a-5b)-(2a+30b)=7-(-28)$

$$-35b=35$$

$b=-1$ แทนค่าในสมการ (1)

จากสมการ (1); $\qquad 2a-5b=7$

$$2a-5(-1)=7$$

$$a=1$$

จาก $\overrightarrow{OB}=2a\vec{i}-b\vec{j}-\vec{k}$

แทนค่า $a=1,b=-1$ จึงได้ $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

จาก $\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+3b\vec{j}+2\vec{k}$

แทนค่า $a=1,b=-1$ จึงได้ $\overrightarrow{OC}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $=\left|\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OB}\right)\right|$

$$=\left\|\begin{matrix}1 & 5 & 7\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{matrix}\right\|$$

$$=\left|1\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=75$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ 75 ลูกบาศก์หน่วย

เวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบเดียวกัน เรียกว่าเวกเตอร์ร่วมระนาบ ถ้า $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ไม่อยู่ในระนาบเดียวกันเมื่อ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\neq 0$ เพราะ $\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right|$ คือปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานโดยที่มี $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ จะมีปริมาตรไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งการที่ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$ แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งสามอยู่ในระนาบเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.11.5 จงแสดงว่า $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{k},\vec{v}=3\vec{j}+4\vec{k}$ และ $\vec{w}=8\vec{i}-3\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบเดียวกัน และเขียนเวกเตอร์ $\vec{w}$ ในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 8 & -3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}3 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 3\\ 8 & -3\end{vmatrix}$$

$$=24-24=0$$

เนื่องจาก $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$

จึงได้ว่า เวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน

สำหรับ สเกลาร์ x และ y

พิจารณา
$$\begin{aligned}\vec{w} &= x\vec{u}+y\vec{v}\\ 8\vec{i}-3\vec{j} &= x\left(2\vec{i}+\vec{k}\right)+y\left(3\vec{j}+4\vec{k}\right)\\ &= 2x\vec{i}+x\vec{k}+3y\vec{j}+4y\vec{k}\\ &= 2x\vec{i}+3y\vec{j}+(x+4y)\vec{k}\end{aligned}$$

จะได้ระบบสมการดังนี้
$$2x=8 \qquad \text{............}(1)$$
$$3y=-3 \qquad \text{............}(2)$$
$$x+4y=0 \qquad \text{............}(3)$$

จากสมการ (1) $\qquad x=4$

จากสมการ (2) $\qquad y=-1$

ดังนั้น $\vec{w}=4\vec{u}-\vec{v}$

ตัวอย่าง 2.11.6 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{j}+2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}),\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$ และ $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= \begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}\\ &= 2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ &= 2\left[4-(-1)\right]+(2-0)+(1-0)\\ &= 10+2+1=13\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=13$

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) &= \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}\\ &= 1\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}\\ &= 1\left[1-(-2)\right]-2(0-4)-(0-2)\\ &= 3+8+2=13\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=13$

ตัวอย่าง

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=0-1\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-1(-2-1)+2[4-(-1)]$$

$$=3+10=13$$

ดังนั้น $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=13$

จากตัวอย่าง 2.11.6 พบว่า สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ แล้ว $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.11.1 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ แล้ว

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k},\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ $\vec{w}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$

พิจารณา $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3; $=-\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2; $=-\left(-\begin{vmatrix}a_3 & b_3 & c_3\\ a_1 & b_2 & b_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}\right)$

$$=\begin{vmatrix}a_3 & b_3 & c_3\\ a_1 & b_2 & b_3\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$$

จึงได้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ ....(1)

พิจารณา $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2; $=-\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

ตัวอย่าง

สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3; $\quad = -\left(-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}\right)$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$$

จึงได้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$ ....(2)

จากสมการ (1)และสมการ(2); $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

ตัวอย่าง 2.11.7 ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ และ$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

วิธีทำ

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [12-(-1)] - [6-(-1)] + (2-4) = 4$$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 4$

ค่า $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

พิจารณา $\quad \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

และ $\quad (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \left(-5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right)$

$$= (-5)(1) + (3)(1) + (2)(3) = 4$$

ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = 4$

จากตัวอย่าง 2.11.7 พบว่า สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติแล้ว $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$ จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 2.11.2 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ แล้ว $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k},\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ และ $\vec{w}=a_3\vec{i}+b_3\vec{j}+c_3\vec{k}$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}b_1+\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}c_1$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

จึงได้ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ ....(1)

พิจารณา
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}a_3-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}b_3+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}c_3$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

จึงได้ $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ ....(2)

ดังนั้น จากสมการ (1) และสมการ (2); $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

ตัวอย่าง

2.12 ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์

นิยาม 2.12.1 กำหนดให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ (vector triple product) คือ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

จากนิยาม เวกเตอร์ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}\times\vec{w}$ ส่วน $\vec{v}\times\vec{w}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ จึงได้ว่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}),\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ได้

จึงได้ว่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=m\vec{v}+n\vec{w}$ เมื่อ m,n เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w},\vec{u}$ และ $\vec{v}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้น เวกเตอร์ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ได้

จึงได้ว่า $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v}$ เมื่อ p,q เป็นสเกลาร์ใด ๆ

จึงได้ว่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

ข้อสังเกต $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{w}$ ไม่มีความหมาย

ตัวอย่าง 2.12.1 ให้ $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k},\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{j}+\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{j}+2\vec{k}$$

และ

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$$

ดังนั้น $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=2\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

ตัวอย่าง

พิจารณา
$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=5\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$$

และ
$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 7\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=4\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}$$

ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=4\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}$

จากตัวอย่าง 2.12.1 จะพบว่าสำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

ทฤษฎีบท 2.12.1 สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จะได้ว่า
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}),\vec{u}$ และ $\vec{v}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ สามารถเขียนในรูปผลบวกเชิงเส้นของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ได้ เมื่อ m,n เป็นปริมาณสเกลาร์

จึงได้ว่า
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=m\vec{v}+n\vec{w} \qquad ....(1)$$
และ
$$\vec{u}\cdot[\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})]=\vec{u}\cdot(m\vec{v}+n\vec{w})$$
$$\vec{u}\cdot\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})+n(\vec{u}\cdot\vec{w})$$
$$(\vec{u}\times\vec{u})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=m(\vec{u}\cdot\vec{v})+n(\vec{u}\cdot\vec{w})$$

แต่ $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{0};\ m(\vec{u}\cdot\vec{v})+n(\vec{u}\cdot\vec{w})=\vec{0}$

ดังนั้น
$$\frac{m}{(\vec{u}\cdot\vec{w})}=-\frac{n}{(\vec{u}\cdot\vec{v})}=t \text{ สำหรับสเกลาร์ } t$$

$m=t(\vec{u}\cdot\vec{w})$ และ $n=-t(\vec{u}\cdot\vec{v})$ แทนค่าในสมการ (1)
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=t(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-t(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=t[(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}] \qquad ....(2)$$

จะแสดงว่า $t=1$

ตัวอย่าง

จากสมการ (2) จะได้ $\vec{v}\cdot\left[\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\right]=\vec{v}\cdot t\left[(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}\right]$

$$=t\left[(\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{w})\right]$$

แต่
$$\vec{v}\cdot\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{v}\times\vec{u})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$
$$=-(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$
$$=-\vec{u}\cdot\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w})$$

ดังนั้น
$$-\vec{u}\cdot\left[\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w})\right]=t\left[(\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{v})\right] \quad ....(3)$$

จากสมการ (2); $\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w})=s\left[(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{w}\right]$ สำหรับ s เป็นสเกลาร์ใด ๆ

$$\vec{w}\cdot\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w})=s(\vec{v}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{w})-(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{w})$$
$$(\vec{w}\times\vec{v})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=s|\vec{v}\cdot\vec{w}|^2-|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$$
$$-(\vec{v}\times\vec{w})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=s|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\cos^2\theta-|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$$
$$-|\vec{v}\times w|^2=-s|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)$$
$$=-s|\vec{v}|^2|\vec{w}|^2\sin^2\theta$$
$$=-s|\vec{v}\times\vec{w}|^2$$

จึงได้ $s=1$

นั่นคือ $\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{w}$

แทนค่าในสมการ (3);

$$-\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{w}=t(\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{v})$$
$$-(\vec{v}\cdot\vec{w})(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{u}\cdot\vec{w})=t(\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{v})$$

จึงได้ $t=1$

ดังนั้น $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

ทฤษฎีบท 2.12.2 ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จะได้ว่า

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$$

พิสูจน์ สำหรับ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=-\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})$$
$$=-\left[(\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}-(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v}\right]$$
$$=(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v}-(\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}$$
$$=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$$

ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบททั้ง 2 จะพบ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})\neq(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.12.2 ให้ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ จงหา $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ใช้นิยาม หาค่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=[-4-(-2)]\vec{i}-[-4-(-3)]\vec{j}+(2-3)\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(1-3)\vec{i}-[-2-(-6)]\vec{j}+(2-2)\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-4\vec{j}$$

จึงได้ว่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=-2\vec{i}-4\vec{j}$

หาค่า $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(1-3)\vec{i}-(-2-3)\vec{j}+[2-(-1)]\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & 3\\ 3 & 2 & -4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

ตัวอย่าง

$$= (-20-6)\vec{i} - (8-9)\vec{j} + (-4-15)\vec{k}$$
$$= -26\vec{i} + \vec{j} - 19\vec{k}$$

ดังนั้น $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = -26\vec{i} + \vec{j} - 19\vec{k}$

วิธีที่ 2 โดยใช้ทฤษฎี $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)\cdot\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= (2)(3) + (-1)(2) + (3)(-4)$$
$$= 6 - 2 - 12 = -8$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)$$
$$= (2)(1) + (-1)(1) + (3)(-1)$$
$$= 2 - 1 - 3 = -2$$
$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = -8\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) + 2\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= -8\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}$$
$$= -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

จึงได้ว่า $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = -2\vec{i} - 4\vec{j}$

หาค่า $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ โดยใช้ทฤษฎี $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = \left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)\cdot\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= (2)(3) + (-1)(2) + (3)(-4)$$
$$= 6 - 2 - 12 = -8$$
$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)\cdot\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= (1)(3) + (1)(2) + (-1)(-4)$$
$$= 3 + 2 + 4 = 9$$
$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = -8\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) - 9\left(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right)$$
$$= -8\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k} - 18\vec{i} + 9\vec{j} - 27\vec{k}$$
$$= -26\vec{i} + \vec{j} - 19\vec{k}$$

จึงได้ว่า $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = -26\vec{i} + \vec{j} - 19\vec{k}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.12.3 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่อยู่ในระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{v}=\vec{j}+2\vec{k}$ และตั้งฉากกับ $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

วิธีทำ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}\times\vec{v}$ ซึ่งจะขนานกับ $\vec{w}$ และ เวกเตอร์ที่ขนานกับระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

จึงได้ว่า เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่อยู่ในระนาบที่ประกอบด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และตั้งฉากกับ $\vec{w}$ คือ $\dfrac{(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}}{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\right|}$

จาก $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

$$=\left[\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)\right]\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)-\left[\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)\right]\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$$

$$=\left[(1)(2)+(2)(1)+(0)(2)\right]\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)-\left[(0)(2)+(1)(1)+(2)(2)\right]\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$$

$$=4\left(\vec{j}+2\vec{k}\right)-5\left(\vec{i}+2\vec{j}\right)$$

$$=\left(4\vec{j}+8\vec{k}\right)-\left(5\vec{i}+10\vec{j}\right)$$

$$=-5\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}$$

จึงได้ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=-5\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}$

หา $$\left|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\right|=\left|-5\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{(-5)^2+(-6)^2+(8)^2}=5\sqrt{5}$$

จึงได้ $\left|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\right|=5\sqrt{5}$

พิจารณา $$\frac{(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}}{\left|(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}\right|}=\frac{-5\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}}{5\sqrt{5}}$$

$$=\frac{-5}{5\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{6}{5\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{8}{5\sqrt{5}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วย คือ $\dfrac{-5}{5\sqrt{5}}\vec{i}-\dfrac{6}{5\sqrt{5}}\vec{j}+\dfrac{8}{5\sqrt{5}}\vec{k}$

2.13. สรุป

บทนี้เป็นการศึกษา ผลคูณเชิงสเกลาร์ สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ ภาพฉายของเวกเตอร์ สมการเส้นตรง ระยะทางตั้งฉาก ผลคูณเชิงเวกเตอร์ สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ในระนาบ และปริภูมิสามมิติ ทอร์ก ผลคูณเชิงสเกลาร์สามเวกเตอร์ และสมบัติของ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ สรุปได้ดังนี้

ตัวอย่าง

ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง และ $0\le\theta\le\pi$

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ และ $\vec{z}$ สำหรับสเกลาร์ a ใด ๆ

1. ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ นั่นคือ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
2. ถ้า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ เป็นไปได้ 3 กรณี คือ $\vec{u}=\vec{0}$ หรือ $\vec{v}=\vec{0}$ หรือ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$
3. ผลคูณเชิงสเกลาร์มีสมบัติการสลับที่ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
4. $|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}$
5. $(a\vec{u}\cdot\vec{v})=a(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(a\vec{v})$
6. การแจกแจง $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ และ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
7. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{w}+\vec{z})=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{z}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{z}$
8. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=|\vec{u}|^2-|\vec{v}|^2$
9. ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ จะได้ว่า $\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์

สำหรับเวกเตอร์ในระนาบให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1a_2+b_2b_2$

สำหรับเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$

ภาพฉายของเวกเตอร์

ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $scal_{\vec{v}}\vec{u}$ คือ $scal_{\vec{v}}\vec{u}=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ คือ $proj_{\vec{v}}\vec{u}=(scal_{\vec{v}}\vec{u})\vec{v}$

ประยุกต์ความรู้จากการศึกษาเวกเตอร์ในระนาบที่ได้ดังนั้น

สมการเส้นตรง ให้ l เป็นเส้นตรงในระนาบ ซึ่งผ่านจุด $P_1(x_1,y_1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}=a\vec{i}+b\vec{j}$ ที่จุด $P(x,y)$ จะได้ว่าสมการเส้นตรง l สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ คือ $\vec{N}\cdot\overrightarrow{P_1P}=0$

ระยะทางตั้งฉาก ให้จุด $P_1(x_1,y_1)$ ใด ๆ ในระนาบ และเส้นตรง $l: ax+by+c=0$ ระยะทางตั้งฉากจากจุด P_1 ไปยังเส้นตรง l ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย d โดย $d=\left|scal_{\vec{N}}\overrightarrow{PP_1}\right|$ เมื่อ P เป็นจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง l

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{u}\times\vec{v}$ คือ $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{n}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ซึ่ง $0\le\theta\le\pi$ และ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งได้ฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{n}$ อยู่ในกฎมือขวา

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ปกติมาตรฐานสรุปได้ดังนี้

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$ $\quad\vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ $\quad\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$ $\quad\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ $\quad\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ r,s เป็นสเกลาร์ ใด ๆ

1. $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน
2. $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$
3. $(r\vec{u})\times(s\vec{v})=(rs)(\vec{u}\times\vec{v})$
4. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$
5. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=(\vec{u}\times\vec{w})+(\vec{v}\times\vec{w})$
6. $\vec{0}\times\vec{u}=\vec{0}$
7. $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เมื่อ $0\le\theta\le\pi$
8. $|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

ผลลัพธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ และ $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิติสามมิติ

1. $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$

2. พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานคือ $|\vec{u}\times\vec{v}|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{matrix}\right\|$

3. สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ พื้นที่สามเหลี่ยมคือ $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

ทอร์ก 1. ขนาดของทอร์ก $=|\vec{r}\times\vec{F}|$

2. เวกเตอร์ทอร์ก $=\vec{n}\left(|\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta\right)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามเวกเตอร์

ผลคูณเชิงสเกลาร์สามเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ คือ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}||\cos\alpha|$ เมื่อ α เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}\times\vec{w}$

ตัวอย่าง

สมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์สามเวกเตอร์ ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}, \vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ และ $\vec{w} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บนปริภูมิสามมิติ

1. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
2. ปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือ $\left|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right| = \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right\|$
3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$ แสดงว่าเวกเตอร์ทั้งสามอยู่ในระนาบเดียวกัน
4. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$
5. $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ ของ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ คือ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

สมบัติของผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสามเวกเตอร์ ของ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$

1. $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{w}$ ไม่มีความหมาย
2. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \neq (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$
3. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$
4. $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$

ตัวอย่าง

แบบฝึกหัด 2

1. จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   1.1 $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}, \vec{v} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$

   1.2 $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$

   1.3 $\vec{u} = \vec{i} - 9\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$

   1.4 $\vec{u} = 5\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + \sqrt{17}\vec{j}$

   1.5 $\vec{u} = 2\vec{i} + 10\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

2. จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(2,3)$ จุด $B(-7,10)$ และเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(11,12)$ จุด $D(4,3)$ ตั้งฉากกัน

3. จงหามุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ต่อไปนี้

   3.1 $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}, \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$

   3.2 $\vec{u} = 6\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{v} = -\vec{i} + 5\vec{j}$

   3.3 $u = -\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

   3.4 $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$

   3.5 $\vec{u} = \sqrt{2}\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{v} = \vec{i} - 7\vec{j}$

4. จงหาภาพฉายเชิงสเกลาร์และภาพฉายเวกเตอร์ของ ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่อไปนี้

   4.1 $\vec{u} = 7\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$

   4.2 $\vec{u} = \vec{i} - 4\vec{j}, \vec{v} = -\vec{i} - 5\vec{j}$

   4.3 $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{v} = \vec{i} + 7\vec{j}$

   4.4 $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$

   4.5 $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{5}\vec{j}$

5. จงหาสมการเส้นตรงตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   5.1 ผ่านจุด $P_1(4,1)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$

   5.2 ผ่านจุด $P_1(-2,2)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$

   5.3 ผ่านจุด $P_1(5,4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2)$ และ $(3,6)$

   5.4 ผ่านจุด $P_1(3,4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,3)$ และ $(6,6)$

   5.5 ผ่านจุด $P_1(-1,-3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,2)$ และ $(3,0)$

6. จงหาระยะตั้งฉากจุด P_1 ไปยังเส้นตรง l ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   6.1 $P_1(4,5)$ และ $l: 2y = 4x + 10$

   6.2 $P_1(2,-3)$ และ $l: 8x + 15y - 24 = 0$

   6.3 $P_1(-1,7)$ และ $l: 6x - 8y + 5 = 0$

   6.4 $P_1(4,3)$ และ $l: 3x - 4y + 8 = 0$

ตัวอย่าง

6.5 $P_1(-1,3)$ และ $l:5x-12y-25=0$

7. กำหนดให้ เวกเตอร์ $\vec{u}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ ต่อไปนี้ จงหา $\vec{u}\times\vec{v}$

7.1 $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=3\vec{j}+2\vec{k}$

7.2 $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ และ $\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

7.3 $\vec{u}=5\vec{i}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=7\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

7.4 $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

7.5 $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ และ $\vec{v}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

8. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่อไปนี้จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

8.1 $\vec{u}=\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$

8.2 $\vec{u}=4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

8.3 $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ และ $\vec{v}=-3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

8.4 $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=7\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$

8.5 $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$

9. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC โดยมีจุดยอดอยู่ที่จุด A,B และ C ต่อไปนี้

9.1 จุด $A(1,3,5)$ จุด $B(-2,4,1)$ และจุด $C(2,4,-1)$

9.2 จุด $A(2,-3,2)$ จุด $B(-1,2,3)$ และจุด $C(2,-3,1)$

9.3 จุด $A(2,1,5)$ จุด $B(4,-2,5)$ และจุด $C(-3,-2,-1)$

9.4 จุด $A(1,-1,2)$ จุด $B(2,0,-1)$ และจุด $C(0,2,1)$

9.5 จุด $A(2,-2,1)$ จุด $B(3,-1,2)$ และจุด $C(3,-1,1)$

10. จงหาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเส้นขอบ และปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเส้นขอบ

10.1 $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k},\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}-2\vec{k}$

10.2 $\vec{u}=2\vec{i}-5\vec{j},\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

10.3 $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\vec{v}=-\vec{i}-4\vec{k}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

10.4 $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\vec{v}=\vec{j}-5\vec{k}$ และ $\vec{w}=-15\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$

10.5 $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j},\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=\vec{i}+2\vec{k}$

11. กำหนด $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงหา $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ และ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

11.1 $\vec{u}=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k},\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}+9\vec{j}-2\vec{k}$

11.2 $\vec{u}=2\vec{i}-5\vec{j},\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ และ $\vec{w}=6\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

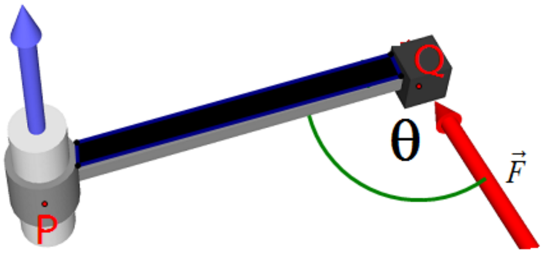
11.3 $\vec{u}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\vec{v}=-\vec{i}-4\vec{k}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$

11.4 $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k},\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ และ $\vec{w}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$

11.5 $\vec{u}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k},\vec{v}=-2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ และ $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

ตัวอย่าง

12. จงหาขนาดของทอร์ก ตามรูป เมื่อกำหนด แรง $\vec{F}, \overrightarrow{PQ}$ และ θ ต่อไปนี้



12.1 $\left|\vec{F}\right| = 30$ ปอนด์ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 8$ นิ้ว และ $\theta = \frac{\pi}{3}$

12.2 $\left|\vec{F}\right| = 40$ ปอนด์ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 5$ นิ้ว และ $\theta = \frac{\pi}{4}$

12.3 $\left|\vec{F}\right| = 50$ ปอนด์ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 7$ นิ้ว และ $\theta = \frac{\pi}{6}$

12.4 $\left|\vec{F}\right| = 45$ ปอนด์ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 12$ นิ้ว และ $\theta = \frac{3\pi}{4}$

12.5 $\left|\vec{F}\right| = 5$ ปอนด์ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 16$ นิ้ว และ $\theta = \frac{53\pi}{180}$

ตัวอย่าง

เอกสารอ้างอิง

กมล เอกไทยเจริญ. (2543). **พีชคณิตเชิงเส้นและเทคนิคการใช้ Graphing Calculator.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กอบกุล สังขะมัลลิก. (2552). **พีชคณิตเชิงเส้น.** ปทุมธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2547). **แคลคูลัส 3.** กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อนัญญู อภิชาตบุตร. (2549). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Baipai, M. W. (1990). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: John Wiley.

Cumpbell, H. G. (1968). **Matrices with Application.** New York: Meredith.

Ferdinand, P. B. (2004). **Vector mechanics for engineers: dynamics.** New York : McGraw-Hill.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: Addison Wesley.

Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3nd ed). New York: Harper & Row Publishers.

Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 3

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

3.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3.2 ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3.5 ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง
3.6 เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์แนวฉาก
3.7 ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3.8 ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ
3.9 ความโค้งของเส้นโค้ง
3.10 เวกเตอร์แนวฉากกรองหนึ่งหน่วย และระนาบสัมผัสประชิด
3.11 การบิด
3.12 สรุป
แบบฝึกหัด
เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
2. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
5. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้งได้
6. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาเวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์แนวฉากได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบได้
9. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าความโค้งของเส้นโค้ง เวกเตอร์แนวฉากกรองหนึ่งหน่วย และระนาบสัมผัสประชิดและการบิดได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ศึกษาเอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย และซักถามประกอบการสอนด้วย Power point
3. ศึกษาจากคอมพิวเตอร์ประกอบการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป GSP
4. แบ่งกลุ่มอภิปราย สรุปบทเรียน
5. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ตัวอย่าง

6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน
7. ผู้สอบสรุปเนื้อหาเพิ่มเติม

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. เครื่องคอมพิวเตอร์และ LCD
4. โปรแกรมสำเร็จรูป GSP

การวัดผลและการประเมินผล

1. นักศึกษาสามารถตอบข้อซักถามได้
2. นักศึกษาให้ความสนใจในการเรียนการสอน
3. สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม
4. นักศึกษาสามารถทำแบบฝึกหัดได้

ตัวอย่าง

บทที่ 3
ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ในบทนี้จะศึกษา ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ โดยจะศึกษาถึง ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ความยาวของเส้นโค้งเรียบ การเคลื่อนที่ ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง เวกเตอร์สัมผัส เวกเตอร์แนวฉาก เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วยและระนาบสัมผัสประชิด ความโค้ง และการบิด

3.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 3.1.1 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีช่วง I เป็นโดเมนจะเรียกฟังก์ชันที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=\left(f(t),g(t)\right)$ ว่าเป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จากช่วง I ไปยัง R^2 เรียกช่วง I ว่าโดเมนของฟังก์ชัน $\vec{r}$ และ เรียก $f(t),g(t)$ ว่าส่วนประกอบของ $\vec{r}$

นิยาม 3.1.2 ให้ f,g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีช่วง I เป็นโดเมนจะเรียกฟังก์ชันที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=\left(f(t),g(t),h(t)\right)$ ว่าเป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จากช่วง I ไปยัง R^3 เรียกช่วง I ว่าโดเมนของฟังก์ชัน $\vec{r}$ และเรียก $f(t),g(t),h(t)$ ว่าส่วนประกอบของ $\vec{r}$

ตัวอย่าง 3.1.1 ให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บน R^2 โดย $\vec{r}(t)=\left(\dfrac{t^2}{t-2}\right)\vec{i}+\left(\sqrt{t-2}\right)\vec{j}$ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $\vec{r}$

วิธีทำ ให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}$

พบว่า $f(t)=\dfrac{t^2}{t-2}$ เป็นส่วนประกอบตามแนวแกน X

ฟังก์ชัน $f(t)$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $t-2\neq 0$

นั่นคือ $t\neq 2$

ดังนั้น โดเมนของ $f(t)$ คือ $D_f=\{t\in R\,|\,t\neq 2\}$

พบว่า $g(t)=\sqrt{t-2}$ เป็นส่วนประกอบตามแนวแกน Y

ฟังก์ชัน $g(t)$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $t-2\geq 0$

นั่นคือ $t\geq 2$

ดังนั้น โดเมนของ $g(t)$ คือ $D_g=\{t\in R\,|\,t\geq 2\}$

โดเมนของ $\vec{r}$ คือ $D_f\cap D_g=\{t\in R\,|\,t>2\}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 3.1.2 ให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บน R^3 โดย

$\vec{r}(t)=\cos(t)\vec{i}+\ln(4-t)\vec{j}+\sqrt{t+4}\vec{k}$ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $\vec{r}$

วิธีทำ ให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$

พบว่า $f(t)=\cos(t)$ เป็นส่วนประกอบตามแนวแกน X

นั่นคือ ฟังก์ชัน $f(t)$ จะเป็นจริงทุกค่า t

ดังนั้น โดเมนของ $f(t)$ คือ $D_f=R$

พบว่า $g(t)=\ln(4-t)$ เป็นส่วนประกอบตามแนวแกน Y

ฟังก์ชัน $g(t)$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $4-t>0$

นั่นคือ $t<4$

ดังนั้น โดเมนของ $g(t)$ คือ $D_g=\{t\in R\,|\,t<4\}$

พบว่า $h(t)=\sqrt{t+4}$ เป็นส่วนประกอบตามแนวแกน Z

ฟังก์ชัน $h(t)$ จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $t+4\geq 0$

$t\geq -4$

ดังนั้น โดเมนของ $h(t)$ คือ $D_h=\{t\in R\,|\,t\geq -4\}$

โดเมนของ $\vec{r}$ คือ $D_f\cap D_g\cap D_h=\{t\in R\,|\,4>t\geq -4\}$

เนื่องจากเวกเตอร์บน R^2 เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (x,y) และเวกเตอร์บน R^3 เขียนแทนด้วยคู่อันดับ (x,y,z) จากนิยาม 3.1.1 สามารถเขียน $\vec{r}(t)=(f(t),g(t))$ แทนด้วย $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ เมื่อ $t\in I$ และ จากนิยาม 3.1.2 สามารถเขียน $\vec{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$ แทนด้วย $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ เมื่อ $t\in I$

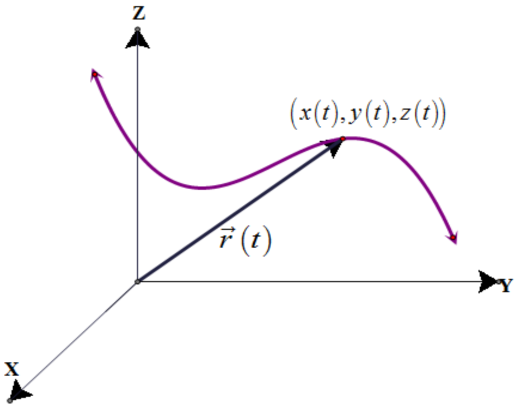
นิยาม 3.1.3 ให้ $x=x(t), y=y(t)$ และ $z=z(t)$ เมื่อ $t\in I$ เป็นช่วง แล้วเรียกเซตของจุด $(x(t),y(t),z(t))$ ทั้งหมดว่าเส้นโค้งบน R^3 (space curve) และถ้าให้

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

เมื่อ $t\in I$ เรียก $\vec{r}(t)$ ว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และเรียก $x(t),y(t)$ และ $z(t)$ ว่าส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r}\in R^3$ จะมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด เซตของจุดปลายของเวกเตอร์ $\vec{r}$ จะมีพิกัดเป็น (x,y,z) จะเป็นเส้นโค้ง เมื่อ $x=f(t), y=g(t)$ และ $z=h(t)$ และเรียก ฟังก์ชัน อิงตัวแปรเสริม (parametric equation) ของเส้นโค้ง ถ้ากำจัดตัวแปร t โดยจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของ x, y และ z จะได้ สมการคาร์ทีเซียน (cartesian equation) ของเส้นโค้ง

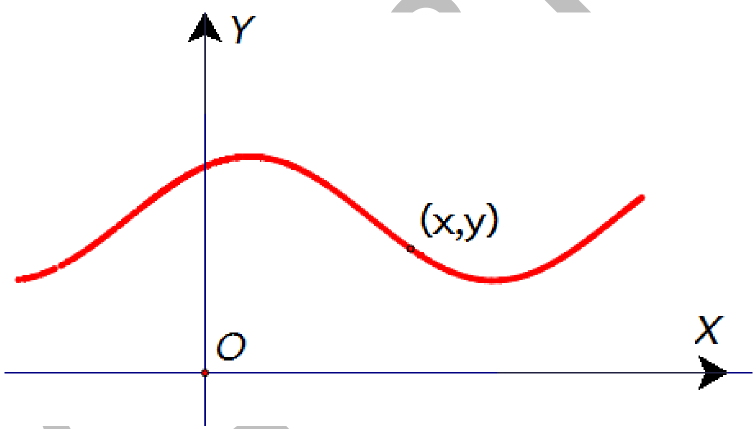
ตัวอย่าง



ภาพที่ 3.1.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$

การเคลื่อนที่บนปริภูมิสองมิติ

พิจารณากราฟของเส้นโค้งบนสองมิติ



ภาพที่ 3.1.2 การเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งบนสองมิติ

จากภาพที่ 3.1.2 การเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งบนสองมิติในระนาบ XY พิกัด (x, y) บนเส้นโค้งแสดงตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t ใด ๆ ทั้ง x และ y เป็นฟังก์ชันของ t ถ้ากำหนดให้ $a \le t \le b$ เป็นช่วงเวลาของการเคลื่อนที่ จะได้

$$x = f(t), y = g(t),\ \ a \le t \le b \qquad \text{............}(1)$$

และ

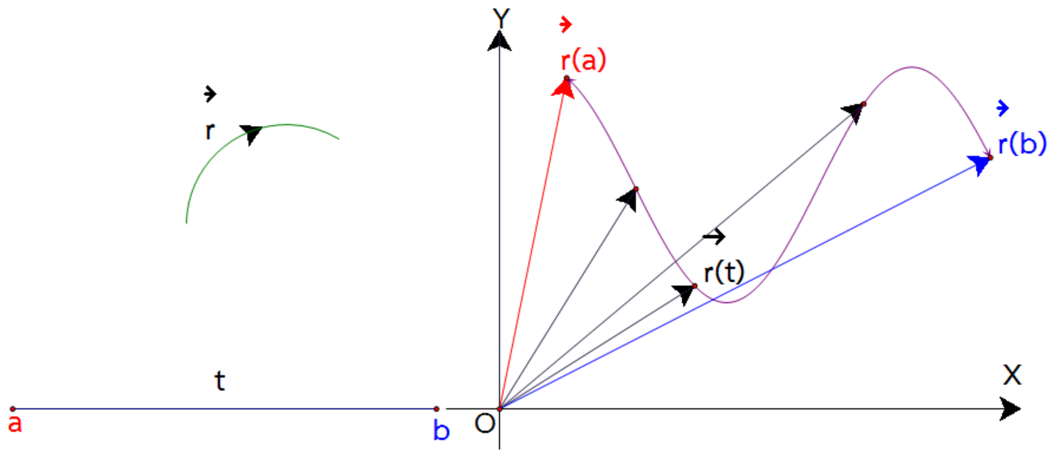
$$(x, y) = (f(t), g(t)),\ \ t \in [a, b]$$

ดังนั้น $(f(t), g(t))$ เป็นค่าของฟังก์ชันจากช่วง $[a,b]$ ไปยัง R^2 จะแทนฟังก์ชันนี้ด้วย $\vec{r}$

กล่าวคือ

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} \quad \text{เมื่อ } t \in [a, b] \qquad \text{............}(2)$$

ดังนั้น $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จาก $[a,b]$ ไปยัง R^2 และเป็นฟังก์ชันตำแหน่ง ของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ณ เวลา t ใด ๆ



ภาพที่ 3.1.3 การเคลื่อนที่ของ $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a \le t \le b$

จากภาพที่ 3.1.3 พิสัยของ $\vec{r}(t)$ คือ รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ซึ่งมี $\vec{r}(a)$ เป็นจุดเริ่มต้นและ $\vec{r}(b)$ เป็นจุดสุดท้ายของการเคลื่อนที่

ในการหาตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t สามารถหาได้โดยการกำหนด t ในสมการ (1) หรือสมการ (2)

สมการ (1) เรียกสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่บนสองมิติ และเรียก t ว่าตัวแปร เรียกสมการ (2) ว่าสมการค่าเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่บนสองมิติ

ในการเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ซึ่งกำหนดสมการการเคลื่อนที่ในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม (1) หรือ สมการเวกเตอร์ (2) ทำได้โดย

1. กำหนดค่าตัวแปร t และคำนวณหาค่า x และ y จากสมการ
2. กำจัดตัวแปร t และสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y โดยตรง สมการที่ได้คือสมการคาร์ทีเซียน ของเส้นโค้งของการเคลื่อนที่

ตัวอย่าง 3.1.3 กำหนด $x = t^2 + 1$ และ $y = t - 2$ เมื่อ $0 \le t \le 5$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ จงเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่

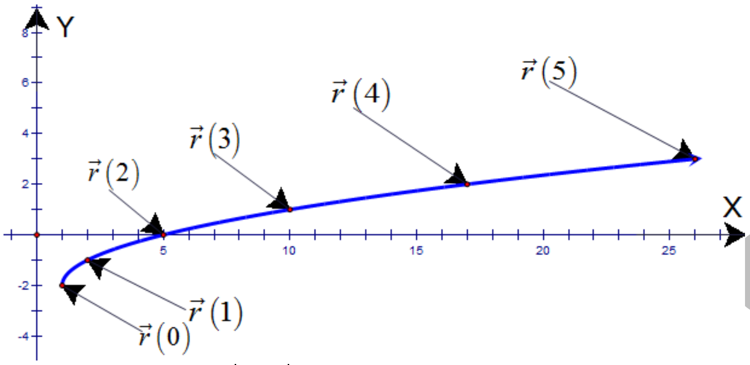
วิธีทำ ฟังก์ชันตำแหน่งของการเคลื่อนที่ คือ $\vec{r}(t) = (t^2+1)\vec{i} + (t-2)\vec{j}$ เมื่อ $0 \le t \le 5$ กำหนดค่า t บางค่าและคำนวณหาค่า x และ y ดังตารางที่ 3.1.1

ตารางที่ 3.1.1 ค่า x, y เมื่อกำหนดค่า t ของ $\vec{r}(t) = (t^2+1)\vec{i} + (t-2)\vec{j}$

t	0	1	2	3	4	5
x	1	2	5	10	17	26
y	-2	-1	0	1	2	3

ตัวอย่าง

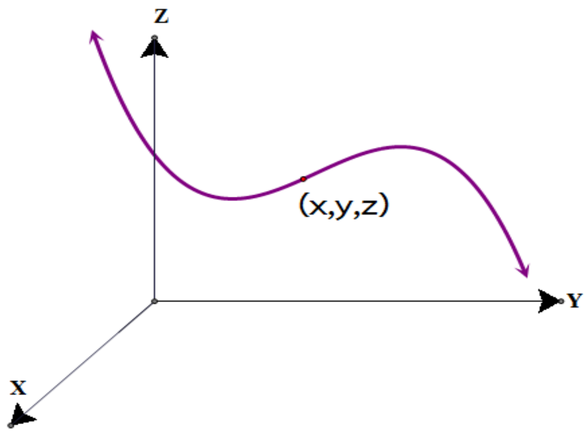
ในการเขียนรอยทางเดินหรือเส้นโค้งของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t)$ นำพิกัด $(x(t),y(t))$ ของ $\vec{r}(t)$ ไปกำหนดจุดบนระนาบ XY ได้ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t ดังภาพที่ 3.1.4



ภาพที่ 3.1.4 รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t)$

การเคลื่อนที่บนปริภูมิสามมิติ

พิจารณากราฟของเส้นโค้งบนปริภูมิสามมิติ



ภาพที่ 3.1.5 การเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งบนปริภูมิสามมิติ

จากภาพที่ 3.1.5 แสดงรอยทางเดินของการเคลื่อนที่บนปริภูมิสามมิติ พิกัด $(x(t),y(t),z(t))$ ของ $\vec{r}(t)$ บนเส้นโค้งแสดงตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t ใด ๆ ค่า x,y,z เปลี่ยนตามค่า t หรือ x,y,z เป็นฟังก์ชันของ t เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่บนสองมิติจะได้

$$x=f(t),y=g(t),z=h(t) \text{ เมื่อ } a\le t\le b \quad ....(3)$$

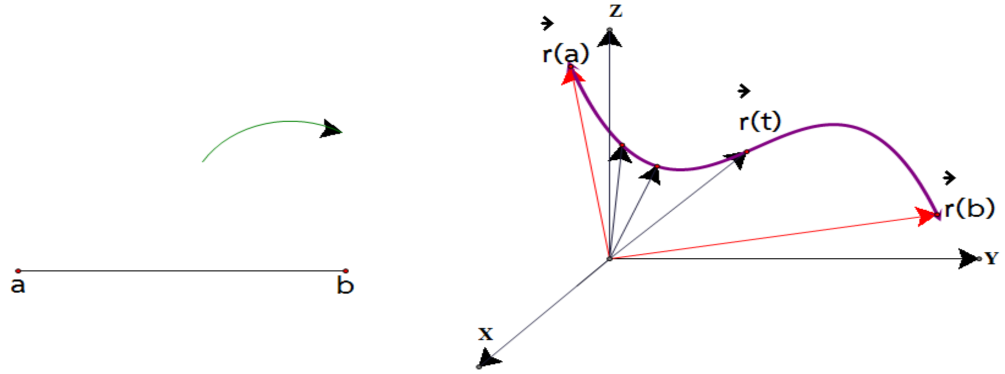
สมการ (3) เรียกสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่บนปริภูมิสามมิติ และจากสมการ (3) จะได้ $$(x,y,z)=(f(t),g(t),h(t)) \text{ เมื่อ } a\le t\le b$$

เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

จะได้ $$\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k} \text{ เมื่อ } a\le t\le b \quad ....(4)$$

ดังนั้น $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จากช่วง $[a,b]$ ไปยัง R^3

พิจารณาภาพที่ 3.1.6 พิสัยของ $\vec{r}$ คือ รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ซึ่งมีจุด $\vec{r}(a)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุด $\vec{r}(b)$ เป็นจุดสิ้นสุด



ภาพที่ 3.1.6 รอยทางเดินซึ่งมีจุด $\vec{r}(a)$ เป็นจุดเริ่มต้นและจุด $\vec{r}(b)$ เป็นจุดสิ้นสุด

เรียกสมการ (3) ว่าสมการอิงตัวแปรเสริมของการเคลื่อนที่บนปริภูมิสามมิติ

และเรียกสมการ (4) ว่าสมการเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่บนปริภูมิสามมิติ

ในการเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ ใช้วิธีการเดียวกับการเคลื่อนที่บนสองมิติ

ตัวอย่าง 3.1.4 กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม $x=t^2, y=t-1$ และ $z=2t$ สำหรับ $t \in R$ จงเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ ของสมการที่กำหนดให้

วิธีทำ สร้างตารางกำหนดค่าของ t เพื่อหาค่าพิกัด (x, y, z) แล้วกำหนดจุดบนปริภูมิสามมิติ โดยกำหนดเรียงลำดับค่า t จากน้อยไปมาก ดังตารางที่ 3.1.2 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1.2 ค่า x, y และ z เมื่อกำหนดค่า t ของ $x=t^2, y=t-1$ และ $z=2t$

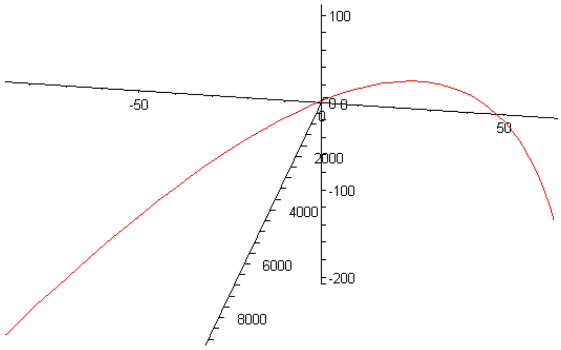
t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
x	0	25	100	225	400	625	900	1,225	1,600
y	-1	4	9	14	19	24	29	34	39
z	0	10	20	30	40	50	60	70	80

เมื่อกำหนดจุด (x, y, z) บนแกนพิกัดสามมิติและเขียนกราฟ โดยกำหนดค่าตามลำดับตามค่าของ t และจากสมการอิงตัวแปรเสริมสามารถเขียนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t-1)\vec{j} + 2t\vec{k}$$

ดังภาพที่ 3.1.7

ตัวอย่าง



ภาพที่ 3.1.7 รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ของ $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+(t-1)\vec{j}+2t\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.1.5 กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม $x=2\cos t, y=2\sin t$ และ $z=t$ สำหรับ $t\geq 0$ จงเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ของสมการที่กำหนดให้

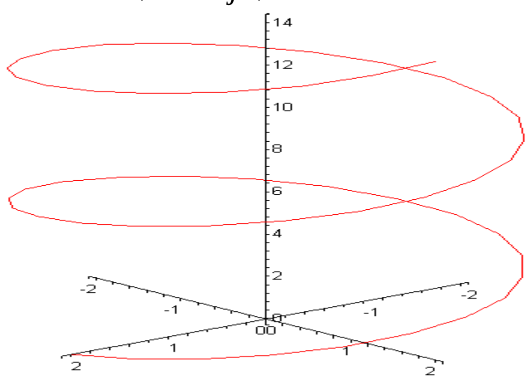
วิธีทำ สร้างตารางกำหนดค่าของ t เพื่อหาค่าพิกัด (x,y,z) แล้วกำหนดจุดบนปริภูมิสามมิติ โดยกำหนดเรียงลำดับค่า t จากน้อยไปมาก ดังตารางที่ 3.1.3 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1.3 ค่า x, y และ z เมื่อกำหนดค่า t ของ $x=2\cos t, y=2\sin t$ และ $z=t$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	2	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{3}$	-2
y	0	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	0
z	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

เมื่อกำหนดจุด (x,y,z) บนแกนพิกัดสามมิติและเขียนกราฟ โดยกำหนดค่าตามลำดับตามค่าของ t และจากสมการอิงตัวแปรเสริมสามารถเขียนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ ดังภาพที่ 3.1.8



ภาพที่ 3.1.8 รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ของ $\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+t\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.1.6 กำหนดสมการอิงตัวแปรเสริม $x=2\cos t, y=2\sin t$ และ $z=3$ สำหรับ $t>0$ จงเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ของสมการที่กำหนดให้

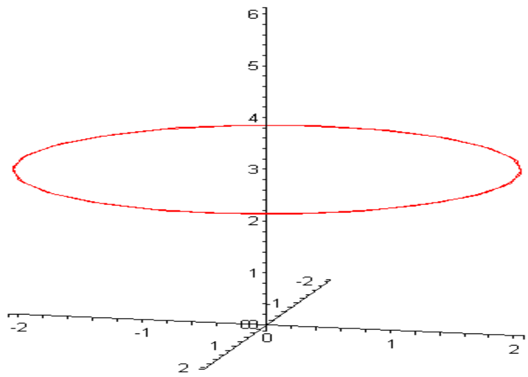
วิธีทำ สร้างตารางกำหนดค่าของ t เพื่อหาค่าพิกัด (x,y,z) แล้วกำหนดจุดบนปริภูมิสามมิติ โดยกำหนดเรียงลำดับค่า t จากน้อยไปมาก ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.1.4 ค่า x, y และ z เมื่อกำหนดค่า t ของ $x=2\cos t, y=2\sin t$ และ $z=3$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	2	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{3}$	-2
y	0	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	1	0
z	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π

เมื่อกำหนดจุด (x,y,z) บนแกนพิกัดสามมิติและเขียนกราฟ โดยกำหนดค่าตามลำดับตามค่าของ t และจากสมการอิงตัวแปรเสริมสามารถเขียนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+3\vec{k}$$ ดังภาพที่ 3.1.9



ภาพที่ 3.1.9 รอยทางเดินของการเคลื่อนที่ของ $\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}+3\vec{k}$

นิยาม 3.1.4 ให้ $\vec{r}(t),\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ t ในโดเมนของ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ แล้ว

1. $(\vec{r}\pm\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\pm\vec{s}(t)$
2. $(f\vec{r})(t)=f(t)\vec{r}(t)$
3. $(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$
4. $(\vec{r}\times\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$

นิยาม 3.1.5 ให้ $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง โดยที่ $f(t)$ มีพิสัยเป็นเซตย่อยของโดเมนของ $\vec{r}(t)$ ฟังก์ชันประกอบของ $f(t)$ กับ $\vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(\vec{r}\circ f)(t)$ คือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งมีโดเมนเท่ากับโดเมนของ $f(t)$ และค่าของฟังก์ชัน ณ จุด t กำหนดดังนี้ $(\vec{r}\circ f)(t)=\vec{r}\left(f(t)\right)$ สำหรับทุก t ในโดเมนของ $f(t)$

ข้อสังเกต

อาศัยการดำเนินการของเวกเตอร์เมื่อ $\vec{r}(t)$และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงจะได้ว่า

1. $\vec{r}(t)+\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
2. $f(t)\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
3. $\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง
3. $\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ตัวอย่าง 3.1.7 ให้ $\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+2t\vec{j}+t^2\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=2\vec{i}+t^2\vec{j}-(t+1)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บน R^3 และ $f(t)=t+2$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง จงหา

1. $(\vec{r}+\vec{s})(t)$ 2. $(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)$
3. $(\vec{r}\times\vec{s})(t)$ 4. $(\vec{r}\circ f)(t)$

วิธีทำ 1.

$$\begin{aligned}(\vec{r}+\vec{s})(t)&=\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\\&=\left(e^t\vec{i}+2t\vec{j}+t^2\vec{k}\right)+\left(2\vec{i}+t^2\vec{j}-(t+1)\vec{k}\right)\\&=\left(e^t+2\right)\vec{i}+\left(2t+t^2\right)\vec{j}+\left(t^2+[-(t+1)]\right)\vec{k}\\&=\left(e^t+2\right)\vec{i}+\left(2t+t^2\right)\vec{j}+\left(t^2-t-1\right)\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{r}+\vec{s})(t)=\left(e^t+2\right)\vec{i}+\left(2t+t^2\right)\vec{j}+\left(t^2-t-1\right)\vec{k}$

2.

$$\begin{aligned}(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)&=\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\\&=\left(e^t\vec{i}+2t\vec{j}+t^2\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+t^2\vec{j}-(t+1)\vec{k}\right)\\&=e^t(2)+(2t)\left(t^2\right)+\left(t^2\right)[-(t+1)]\\&=\left(2e^t\right)+\left(2t^3\right)+\left(-t^3-t^2\right)\\&=2e^t+t^3-t^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)=2e^t+t^3-t^2$

3. $$(\vec{r}\times\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ e^{t} & 2t & t^{2}\\ 2 & t^{2} & -(t+1)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}2t & t^{2}\\ t^{2} & -t-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}e^{t} & t^{2}\\ 2 & -t-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}e^{t} & 2t\\ 2 & t^{2}\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\left[2t(-t-1)-\left(t^{2}\times t^{2}\right)\right]\vec{i}-\left[e^{t}(-t-1)-2t^{2}\right]\vec{j}+\left[t^{2}e^{t}-4t\right]\vec{k}$$
$$=\left(-2t^{2}-2t-t^{4}\right)\vec{i}-\left(-te^{t}-e^{t}-2t^{2}\right)\vec{j}+\left(t^{2}e^{t}-4t\right)\vec{k}$$
$$=-\left(2t+2t^{2}+t^{4}\right)\vec{i}+\left(te^{t}+e^{t}+2t^{2}\right)\vec{j}+\left(t^{2}e^{t}-4t\right)\vec{k}$$

ดังนั้น $(\vec{r}\times\vec{s})(t)=-\left(2t+2t^{2}+t^{4}\right)\vec{i}+\left(te^{t}+e^{t}+2t^{2}\right)\vec{j}+\left(t^{2}e^{t}-4t\right)\vec{k}$

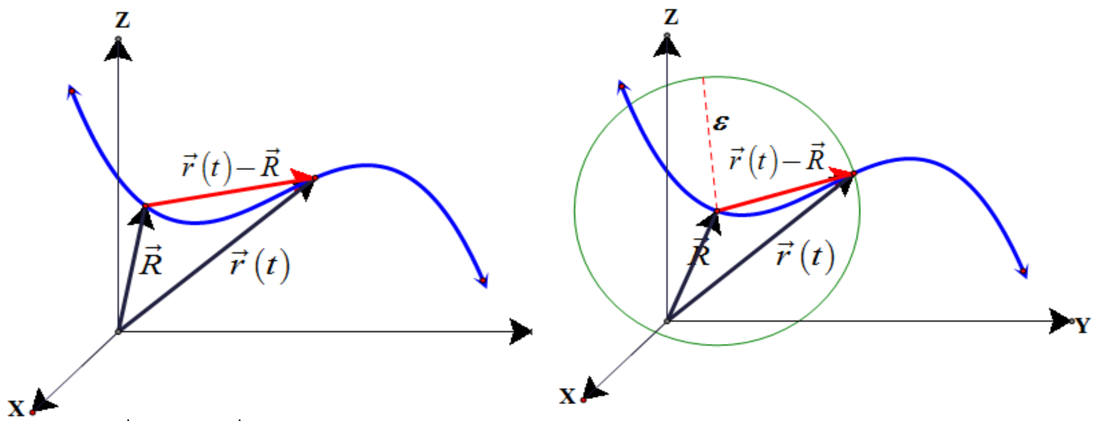
4. $$(\vec{r}\circ f)(t)=\vec{r}(f(t))$$
$$=\vec{r}(t+2)$$
$$=e^{(t+2)}\vec{i}+2(t+2)\vec{j}+(t+2)^{2}\vec{k}$$
$$=e^{(t+2)}\vec{i}+(2t+4)\vec{j}+\left(t^{2}+4t+4\right)\vec{k}$$

ดังนั้น $(\vec{r}\circ f)(t)=e^{(t+2)}\vec{i}+(2t+4)\vec{j}+\left(t^{2}+4t+4\right)\vec{k}$

3.2 ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 3.2.1 ให้ $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนช่วง I และ $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์จะกล่าวว่า $\vec{r}(t)$ มี $\vec{R}$ เป็นลิมิต เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ เมื่อทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะสามารถหาจำนวน $\delta>0$ ที่ทำให้

$$0<\left|t-t_0\right|<\delta \text{ แล้ว } \left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\varepsilon \qquad \text{ทุกค่า } t\in I$$



ภาพที่ 3.2.1 $\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\varepsilon$

ตัวอย่าง

นิยาม 3.2.2 ให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนช่วง I แล้ว $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ จะมีค่าก็ต่อเมื่อ $\lim_{t\to t_0}f(t),\lim_{t\to t_0}g(t)$ และ $\lim_{t\to t_0}h(t)$ มีค่า กล่าวคือ

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}g(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}h(t)\vec{k}$$

ตัวอย่าง 3.2.1 กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\frac{\sin t}{t}\vec{k}$ จงหา $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)&=\lim_{t\to 0}\left(e^t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\frac{\sin t}{t}\vec{k}\right)\\&=\left(\lim_{t\to 0}e^t\right)\vec{i}+\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)\vec{j}+\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)\vec{k}\\&=e^0\vec{i}+\cos(0)\vec{j}+(1)\vec{k}\\&=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $\vec{r}(t)=\sin(t\pi)\vec{i}+(e^t+2)\vec{j}+(t^2-3t+4)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหา $\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)&=\lim_{t\to 2}\left[\sin(t\pi)\vec{i}+(e^t+2)\vec{j}+(t^2-3t+4)\vec{k}\right]\\&=\left[\lim_{t\to 2}\sin(t\pi)\right]\vec{i}+\left[\lim_{t\to 2}(e^t+2)\right]\vec{j}+\left[\lim_{t\to 2}(t^2-3t+4)\right]\vec{k}\\&=\sin(2\pi)\vec{i}+(e^2+2)\vec{j}+(2^2-6+4)\vec{k}\\&=0\vec{i}+(7.39+2)\vec{j}+2\vec{k}\\&=9.39\vec{j}+2\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)=9.39\vec{j}+2\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t^2\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหา $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)&=\lim_{t\to 0}\left(e^t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t^2\vec{k}\right)\\&=\left(\lim_{t\to 0}e^t\right)\vec{i}+\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)\vec{j}+\left(\lim_{t\to 0}t^2\right)\vec{k}\\&=e^0\vec{i}+\cos(0)\vec{j}+(0)^2\vec{k}\\&=\vec{i}+\vec{j}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=\vec{i}+\vec{j}$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ บนช่วง I และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ $t\in I$ ถ้า $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}, \lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ และ $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=L$ แล้ว $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t)=L\vec{R}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t)=L\vec{R}$ สำหรับ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ และ $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=L$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เลือก $\varepsilon'=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{|L|+|\vec{r}|+1}\right\}$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งทำให้

$$0<|t-t_0|<\delta \text{ แล้ว } \left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\varepsilon' \text{ และ } \left|f(t)-L\right|<\varepsilon'$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}|f(t)| &= |f(t)-L+L|\\ &\le |f(t)-L|+|L|\\ &<\varepsilon'+|L|\\ &<1+|L|\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}f(t)\vec{r}(t)-L\vec{R} &= f(t)\vec{r}(t)-f(t)\vec{R}+f(t)\vec{R}-L\vec{R}\\ &= f(t)\left[\vec{r}(t)-\vec{R}\right]+\vec{R}\left[f(t)-L\right]\end{aligned}$$

จึงได้ว่า
$$\begin{aligned}\left|f(t)\vec{r}(t)-L\vec{R}\right| &= \left|f(t)\left[\vec{r}(t)-\vec{R}\right]+\vec{R}\left[f(t)-L\right]\right|\\ &\le |f(t)|\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|+\left|\vec{R}\right|\left|f(t)-L\right|\\ &<|f(t)|\varepsilon'+\left|\vec{R}\right|\varepsilon'\\ &<(1+|L|)\varepsilon'+\left|\vec{R}\right|\varepsilon'=\left(1+|L|+\left|\vec{R}\right|\right)\varepsilon'\\ &<\left(1+|L|+\left|\vec{R}\right|\right)\left(\frac{\varepsilon}{|L|+\left|\vec{R}\right|+1}\right)=\varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t)=L\vec{R}$

ทฤษฎีบท 3.2.2 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆบนช่วง I สำหรับ $t\in I$ ถ้า $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ และ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ แล้ว $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=\vec{R}+\vec{S}$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\lim\limits_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=\vec{R}+\vec{S}$

สำหรับ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ และ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ ให้ ε เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ จะมี $\delta_1>0$ ซึ่ง $0<|t-t_0|<\delta_1$ แล้ว $\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

และ จาก $\lim_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ จะมี $\delta_2>0$ ซึ่ง $0<|t-t_0|<\delta_2$ แล้ว $\left|\vec{s}(t)-\vec{S}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ให้ $0<|t-t_0|<\delta$

จึงได้ว่า $\quad 0<|t-t_0|<\delta\le\delta_1$ และ $0<|t-t_0|<\delta\le\delta_2$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]-\left(\vec{R}+\vec{S}\right)\right| &= \left|\left[\vec{r}(t)-\vec{R}\right]+\left[\vec{s}(t)-\vec{S}\right]\right|\\ &\le \left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|+\left|\vec{s}(t)-\vec{S}\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=\vec{R}+\vec{S}$

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ บนช่วง I สำหรับ $t\in I$ ถ้า

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R} \text{ และ } \lim_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S} \text{ แล้ว } \lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=\vec{R}\cdot\vec{S}$$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=\vec{R}\cdot\vec{S}$

สำหรับ $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ และ $\lim_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ ให้ ε เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ จะมี $\delta_1>0$ ซึ่ง $0<|t-t_0|<\delta_1$ แล้ว $\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\frac{\varepsilon}{2\left|\vec{s}(t)\right|}$

และจาก $\lim_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ จะมี $\delta_2>0$ ซึ่ง $0<|t-t_0|<\delta_2$ แล้ว $\left|\vec{s}(t)-\vec{S}\right|<\frac{\varepsilon}{2\left|\vec{R}\right|}$

เลือก $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ให้ $0<|t-t_0|<\delta$

จึงได้ว่า $\quad 0<|t-t_0|<\delta\le\delta_1$ และ $0<|t-t_0|<\delta\le\delta_2$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)-\vec{R}\cdot\vec{S}\right| &= \left|\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)-\vec{R}\cdot\vec{S}+\vec{s}(t)\cdot\vec{R}-\vec{s}(t)\cdot\vec{R}\right|\\ &= \left|\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)-\vec{s}(t)\cdot\vec{R}+\vec{s}(t)\cdot\vec{R}-\vec{r}\cdot\vec{s}\right|\\ &\le \left|\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)-\vec{s}(t)\cdot\vec{R}\right|+\left|\vec{s}(t)\cdot\vec{R}-\vec{R}\cdot\vec{S}\right|\\ &= \left|\vec{s}(t)\cdot\left[\vec{r}(t)-\vec{R}\right]\right|+\left|\vec{R}\cdot\left(\vec{s}(t)-\vec{S}\right)\right|\\ &= \left|\vec{s}(t)\cdot\left[\vec{r}(t)-\vec{R}\right]\right|+\left|\vec{R}\cdot\left(\vec{s}(t)-\vec{S}\right)\right|\\ &= \left|\vec{s}(t)\right|\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|+\left|\vec{R}\right|\left|\vec{s}(t)-\vec{S}\right|\\ &< \left|\vec{s}(t)\right|\frac{\varepsilon}{2\left|\vec{s}(t)\right|}+\left|\vec{R}\right|\frac{\varepsilon}{2\left|\vec{R}\right|}=\varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=\vec{R}\cdot\vec{S}$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ บนช่วง I สำหรับ $t \in I$ ถ้า

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{R} \text{ และ } \lim_{t \to t_0} \vec{s}(t) = \vec{S} \text{ แล้ว } \lim_{t \to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t) \right] = \vec{R} \times \vec{S}$$

พิสูจน์ จะแสดงว่า $\lim_{t \to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t) \right] = \vec{R} \times \vec{S}$

สำหรับ $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{R}$ และ $\lim_{t \to t_0} \vec{s}(t) = \vec{S}$ ให้ ε เป็นจำนวนเต็มบวก

สำหรับ $\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{R}$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $0 < |t - t_0| < \delta_1$ แล้ว $\left| \vec{r}(t) - \vec{R} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2\left| \vec{s}(t) \right|}$

และ สำหรับ $\lim_{t \to t_0} \vec{s}(t) = \vec{S}$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $0 < |t - t_0| < \delta_2$ แล้ว $\left| \vec{s}(t) - \vec{S} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2\left| \vec{R} \right|}$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ให้ $0 < |t - t_0| < \delta$

จึงได้ว่า $0 < |t - t_0| < \delta \le \delta_1$ และ $0 < |t - t_0| < \delta \le \delta_2$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\left| \vec{r}(t) \times \vec{s}(t) - \vec{R} \times \vec{S} \right| &= \left| \vec{r}(t) \times \vec{s}(t) - \vec{R} \times \vec{S} + \vec{s}(t) \times \vec{R} - \vec{R} \times \vec{s}(t) \right| \\
&= \left| \vec{r}(t) \times \vec{s}(t) - \vec{R} \times \vec{s}(t) + \vec{s}(t) \times \vec{R} - \vec{R} \times \vec{S} \right| \\
&= \left| \left[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t) - \vec{R} \times \vec{s}(t) \right] + \left[\vec{s}(t) \times \vec{R} - \vec{R} \times \vec{S} \right] \right| \\
&\le \left| \vec{r}(t) \times \vec{s}(t) - \vec{R} \times \vec{s}(t) \right| + \left| \vec{s}(t) \times \vec{R} - \vec{R} \times \vec{S} \right| \\
&= \left| \left[\vec{r}(t) - \vec{R} \right] \times \vec{s}(t) \right| + \left| \left[\vec{s}(t) - \vec{S} \right] \times \vec{R} \right| \\
&= \left| \vec{r}(t) - \vec{R} \right| \left| \vec{s}(t) \right| + \left| \vec{s}(t) - \vec{S} \right| \left| \vec{R} \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2\left| \vec{s}(t) \right|} \left| \vec{s}(t) \right| + \frac{\varepsilon}{2\left| \vec{R} \right|} \left| \vec{R} \right| = \varepsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{t \to t_0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t) \right] = \vec{R} \times \vec{S}$

ตัวอย่าง 3.2.4 กำหนดให้ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \left(5t^2 + 3t - 2\right)\vec{i} + \left(e^{\sin t}\right)\vec{j} - t\vec{k}$, $\vec{s}(t) = (t-1)\vec{i} + \left(t^2 - 2t\right)\vec{j} + t^3\vec{k}$ และฟังก์ชันค่าจริง $f(t) = 5t^2 + t + 3$

จงหาค่า

1. $\lim_{t \to 0} f(t)\vec{r}(t)$
2. $\lim_{t \to 0} \left[\vec{r}(t) + \vec{s}(t) \right]$
3. $\lim_{t \to 0} \left[\vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t) \right]$
4. $\lim_{t \to 0} \left[\vec{r}(t) \times \vec{s}(t) \right]$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to 0}\left[\left(5t^2+3t-2\right)\vec{i}+\left(e^{\sin t}\right)\vec{j}-t\vec{k}\right]$

$$=\lim_{t\to 0}\left(5t^2+3t-2\right)\vec{i}+\lim_{t\to 0}\left(e^{\sin t}\right)\vec{j}-\lim_{t\to 0}t\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}+\vec{j}$$

$$\lim_{t\to 0}\vec{s}(t)=\lim_{t\to 0}\left[(t-1)\vec{i}+\left(t^2-2t\right)\vec{j}+t^3\vec{k}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}(t-1)\vec{i}+\lim_{t\to 0}\left(t^2-2t\right)\vec{j}+\lim_{t\to 0}t^3\vec{k}$$

$$=-\vec{i}$$

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\left(5t^2+t+3\right)$$

$$=3$$

1. $\lim_{t\to 0}f(t)\vec{r}(t)=\lim_{t\to 0}f(t)\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)$

$$=3\left(-2\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$=-6\vec{i}+3\vec{j}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}f(t)\vec{r}(t)=-6\vec{i}+3\vec{j}$

2. $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)+\lim_{t\to 0}\vec{s}(t)$

$$=\left(-2\vec{i}+\vec{j}\right)+\left(-\vec{i}\right)$$

$$=-3\vec{i}+\vec{j}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=-3\vec{i}+\vec{j}$

3. $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=\left[\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)\right]\cdot\left[\lim_{t\to 0}\vec{s}(t)\right]$

$$=\left(-2\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\left(-\vec{i}\right)$$

$$=(-2)(-1)+(1)(0)$$

$$=2$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=2$

4. $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]=\left[\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)\right]\times\left[\lim_{t\to 0}\vec{s}(t)\right]$

$$=\left(-2\vec{i}+\vec{j}\right)\times\left(-\vec{i}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=0\vec{i}-0\vec{j}+\left[0-(-1)\right]\vec{k}$$

$$=\vec{k}$$

ดังนั้น $\lim_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]=\vec{k}$

3.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 3.3.1 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1.หาค่า $\vec{r}(t_0)$ ได้

2. หาค่า $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ ได้ และ

3. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$

หรือ จะกล่าวว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ t_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$

ถ้า $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดบนช่วง I ใด ๆ จะกล่าวว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบนช่วง I

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$ ก็ต่อเมื่อ f,g และ h ต่อเนื่องที่ $t=t_0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ ให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$

ดังนั้น
$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$$
$$\lim_{t\to t_0}\left(f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}\right)=f(t_0)\vec{i}+g(t_0)\vec{j}+h(t_0)\vec{k}$$
$$\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}g(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}h(t)\vec{k}=f(t_0)\vec{i}+g(t_0)\vec{j}+h(t_0)\vec{k}$$

เนื่องจาก $\vec{i},\vec{j}$ และ $\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ค่าคงตัว

จึงได้
$$\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{i}=\vec{i}\left(\lim_{t\to t_0}f(t)\right)$$
$$\lim_{t\to t_0}g(t)\vec{j}=\vec{j}\left(\lim_{t\to t_0}g(t)\right)$$
$$\lim_{t\to t_0}h(t)\vec{k}=\vec{k}\left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)$$

โดยนิยามการเท่ากันของเวกเตอร์ จะได้
$$\lim_{t\to t_0}f(t)=f(t_0),\lim_{t\to t_0}g(t)=g(t_0)\text{ และ }\lim_{t\to t_0}h(t)=h(t_0)$$

จึงได้ว่า $f(t),g(t)$ และ $h(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$

$\Leftarrow$ ให้ $f(t),g(t)$ และ $h(t)$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=f(t_0),\lim\limits_{t\to t_0}g(t)=g(t_0)$ และ $\lim\limits_{t\to t_0}h(t)=h(t_0)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)&=\lim_{t\to t_0}\left(f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}\right)\\&=\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}g(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}h(t)\vec{k}\\&=\vec{i}\left(\lim_{t\to t_0}f(t)\right)+\vec{j}\left(\lim_{t\to t_0}g(t)\right)+\vec{k}\left(\lim_{t\to t_0}h(t)\right)\end{aligned}$$

$$= f(t_0)\vec{i} + g(t_0)\vec{j} + h(t_0)\vec{k} = \vec{r}(t_0)$$

จึงได้ว่า $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t = t_0$

ดังนั้น ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ $t = t_0$ ก็ต่อเมื่อ f, g และ h ต่อเนื่องที่ $t = t_0$

ถ้า $\vec{r}(t)$เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ซึ่งต่อเนื่องสำหรับทุกๆ ค่า $t \in I$ แล้วจะทำให้ได้ว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบน I จึงได้ข้อสรุปว่า

กำหนดให้ $\vec{r}(t)$และ $\vec{s}(t)$เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ$t \in I$ และต่อเนื่องบน I แล้ว $f(t)\vec{r}(t), \vec{r}(t) + \vec{s}(t), \vec{r}(t) \cdot \vec{s}(t)$ และ $\vec{r}(t) \times \vec{s}(t)$ ต่อเนื่องบน I

ตัวอย่าง 3.3.1 ให้ $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j} - 3t\vec{k}$ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงพิจารณาว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ $t = 1$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j} - 3t\vec{k}$

พิจารณา
$$\vec{r}(1) = (1^2)\vec{i} + (1^2 - 1)\vec{j} - 3(1)\vec{k}$$
$$= \vec{i} - 3\vec{k}$$
$$\lim_{t\to 1}\vec{r}(t) = \left[\lim_{t\to 1} t^2\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to 1}(t^2 - t)\right]\vec{j} - \left[\lim_{t\to 1} 3t\right]\vec{k}$$
$$= \vec{i} - 3\vec{k}$$

และ
$$\lim_{t\to 1}\vec{r}(t) = \vec{r}(1)$$

ดังนั้น $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j} - 3t\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t = 1$

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \sin(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงพิจารณาว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \sin(t)\vec{k}$

พิจารณา
$$\vec{r}(0) = e^0\vec{i} + \cos(0)\vec{j} + \sin(0)\vec{k}$$
$$= \vec{i} + \vec{j}$$
$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to 0} e^t\right)\vec{i} + \left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)\vec{j} - \left(\lim_{t\to 0}\sin t\right)\vec{k}$$
$$= \vec{i} + \vec{j}$$
$$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t) = \vec{r}(0)$$

ดังนั้น $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \sin(t)\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t = 0$

ตัวอย่าง 3.3.3 ให้ $\vec{r}\,(t)=2t\vec{i}+3t\vec{j}+t^2\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงพิจารณาว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบนช่วงใด

วิธีทำ จาก $\vec{r}\,(t)=2t\vec{i}+3t\vec{j}+t^2\vec{k}$ จะพบว่าส่วนประกอบของฟังก์ชัน $\vec{r}$ คือ

$f\,(t)=2t$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R

$g\,(t)=3t$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R

และ $h(t)=t^2$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R

จึงได้ว่า ส่วนประกอบของฟังก์ชัน $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R ร่วมกัน
ดังนั้น ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}$ ต่อเนื่องบน R

ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาช่วงของจำนวนจริง t ซึ่งฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}\,(t)=\left(\sqrt{t+3}\right)\vec{i}+t^3\vec{j}+t^4\vec{k}$ ต่อเนื่อง

วิธีทำ จาก $\vec{r}\,(t)=\left(\sqrt{t+3}\right)\vec{i}+t^3\vec{j}+t^4\vec{k}$

พิจารณาส่วนประกอบของฟังก์ชัน $\vec{r}$ คือ

$f\,(t)=\sqrt{t-3}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน $[3,\infty)$

$g\,(t)=t^3$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R

และ $h(t)=t^4$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบน R

ส่วนประกอบของฟังก์ชัน $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องบนช่วง $[3,\infty)$ ร่วมกัน
ดังนั้น $\vec{r}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[3,\infty)$

3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 34.1 ให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่ง มีความต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0\in I$ จะกล่าวว่า $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}\,(t_0+\Delta t)-\vec{r}\,(t_0)}{\Delta t}$ เมื่อลิมิตมีค่าว่าอนุพันธ์ของ $\vec{r}$ ที่ t_0 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\dfrac{d}{dt}\vec{r}\,(t)\Big|_{t=t_0}$ หรือ $\vec{r}\,'(t_0)$ นั่นคือ $\vec{r}\,'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}\,(t_0+\Delta t)-\vec{r}\,(t_0)}{\Delta t}$ เมื่อลิมิตมีค่า

จากนิยาม 3.4.1 จะกล่าวว่า $\vec{r}\,(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่ t_0 ถ้ากำหนดให้ $t_0+\Delta t=t_1$ เมื่อ $\Delta t\to 0$ จะได้ $t_1\to t_0$ ดังนั้น

$$\vec{r}\,'(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{\vec{r}\,(t_1)-\vec{r}\,(t_0)}{t_1-t_0}\ \text{เมื่อลิมิตมีค่า}$$

ทฤษฎีบท 3.4.1 ให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t ก็ต่อเมื่อส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t นั่นคือ $\vec{r}'(t)=f'(t)\vec{i}+g'(t)\vec{j}+h'(t)\vec{k}$

พิสูจน์ จาก $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}, t\in I$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(f(t+\Delta t)\vec{i}+g(t+\Delta t)\vec{j}+h(t+\Delta t)\vec{k}\right)-\left(f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}\right)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)\vec{i}-f(t)\vec{i}+g(t+\Delta t)\vec{j}-g(t)\vec{j}+h(t+\Delta t)\vec{k}-h(t)\vec{k}}{\Delta t} \\
&= \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]\vec{i}+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]\vec{j}+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right]\vec{k}
\end{aligned}
$$

แต่ $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$ เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่ t

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}=g'(t)$ เพราะว่า g มีอนุพันธ์ที่ t

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=h'(t)$ เพราะว่า h มีอนุพันธ์ที่ t

ดังนั้น $\vec{r}$ มีอนุพันธ์ที่ t จึงได้ว่า $\vec{r}'(t)=f'(t)\vec{i}+g'(t)\vec{j}+h'(t)\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.4.1 ให้ $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+e^t\vec{j}+\sin(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหา $\vec{r}'(t)$ และ $\vec{r}'(0)$

วิธีทำ จาก

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= t^2\vec{i}+e^t\vec{j}+\sin(t)\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}t^2\right)\vec{i}+\left(\frac{d}{dt}e^t\right)\vec{j}+\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{k} \\
&= 2t\vec{i}+e^t\vec{j}+\cos t\vec{k} \\
\vec{r}'(0) &= 2(0)\vec{i}+e^0\vec{j}+\cos(0)\vec{k} \\
&= \vec{j}+\vec{k}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\vec{r}'(t)=2t\vec{i}+e^t\vec{j}+\cos t\vec{k}$ และ $\vec{r}'(0)=\vec{j}+\vec{k}$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 3.4.2 ให้ $\vec{r}\left(t\right)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ และ $f\left(t\right)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ที่หาอนุพันธ์ได้ $\left(f\vec{r}\right)'(t)=\left(f\vec{r}'\right)(t)+\left(f'\vec{r}\right)(t)$

พิสูจน์

1. $$\begin{aligned}\left[f\left(t\right)\vec{r}\left(t\right)\right]' &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(f\vec{r}\right)(t+\Delta t)-\left(f\vec{r}\right)(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-f\left(t+\Delta t\right)\vec{r}\left(t\right)+f\left(t+\Delta t\right)\vec{r}\left(t\right)-f\left(t\right)\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)\left(\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)\right)+\vec{r}\left(t\right)\left(f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)\left(\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)\right)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t\right)\left(f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}f\left(t+\Delta t\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\vec{r}\left(t\right)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= f\left(t\right)\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}\right]+\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)}{\Delta t}\right]\vec{r}\left(t\right)\\
&= f\left(t\right)\vec{r}'\left(t\right)+f'\left(t\right)\vec{r}\left(t\right)\\
&= \left(f\vec{r}'\right)(t)+\left(f'\vec{r}\right)(t)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left[\left(f\vec{r}\right)(t)\right]'=\left(f\vec{r}'\right)(t)+\left(f'\vec{r}\right)(t)$

ทฤษฎีบท 3.4.3 ให้ $\vec{r}\left(t\right)$ และ $\vec{s}\left(t\right)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด t แล้ว

$$\left(\vec{r}+\vec{s}\right)'\left(t\right)=\vec{r}'\left(t\right)+\vec{s}'\left(t\right)$$

พิสูจน์ $$\begin{aligned}\left[\left(\vec{r}+\vec{s}\right)(t)\right]' &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\vec{r}+\vec{s}\right)(t+\Delta t)-\left(\vec{r}+\vec{s}\right)(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}\left(t+\Delta t\right)+\vec{s}\left(t+\Delta t\right)\right]-\left[\vec{r}\left(t\right)+\vec{s}\left(t\right)\right]}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)+\vec{s}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)-\vec{s}\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)+\vec{s}\left(t+\Delta t\right)-\vec{s}\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{s}\left(t+\Delta t\right)-\vec{s}\left(t\right)}{\Delta t}\\
&= \vec{r}'\left(t\right)+\vec{s}'\left(t\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left(\vec{r}+\vec{s}\right)'\left(t\right)=\vec{r}'\left(t\right)+\vec{s}'\left(t\right)$

ทฤษฎีบท 3.4.4 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด t แล้ว

$$(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)=(\vec{r}'\cdot\vec{s})(t)+(\vec{r}\cdot\vec{s}')(t)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\vec{r}\cdot\vec{s})(t+\Delta t)-(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\vec{s}(t)+\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\vec{s}(t)-\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]+\vec{s}(t)\cdot\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{s}(t)\cdot\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\vec{r}(t+\Delta t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\vec{s}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\\
&= \vec{r}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\cdot\vec{s}(t)\\
&= \vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)+\vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t)\\
&= (\vec{r}'\cdot\vec{s})(t)+(\vec{r}\cdot\vec{s}')(t)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)=(\vec{r}'\cdot\vec{s})(t)+(\vec{r}\cdot\vec{s}')(t)$

ทฤษฎีบท 3.4.5 ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด t แล้ว

$$(\vec{r}\times\vec{s})'(t)=(\vec{r}'\times\vec{s})(t)+(\vec{r}\times\vec{s}')(t)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]' &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\times\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\times\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{r}(t+\Delta t)\times\vec{s}(t)+\vec{r}(t+\Delta t)\times\vec{s}(t)-\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\times\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]+\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]\times\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)\times\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]\times\vec{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\vec{r}(t+\Delta t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\vec{s}(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \vec{r}(t)\times \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{s}(t+\Delta t)-\vec{s}(t)\right]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\right]}{\Delta t}\times \vec{s}(t)\\
&= \vec{r}(t)\times \vec{s}'(t)+\vec{r}'(t)\times \vec{s}(t)\\
&= (\vec{r}'\times\vec{s})(t)+(\vec{r}\times\vec{s}')(t)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\vec{r}\times\vec{s})'(t)=(\vec{r}'\times\vec{s})(t)+(\vec{r}\times\vec{s}')(t)$

ทฤษฎีบท 3.4.6 ให้ $\vec{r}(t),\vec{s}(t)$ และ $\vec{z}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด t แล้ว

$$\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t)=\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)$$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t) &= \left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z})'\right](t)\\
&= \left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\vec{r}(t)\cdot(\vec{s}\times\vec{z})'(t)\\
&= \left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\vec{r}(t)\cdot\left[(\vec{s}'\times\vec{z})(t)+(\vec{s}\times\vec{z}')(t)\right]\\
&= \left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\vec{r}(t)\cdot(\vec{s}'\times\vec{z})(t)+\vec{r}(t)\cdot(\vec{s}\times\vec{z}')(t)\\
&= \vec{r}(t)\cdot(\vec{s}\times\vec{z}')(t)+\vec{r}(t)\cdot(\vec{s}'\times\vec{z})(t)+\vec{r}'(t)\cdot(\vec{s}\times\vec{z})(t)\\
&= \left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t)=\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\cdot(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\cdot(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)$

ทฤษฎีบท 3.4.7 ให้ $\vec{r}(t),\vec{s}(t)$ และ $\vec{z}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด t แล้ว

$$\left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t)=\left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\times(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\times(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)$$

พิสูจน์

$$
\begin{aligned}
\left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t) &= \vec{r}'(t)\times(\vec{s}\times\vec{z})(t)+\vec{r}(t)\times(\vec{s}\times\vec{z})'(t)\\
&= \left[\vec{r}'\times(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\vec{r}(t)\times\left[(\vec{s}'\times\vec{z})(t)+(\vec{s}\times\vec{z}')(t)\right]\\
&= \left[\vec{r}'\times(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)+\vec{r}(t)\times(\vec{s}'\times\vec{z})(t)+\vec{r}(t)\times(\vec{s}\times\vec{z}')(t)\\
&= \left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\times(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\times(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z})\right]'(t)=\left[\vec{r}\times(\vec{s}\times\vec{z}')\right](t)+\left[\vec{r}\times(\vec{s}'\times\vec{z})\right](t)+\left[\vec{r}'\times(\vec{s}\times\vec{z})\right](t)$

ตัวอย่าง 3.4.2 ให้ $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+2t\vec{j}$ และ $\vec{s}(t)=t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหาค่า

1. $(\vec{r}+\vec{s})'(t)$ 2. $(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)$ 3. $(\vec{r}\times\vec{s})'(t)$

วิธีทำ 1.
$$
\begin{aligned}
(\vec{r}+\vec{s})'(t) &= \vec{r}'(t)+\vec{s}'(t)\\
&= \frac{d}{dt}\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)+\frac{d}{dt}\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)\\
&= \left[\frac{dt^2}{dt}\vec{i}+\frac{d(2t)}{dt}\vec{j}\right]+\left[\frac{dt}{dt}\vec{i}+\frac{d1}{dt}\vec{j}-\frac{dt^2}{dt}\vec{k}\right]\\
&= \left(2t\vec{i}+2\vec{j}\right)+\left(\vec{i}-2t\vec{k}\right)\\
&= (2t+1)\vec{i}+2\vec{j}-2t\vec{k}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\vec{r}+\vec{s})'(t)=(2t+1)\vec{i}+2\vec{j}-2t\vec{k}$

2.
$$
\begin{aligned}
(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t) &= (\vec{r}'\cdot\vec{s})(t)+(\vec{r}\cdot\vec{s}')(t)\\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\right]\cdot\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)+\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)\\
&= \left(2t\vec{i}+2\vec{j}\right)\cdot\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)+\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i}-2t\vec{k}\right)\\
&= \left[(2t)(t)+(2)(1)+(0)(-t^2)\right]+\left[(t^2)(1)+(2t)(0)+(0)(-2t)\right]\\
&= \left(2t^2+2\right)+t^2=3t^2+2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)=3t^2+2$

3.
$$
\begin{aligned}
(\vec{r}\times\vec{s})'(t) &= (\vec{r}'\times\vec{s})(t)+(\vec{r}\times\vec{s}')(t)\\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\right]\times\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)+\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\times\frac{d}{dt}\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)\\
&= \left(2t\vec{i}+2\vec{j}\right)\times\left(t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}\right)+\left(t^2\vec{i}+2t\vec{j}\right)\times\left(\vec{i}-2t\vec{k}\right)\\
&= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2t & 2 & 0\\ t & 1 & -t^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ t^2 & 2t & 0\\ 1 & 0 & -2t\end{vmatrix}\\
&= \left[\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -t^2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2t & 0\\ t & -t^2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2t & 2\\ t & 1\end{vmatrix}\vec{k}\right]+\left[\begin{vmatrix}2t & 0\\ 0 & -2t\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}t^2 & 0\\ 1 & -2t\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}t^2 & 2t\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}\right]\\
&= \left(-2t^2\vec{i}+2t^3\vec{j}+(2t-2t)\vec{k}\right)+\left(-4t^2\vec{i}+2t^3\vec{j}-2t\vec{k}\right)\\
&= -6t^2\vec{i}+4t^3\vec{j}-2t\vec{k}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\vec{r}\times\vec{s})'(t)=-6t^2\vec{i}+4t^3\vec{j}-2t\vec{k}$

ทฤษฎีบท 3.4.8 กฎลูกโซ่ (chain rule)

ถ้า $\vec{r}=\vec{z}(s)$ และ $s=f(t)$ หาอนุพันธ์ได้ และพิสัยของ s เป็นเซตย่อยของโดเมนของ $\vec{r}$ แล้ว $\vec{r}=(\vec{z}\cdot f)(t)$ จะหาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$(\vec{z}\cdot f)(t)=\vec{z}\left[f(t)\right]f'(t) \text{ หรือ } \frac{d\vec{u}}{dx}=\frac{d\vec{u}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

พิสูจน์ พิจารณา

$$(\vec{z}\cdot f)'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\vec{z}\cdot f)(t+\Delta t)-(\vec{z}\cdot f)(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{z}\left(f(t+\Delta t)\right)-\vec{z}\left(\cdot f(t)\right)}{\Delta t}$$

$$(\vec{z}\cdot f)'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{z}\left(f(t)+f(t+\Delta t)-f(t)\right)-\vec{z}\left(f(t)\right)}{\Delta t}$$

ถ้า $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)\neq 0$ เมื่อ $\Delta t\to 0$ จะได้ $\Delta s\to 0$ เช่นกัน

ดังนั้น

$$(\vec{z}\cdot f)'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{z}\left(f(t)+f(t+\Delta t)-f(t)\right)-\vec{z}\left(f(t)\right)}{\Delta t}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{z}\left(f(t)+\Delta s\right)-\vec{z}\left(f(t)\right)}{\Delta s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$=\vec{z}'\left(f(t)\right)f'(t)$$

ถ้า $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)=0$ จะได้ $f(t+\Delta t)=f(t)$

และ $\vec{z}\left(f(t+\Delta t)\right)=\vec{z}\left(f(t)\right)$

ดังนั้น $(\vec{z}\cdot f)'(t)=\vec{0}$ และ $f'(t)=0$

จะได้ $(\vec{z}\cdot f)'(t)=\vec{0}=\vec{v}'\left(f(t)\right)0=0=\vec{v}'\left(f(t)\right)f'(t)$

ดังนั้น $(\vec{z}\cdot f)'(t)=\vec{z}'\left(f(t)\right)f'(t)$ หรือ $\frac{d\vec{z}}{dt}=\frac{d\vec{z}}{ds}\frac{ds}{dt}$

นิยาม 3.4.2 อนุพันธ์อันดับที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$

ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{r}^{(n)}(t)$ กำหนดโดย $\vec{r}^{(n)}(t)=\frac{d}{dt}\left[\vec{r}^{(n-1)}(t)\right]$

สำหรับ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ สำหรับ $t\in I$

จะได้ $\vec{r}^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)\vec{i}+g^{(n)}(t)\vec{j}+h^{(n)}(t)\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.4.3 ให้ $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+2t\vec{j}+\sin(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหาค่า $\vec{r}^{(3)}(t)$

วิธีทำ จาก

$$\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+2t\vec{j}+\sin(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t)=\left[t^2\vec{i}+2t\vec{j}+\sin(t)\vec{k}\right]'=2t\vec{i}+2\vec{j}+\cos(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}^{(2)}(t)=\left[2t\vec{i}+2\vec{j}+\cos(t)\vec{k}\right]'=2\vec{i}-\sin(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}^{(3)}(t)=\left[2\vec{i}-\sin(t)\vec{k}\right]'=-\cos(t)\vec{k}$$

ดังนั้น $\vec{r}^{(3)}(t)=-\cos(t)\vec{k}$

ทฤษฎีบท 3.4.9 ถ้า $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ และมีขนาดคงตัวบนช่วงเปิด (a,b) แล้ว $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$ บนช่วงปิดนั้น นั่นคือ $\vec{r}(t)$ จะตั้งฉากกับ $\vec{r}'(t)$ สำหรับทุกค่า t บนช่วงเปิด (a,b)

พิสูจน์ จาก $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=\left|\vec{r}(t)\right|^2=k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

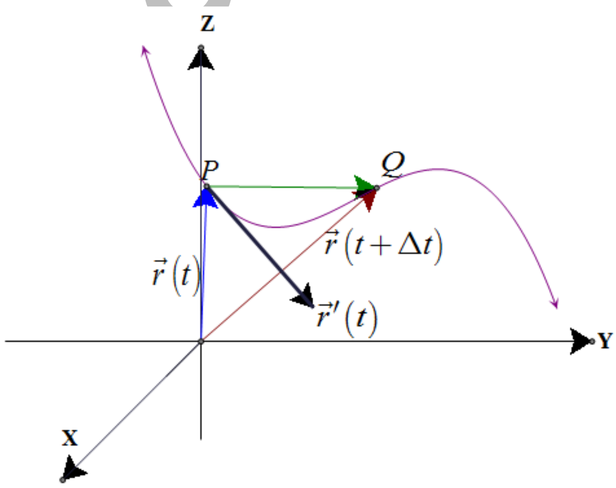
ดังนั้น หาอนุพันธ์ได้ $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)\right]=0$

ซ้ายมือได้ $\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}(t)+\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$

นั่นคือ $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$

3.5 ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง

กำหนดให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{r}(t+\Delta t)$ เป็นจุดสองจุดเส้นโค้งเรียบ คือ จุด P และ Q ดังภาพที่ 3.5.1



ภาพที่ 3.5.1 $\vec{r}(t),\vec{r}(t+\Delta t)$ และ $\vec{r}'(t)$

จากภาพที่ 3.5.1 จะได้ว่า เวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่จากจุด P ไปยังจุด Q คือเวกเตอร์

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

พบว่าเวกเตอร์ความเร็วเฉลี่ยมีทิศทางขนานกับ $\overrightarrow{PQ}$ ให้ $\Delta t \to 0$ จุด Q จะเข้าใกล้จุด P ตามเส้นโค้งเรียบ เวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ จะมีทิศทางเข้าสู่ทิศทางเส้นสัมผัสของเส้นโค้งเรียบ ณ จุด P และจะได้เวกเตอร์

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางในแนวเส้นสัมผัสของเส้นโค้งเรียบ ที่จุด P หรือเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นสัมผัสของเส้นโค้งเรียบ ณ จุด $\vec{r}(t)$ นั่นเอง แต่เนื่องจาก $\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$ เป็นความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่จากจุด $\vec{r}(t)$ ไปยัง $\vec{r}(t+\Delta t)$

นิยาม 3.5.1 กำหนดให้ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้งซึ่งราบเรียบใน R^3 ความเร็วเชิงเวกเตอร์ (velocity vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{v}(t)$ กำหนดโดย $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$ ทิศทางของการเคลื่อนที่ (direction of motion) คือ ทิศทางของ $\vec{v}(t)$ อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ (speed) คือขนาดของเวกเตอร์ $\vec{v}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $v(t)$ กำหนดโดย $v(t)=|\vec{v}(t)|$

นิยาม 3.5.2 สำหรับ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้งเรียบ สำหรับเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t)$ ณ จุด $\vec{r}(t)$ แล้ว ความเร่งเชิงเวกเตอร์ (acceleration vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{a}(t)$ กำหนดโดย $\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)$ อัตราเร่งของการเคลื่อนที่ คือ ขนาดของความเร่ง $\vec{a}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a(t)$ กำหนดโดย $a(t)=|\vec{a}(t)|$

ตัวอย่าง 3.5.1 ให้ $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+t\vec{j}+3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้งเรียบ จงหา

1. ความเร็วเชิงเวกเตอร์ ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$
2. อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$
3. ความเร่งเชิงเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$
4. อัตราเร่งของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$

วิธีทำ 1. ความเร็วเชิงเวกเตอร์ $\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$

$$=\frac{d}{dt}\left(t^2\vec{i}+t\vec{j}+3\vec{k}\right)$$

$$=\left(\frac{dt^2}{dt}\right)\vec{i}+\left(\frac{dt}{dt}\right)\vec{j}+\left(\frac{d3}{dt}\right)\vec{k}$$

$$=2t\vec{i}+\vec{j}$$

นั่นคือ ความเร็วเชิงเวกเตอร์ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $\vec{v}(t)=2t\vec{i}+\vec{j}$

จาก $\vec{v}(t)=2t\vec{i}+\vec{j}$

เมื่อ $t=2$ $\vec{v}(2)=2(2)\vec{i}+\vec{j}$

$$=4\vec{i}+\vec{j}$$

ดังนั้น ความเร็วเชิงเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$ คือ $4\vec{i}+\vec{j}$

2. จากความเร็วเชิงเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$ คือ $4\vec{i}+\vec{j}$

จาก $\vec{v}(2)=4\vec{i}+\vec{j}$

พิจารณา $\left|\vec{v}(2)\right|=\left|4\vec{i}+\vec{j}\right|$

$$=\sqrt{(4)^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{17}$$

ดังนั้น อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$ คือ $\sqrt{17}$ หน่วย/หน่วยเวลา

3. ความเร็วเชิงเวกเตอร์ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $\vec{v}(t)=2t\vec{i}+\vec{j}$

พิจารณา $\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)$

$$=\frac{d}{dt}\left(2t\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$=\frac{d2t}{dt}\vec{i}+\frac{d1}{dt}\vec{j}=2\vec{i}$$

นั่นคือ ความเร่ง ณ เวลา t ใด ๆ คือ $\vec{a}(t)=2\vec{i}$

จาก $\vec{a}(t)=2\vec{i}$

เมื่อ $t=2$ $\vec{a}(2)=2\vec{i}$

ดังนั้น ความเร่งเชิงเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$

4. จาก $\vec{a}(2)=2\vec{i}$

พิจารณา $a(2)=\left|\vec{a}(2)\right| =\left|2\vec{i}\right|=\sqrt{(2)^2}=2$

ดังนั้น อัตราเร่งของการเคลื่อนที่ ณ เวลา $t=2$ คือ 2 หน่วย/(หน่วยเวลา)^2

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 3.5.2 อนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งเกลี่ยวกลม ณ เวลา t ใด ๆ กำหนดโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t^3\vec{k}$ และเวลามีหน่วยเป็นวินาที ระยะการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นเมตร จงหา

1. ความเร็วเชิงเวกเตอร์และอัตราเร็วที่เวลาใด ๆ และเมื่อเวลา 3 วินาที
2. ความเร่งเชิงเวกเตอร์และอัตราเร่งที่เวลาใด ๆ และเมื่อเวลา 3 วินาที

วิธีทำ 1. ความเร็วเชิงเวกเตอร์ คือ

$$\begin{aligned}\vec{v}(t)&=\vec{r}'(t)\\&=\frac{d}{dt}\left[\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t^3\vec{k}\right]\\&=\left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{i}+\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{j}+\frac{dt^3}{dt}\vec{k}\\&=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น ความเร็ว ณ เวลา t ใด ๆ คือ $\vec{v}(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}$

จาก $\vec{v}(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}$

พิจารณา $t=3;$

$$\begin{aligned}\vec{v}(3)&=-\sin(3)\vec{i}+\cos(3)\vec{j}+3(3)^2\vec{k}\\&=-0.052\vec{i}+0.999\vec{j}+27\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น ความเร็วเชิงเวกเตอร์ ณ เวลา 3 วินาที คือ $\vec{v}(3)=-0.052\vec{i}+0.999\vec{j}+27\vec{k}$

จาก $\vec{v}(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}v(t)&=\left|\vec{v}(t)\right|\\&=\left|-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3t^2\vec{k}\right|\\&=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+\left(3t^2\right)^2}\\&=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+9t^4}\\&=\sqrt{1+9t^4}\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราเร็ว ณ เวลา t ใด ๆ คือ $v(t)=\sqrt{1+9t^4}$

จาก $v(t)=\sqrt{1+9t^4}$

เมื่อ $t=3;$

$$\begin{aligned}v(3)&=\sqrt{1+9(3)^4}\\&=\sqrt{730}\\&=27.02\end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราเร็ว ณ เวลา 3 วินาที คือ 27.02 เมตร/วินาที

2. จาก $\vec{v}(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$

พิจาณา $\qquad \vec{a}(t) = \vec{v}'(t)$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\left(-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right) \\
&= -\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{i} + \left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dt}3t^2\right)\vec{k} \\
&= -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 6t\vec{k}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ความเร่งเชิงเวกเตอร์ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $\vec{a}(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 6t\vec{k}$

จาก $\qquad \vec{a}(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 6t\vec{k}$

เมื่อ $t = 3;$ $\qquad \vec{a}(3) = -\cos(3)\vec{i} - \sin(3)\vec{j} + 6(3)\vec{k}$

$$
= -0.999\vec{i} - 0.052\vec{j} + 18\vec{k}
$$

ดังนั้น ความเร่ง ณ เวลา 3 นาที คือ $\vec{a}(3) = -0.999\vec{i} - 0.052\vec{j} + 18\vec{k}$

จาก $\qquad \vec{a}(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 6t\vec{k}$

พิจารณา $\qquad a(t) = \left|\vec{a}(t)\right|$

$$
\begin{aligned}
&= \left|-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j} + 6t\vec{k}\right| \\
&= \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (6t)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 36t^2} \\
&= \sqrt{1 + 36t^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อัตราเร่ง ณ เวลา t ใด ๆ $a(t) = \sqrt{1 + 36t^2}$

จาก $\qquad a(t) = \sqrt{1 + 36t^2}$

เมื่อ $t = 3;$ $\qquad a(3) = \sqrt{1 + 36(3)^2}$

$$
= \sqrt{325} = 18.03
$$

ดังนั้น อัตราเร่ง ณ เวลา 3 วินาที คือ 18.03 เมตร/วินาที^{2}

3.6 เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์แนวฉาก

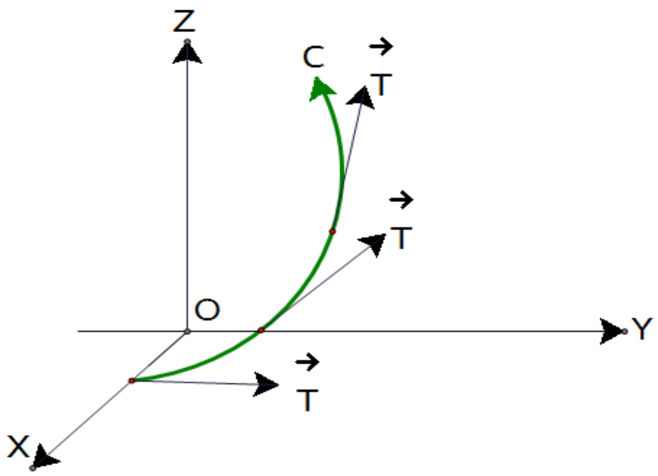
นิยาม 3.6.1 ให้ $\vec{r}(t)$ เป็นสมการเวกเตอร์ของส่วนโค้ง ให้ P_0 เป็นจุดบน $\vec{r}(t)$ ณ ที่ $t = t_0$ แล้วเรียก $\vec{r}'(t)$ ว่าเวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ จะได้ว่า

$$
\vec{r}'(t) = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}
$$

นิยาม 3.6.2 ให้ $\vec{r}(t)$ เป็นสมการเวกเตอร์ของส่วนโค้ง แล้วจะเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{r}'(t)$ ว่าเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (unit tangent vector) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{T}(t)$ กำหนดโดย

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|} \text{ เมื่อ } \left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0$$

จากนิยาม 3.6.2 เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ ดังภาพที่ 3.6.1



ภาพที่ 3.6.1 กราฟของเส้นโค้งและเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส

ตัวอย่าง 3.6.1 ให้ $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+t^2\vec{k}$ เป็นสมการเวกเตอร์ของส่วนโค้ง จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง

วิธีทำ จากสมการเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+t^2\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\vec{r}'(t)&=\frac{d}{dt}\left[3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+t^2\vec{k}\right]\\&=\left[3\left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{i}+3\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{j}+\frac{dt^2}{dt}\vec{k}\right]\\&=-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+2t\vec{k}\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}\left|\vec{r}(t)\right|&=\left|-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+2t\vec{k}\right|\\&=\sqrt{(3\sin t)^2+(3\cos t)^2+(2t)^2}\\&=\sqrt{9\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4t^2}\\&=\sqrt{9+4t^2}\end{aligned}$$

จาก $$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

$$=\frac{-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+2t\vec{k}}{\sqrt{9+4t^2}}$$

$$=-\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{i}+\frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{j}+\frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งคือ $-\frac{3\sin t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{i}+\frac{3\cos t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{j}+\frac{2t}{\sqrt{9+4t^2}}\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.6.2 ให้เส้นโค้ง $x=t^2-1, y=3t$ และ $z=t^2+6t$ จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของ ที่ $t=2$

วิธีทำ จากสมการตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง คือ $x=t^2-1, y=3t$ และ $z=t^2+6t$

เขียนเป็นสมการเวกเตอร์ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t)=\left(t^2-1\right)\vec{i}+3t\vec{j}+\left(t^2+6t\right)\vec{k}$

พิจารณา $$\vec{r}'(t)=\frac{d}{dt}\left[\left(t^2-1\right)\vec{i}+3t\vec{j}+\left(t^2+6t\right)\vec{k}\right]$$

$$=\left[\frac{d}{dt}\left(t^2-1\right)\right]\vec{i}+\frac{d3t}{dt}\vec{j}+\left[\frac{d}{dt}\left(t^2+6t\right)\right]\vec{k}$$

$$=2t\vec{i}+3\vec{j}+\left(2t+6\right)\vec{k}$$

และ $$\left|\vec{r}(t)\right|=\left|2t\vec{i}+3\vec{j}+(2t+6)\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{(2t)^2+(3)^2+(2t+6)^2}$$

$$=\sqrt{4t^2+9+4t^2+24t+36}$$

$$=\sqrt{8t^2+24t+45}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส $$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

$$=\frac{2t\vec{i}+3\vec{j}+\left(2t+6\right)\vec{k}}{\sqrt{8t^2+24t+45}}$$

เมื่อ $t=2;$ $$\vec{T}(2)=\frac{2(2)\vec{i}+3\vec{j}+\left(2(2)+6\right)\vec{k}}{\sqrt{8(2)^2+24(2)+45}}$$

$$=\frac{4\vec{i}+3\vec{j}+10\vec{k}}{\sqrt{125}}$$

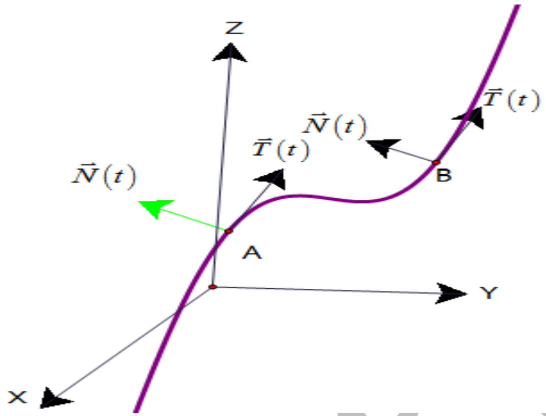
$$=\frac{4}{5\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{3}{5\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งที่ $t=2$ คือ $\frac{4\sqrt{5}}{25}\vec{i}+\frac{3\sqrt{5}}{25}\vec{j}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{k}$

ตัวอย่าง

นิยาม 3.6.3 ให้ $\vec{T}(t)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ เรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับ $\vec{T}'(t)$ ที่จุด $\vec{r}(t)$ ใด ๆ ว่า เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย หรือ เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย (unit normal vector) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{N}(t)$ นั่นคือ $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ เมื่อ $\left|\vec{T}'(t)\right|\neq 0$

เรียกเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{N}(t)$ ว่า เส้นแนวฉากของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$



ภาพที่ 3.6.2 เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย และเวกเตอร์เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง

ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส และส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย จาก

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} \quad \text{เมื่อ } \left|\vec{T}'(t)\right|\neq 0$$

$$=\frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$$

จึงได้

$$\vec{v}(t)=v(t)\vec{T}(t)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้าง จะได้

$$\vec{v}'(t)=v(t)\vec{T}'(t)+v'(t)\vec{T}(t)$$

หรือ

$$\vec{a}(t)=v'(t)\vec{T}(t)+v(t)\vec{T}'(t)$$

จาก

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$$

$$\vec{T}'(t)=\left|\vec{T}(t)\right|\vec{N}(t)$$

ดังนั้น

$$\vec{a}(t)=v'(t)\vec{T}(t)+v(t)\left|\vec{T}(t)\right|\vec{N}(t)$$

เรียก $v'(t)$ ว่าส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส และเรียก $v(t)\left|\vec{T}(t)\right|$ ว่าส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย ของ $\vec{a}(t)$

ตัวอย่าง 3.6.3 ให้ $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของเส้นโค้งเรียบ จงหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$

พิจารณา
$$\vec{r}'(t)=\left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{i}+\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{j}$$
$$=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{\left(-\sin(t)\right)^2+\left(\cos(t)\right)^2}=1$$

จาก
$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$\vec{T}(t)=\frac{-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}}{1}$$
$$=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$$
$$\vec{T}'(t)=\frac{d}{dt}\left[-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}\right]$$
$$=\left(-\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{i}+\left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{j}$$
$$=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left(-\cos t\right)^2+\left(-\sin t\right)^2}$$
$$=\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}$$
$$=1$$

จากเวกเตอร์แนวฉาก
$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$$

พิจารณา
$$=\frac{-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}}{1}$$
$$=-\cos(t)\vec{i}-\sin(t)\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย คือ $\vec{N}(t)=-\cos(t)\vec{i}-\sin(t)\vec{j}$

ตัวอย่าง 3.6.4 ให้ $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของฮิลิกซ์กลม จงหาเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งฮิลิกซ์กลม

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}$

พิจารณา
$$\vec{r}'(t)=\left(3\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{i}+\left(3\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{j}+\left(4\frac{dt}{dt}\right)\vec{k}$$
$$=-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+4\vec{k}$$

ตัวอย่าง

$$\left|\vec{r}(t)\right| = \left|-3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 4\vec{k}\right|$$
$$= \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16}$$
$$= \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16}$$
$$= \sqrt{9 + 16}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

จาก
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$= \frac{-3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 4\vec{k}}{5}$$
$$= -\frac{3}{5}\sin t\vec{i} + \frac{3}{5}\cos t\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$$
$$\vec{T}'(t) = \left(-\frac{3}{5}\frac{d}{dx}\sin t\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{5}\frac{d}{dx}\cos t\right)\vec{j} + \left(\frac{d}{dx}\frac{4}{5}\right)\vec{k}$$
$$= -\frac{3}{5}\cos t\vec{i} - \frac{3}{5}\sin t\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \left|-\frac{3}{5}\cos t\vec{i} - \frac{3}{5}\sin t\vec{j}\right|$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\cos t\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\sin t\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{25}\cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{25}(\cos^2 t + \sin^2 t)}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

จาก
$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$$
$$= \frac{-\frac{3}{5}\cos t\vec{i} - \frac{3}{5}\sin t\vec{j}}{\frac{3}{5}}$$
$$= -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งฮิลิกซ์กลมคือ $-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}$

3.7 ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 3.7.1 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ $\vec{r}$ เกี่ยวกับ t คือ เซตของทุกๆ ปฏิกิริยาอนุพันธ์ (antiderivatives) ของ $\vec{r}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\int \vec{r}(t)dt$ และถ้า $\vec{R}(t)$ เป็นปฏิกิริยาอนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ จะได้ว่า

$$\int \vec{r}(t)dt = \vec{R}(t) + \vec{c}$$

เมื่อ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์คงที่

จากนิยาม 3.7.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่เขียนในรูปส่วนประกอบ จะเป็นเวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบเป็นปริพันธ์ของฟังก์ชันที่เป็นส่วนประกอบดังนี้

สำหรับ $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ

$$\int \vec{r}(t)dt = \left(\int f(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int g(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int h(t)dt\right)\vec{k}$$

ตัวอย่าง 3.7.1 ให้ $\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + 2t\vec{j} - 3t^2\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหาปริพันธ์ของ $\vec{r}(t)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \vec{r}(t)dt &= \int \left(\cos t\vec{i} + 2t\vec{j} - 3t^2\vec{k}\right)dt \\ &= \left[\int \cos t\,dt\right]\vec{i} + \left[\int 2t\,dt\right]\vec{j} - \left[\int 3t^2 dt\right]\vec{k} \\ &= \sin t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} + \vec{c}\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ คือ $\sin t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} + \vec{c}$

ตัวอย่าง 3.7.2 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ใน R^3 ด้วยความเร็ว $\vec{v}(t) = e^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos 2t\vec{k}$ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเมื่อเวลา t ใด ๆ ถ้า $\vec{r}(0) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \vec{v}(t) \\ \vec{r}'(t) &= e^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos 2t\vec{k} \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= e^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos 2t\vec{k} \\ \int d\vec{r}(t) &= \int \left(e^t\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos 2t\vec{k}\right)dt \\ \vec{r}(t) &= \left(\int e^t dt\right)\vec{i} + \left(\int t^2 dt\right)\vec{j} + \left(\int \cos 2t dt\right)\vec{k} \\ &= \left(e^t + c_1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + c_2\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{2}\sin 2t + c_3\right)\vec{k} \\ &= \left(e^t\vec{i} + c_1\vec{i}\right) + \left(\frac{t^3}{3}\vec{j} + c_2\vec{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k} + c_3\vec{k}\right)\end{aligned}$$

$$=\left(e^t\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}\right)+\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)$$

$$=\left(e^t\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}\right)+\left(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\right)$$

ให้ $\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k};$ $\quad=\left(e^t\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}\right)+\vec{c}$

ดังนั้น $\vec{r}(t)=\left(e^t\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}\right)+\vec{c}$ ....(1)

แทนค่า $t=0$ ในสมการ (1)

จึงได้ว่า

$$\vec{r}(0)=\left(e^0\vec{i}+\frac{(0)^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2(0)\vec{k}\right)+\vec{c}$$

$$=\vec{i}+\vec{c}$$

จาก $\vec{r}(0)=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ....(2)

จึงได้ว่า สมการ $(1)=$ สมการ (2)

$$\vec{i}+\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

$$\vec{c}=\left(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)-\vec{i}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

นั่นคือ $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ แทนค่าใน (1)

$$\vec{r}(t)=\left(e^t\vec{i}+\frac{t^3}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}\right)+\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)$$

$$=\left(e^t\vec{i}+\vec{i}\right)+\left(\frac{t^3}{3}\vec{j}+\vec{j}\right)+\left(\frac{1}{2}\sin 2t\vec{k}-\vec{k}\right)$$

$$=\left(e^t+1\right)\vec{i}+\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{2}\sin 2t-1\right)\vec{k}$$

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคเมื่อเวลา t ใด ๆ คือ

$$\vec{r}(t)=\left(e^t+1\right)\vec{i}+\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{2}\sin 2t-1\right)\vec{k}$$

นิยาม 3.7.2 ถ้าส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ที่หาปริพันธ์ได้ บน $[a,b]$ จะกล่าวว่า $\vec{r}$ หาปริพันธ์ได้ (integrable) เช่นกัน และปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral) ของ $\vec{r}$ จาก a ถึง b คือ

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b f(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b g(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}$$

ตัวอย่าง 3.7.3 จงหาปริพันธ์ของ $\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}+\sec t\tan t\vec{j}-2t\vec{k}$ บนช่วงปิด $[0,\pi]$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\vec{r}(t)dt &= \int_0^{\pi}\left(\sin t\vec{i}+\sec t\tan t\vec{j}-2t\vec{k}\right)dt \\
&= \left[\int_0^{\pi}\sin t dt\right]\vec{i}+\left[\int_0^{\pi}\sec t\tan t dt\right]\vec{j}-\left[\int_0^{\pi}2t\,dt\right]\vec{k} \\
&= \left[-\cos t\Big|_0^{\pi}\right]\vec{i}+\left[\sec t\Big|_0^{\pi}\right]\vec{j}-\left[t^2\Big|_0^{\pi}\right]\vec{k} \\
&= -\left[\cos(\pi)-\cos(0)\right]\vec{i}+\left[\sec(\pi)-\sec(0)\right]\vec{j}-\left[(\pi)^2-(0)^2\right]\vec{k} \\
&= -[-1-1]\vec{i}+[-1-1]\vec{j}-\left[\pi^2-0\right]\vec{k} \\
&= 2\vec{i}-2\vec{j}-\pi^2\vec{k}
\end{aligned}$$

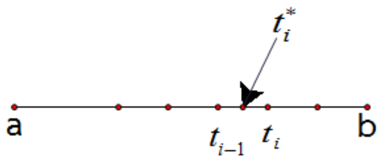
ดังนั้น ปริพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[0,\pi]$ คือ $2\vec{i}-\pi^2\vec{k}$

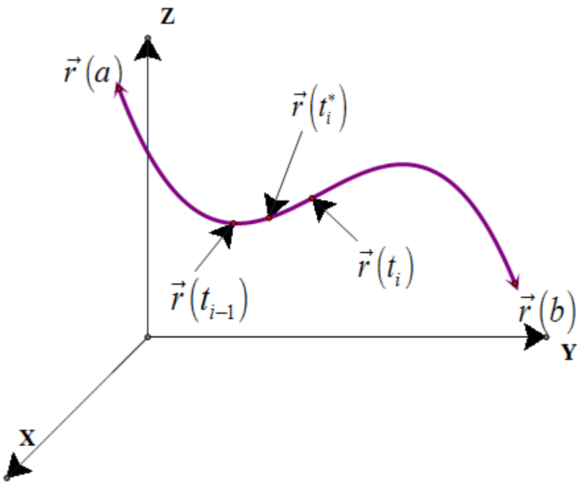
3.8 ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ

นิยาม 3.8.1 ให้ $\vec{r}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และมีพิสัยเป็นสับเซตของ R^n เมื่อ $n=2,3$ โดยมีอนุพันธ์คือ $\vec{r}'$ เป็นฟังก์ชันหาค่าได้และต่อเนื่องบนช่วง (a,b) จะเรียกกราฟหรือพิสัยของ $\vec{r}$ ว่าเส้นโค้งเรียบ ให้ $L(a,b)$ แทนความยาวของเส้นโค้งจาก $\vec{r}(a)$ ถึง $\vec{r}(b)$

ทฤษฎีบท 3.8.1 ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $t\in[a,b]$ ความยาวส่วนโค้งเรียบ คือ $L(a,b)=\int_a^b\left|\vec{r}'(t)\right|dt$

พิสูจน์ ให้ C เป็นเส้นโค้งใน R^3 กำหนดโดย $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เมื่อ $t\in[a,b]$





ภาพที่ 3.8.1 ส่วนโค้งย่อยที่ i ซึ่งมีจุดปลายทั้งสองอยู่ที่จุด $\vec{r}(t_{i-1})$ และ $\vec{r}(t_i)$

ในการคำนวณหาค่า $L(a,b)$ ทำได้โดยการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ ที่จุด $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ โดยที่

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$$

ดังนั้น เมื่อ $t = t_0 = a$ ได้จุด $\vec{r}(a)$ บนเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้น

เมื่อ $t = t_n = b$ จะได้จุด $\vec{r}(b)$ บนเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นจุดสุดท้าย

หรือ เมื่อ $t = t_i$ จะได้จุด $\vec{r}(t_i)$ บนเส้นโค้ง C เมื่อ $i = 0,1,2,3,...,n$ ดังนั้นส่วนโค้ง C จึงถูกแบ่งออกเป็น n ส่วนเช่นกัน

พิจารณาส่วนโค้งย่อยที่ i ซึ่งมีจุดปลายทั้งสองอยู่ที่จุด $\vec{r}(t_{i-1})$ และ $\vec{r}(t_i)$ ดังภาพ 3.8.1 ความยาวส่วนโค้งย่อยนี้ก็คือ ระยะทางที่ได้จากการเคลื่อนที่ในช่วงเวลาตั้งแต่ t_{i-1} ถึง t_i จึงประมาณค่าความยาวนี้ได้จากสูตร

ระยะทาง = อัตราเร็ว $\times$ เวลา

ในที่นี้เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ คือ $t_i - t_{i-1}$ ส่วนอัตราเร็วนั้นอาจประมาณได้ด้วยค่าสัมบูรณ์ของอนุพันธ์ของ $\vec{r}$ ที่จุด t_i^* ซึ่งเป็นจุดใดจุดหนึ่งในช่วง $[t_{i-1}, t_i]$ ดังนั้น

ความยาวส่วนโค้งย่อยที่ $i \approx \left|\vec{r}'\left(t_i^*\right)\right|(t_i - t_{i-1})$

$$L(a,b) \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}'\left(t_i^*\right)\right|(t_i - t_{i-1})$$

ถ้าให้ n มีค่ามากขึ้นโดยมีขีดจำกัด กล่าวคือ $n \to \infty$ แล้ว $(t_i - t_{i-1}) \to 0$

จะเห็นว่า $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}'\left(t_i^*\right)\right|(t_i - t_{i-1}) \to L(a,b)$

ดังนั้น

$$L(a,b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}'\left(t_i^*\right)\right|(t_i - t_{i-1})$$

เนื่องจาก $\left|\vec{r}'(t)\right|$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $\left|\vec{r}'(t)\right|$ ได้บนช่วง $[a,b]$ ดังนั้น

$$L(a,b) = \int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า C เป็นเส้นโค้งเรียบใน R^2 ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ โดยที่ $t \in [a,b]$ จะได้ความยาวของเส้นโค้งจาก $\vec{r}(a)$ ถึง $\vec{r}(b)$ ดังนี้

$$L(a,b) = \int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt$$

ตัวอย่าง 3.8.1 กำหนดสมการเคลื่อนที่ของอนุภาค คือ $\vec{r}(t)=6t^2\vec{i}+4\sqrt{2}t^3\vec{j}+3t^4\vec{k}$ เมื่อ $t\in[1,2]$ เคลื่อนที่ไปบนปริภูมิสามมิติ จงหาระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลาที่กำหนดให้

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 6t^2\vec{i}+4\sqrt{2}t^3\vec{j}+3t^4\vec{k} \\
\vec{r}'(t) &= 12t\vec{i}+12\sqrt{2}t^2\vec{j}+12t^3\vec{k} \\
\left|\vec{r}'(t)\right| &= \sqrt{(12t)^2+\left(12\sqrt{2}t^2\right)^2+\left(12t^3\right)^2} \\
&= \sqrt{144t^2+288t^4+144t^6} \\
&= 12\sqrt{t^2+2t^4+t^6} \\
&= 12\left(t^3+t\right) \\
&= 12t^3+12t \\
L(1,2) &= \int_1^2\left(12t^3+12t\right)dt \\
&= \frac{12t^4}{4}+\frac{12t^2}{2}\bigg|_1^2 = 3t^4+6t^2\Big|_1^2 \\
&= \left[3(2)^4+6(2)^2\right]-\left[3(1)^4+6(1)^2\right] \\
&= 63
\end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ในช่วง $t\in[1,2]$ คือ 63 หน่วย

ตัวอย่าง 3.8.2 เครื่องร่อนหมุนไปตามเส้นโค้งรูปก้นหอย $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t^2\vec{k}$ เครื่องร่อนนี้จะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่าใดจากเวลา $t=0$ ถึง $t=2\pi$

วิธีทำ จาก $L(0,2\pi)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\vec{r}'(t)\right|dt$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t) &= \left(\frac{d}{dt}\cos t\right)\vec{i}+\left(\frac{d}{dt}\sin t\right)\vec{j}+\left(\frac{d}{dt}t^2\right)\vec{k} \\
&= -\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+2t\vec{k} \\
\left|\vec{r}'(t)\right| &= \sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(2t)^2} \\
&= \sqrt{1+4t^2}
\end{aligned}$$

จึงได้ $L(0,2\pi)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+4t^2}\,dt$ ....(1)

ตัวอย่าง

ให้ $2t=\tan\theta$ แล้ว $dt=\frac{1}{2}\sec^2\theta$ แทนค่า

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\tan^2\theta}\left(\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sec^3\theta d\theta \qquad ....(2)$$

พิจารณา $\int\sec^3\theta d\theta$ ใช้ระเบียบวิธีการปริพันธ์ทีละส่วน โดย

ให้ $u=\sec\theta$ และ $dv=\sec^2\theta d\theta$

$du=\sec\theta\tan\theta d\theta$ และ $v=\tan\theta$ แทนค่า

$$\int\sec^3\theta d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\tan\theta(\sec\theta\tan\theta d\theta)$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\tan^2\theta\sec\theta d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int(\sec^3\theta-\sec\theta)d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta d\theta+\int\sec\theta d\theta$$

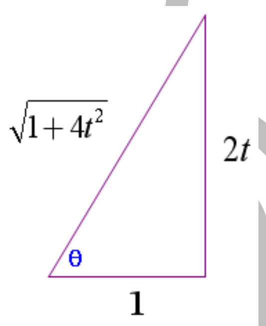
$$2\int\sec^3\theta d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\sec^3\theta d\theta+\int\sec\theta\, d\theta$$

$$=\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$$

$$\int\sec^3\theta d\theta=\frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C)$$ แทนค่าสมการ (2)

$$L=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)\Big|_{x=0}^{x=2\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)\Big|_{x=0}^{x=2\pi}$$



$$=\frac{1}{4}\left[2t\sqrt{1+4t^2}+\ln\left|2t+\sqrt{1+4t^2}\right|\Big|_{x=0}^{x=2\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(2(2\pi)\sqrt{1+4(2\pi)^2}+\ln\left|2(2\pi)+\sqrt{1+4(2\pi)^2}\right|\right)-$$

$$\frac{1}{4}\left(2(0)\sqrt{1+4(0)^2}+\ln\left|2(0)+\sqrt{1+4(0)^2}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(4\pi)\sqrt{1+16\pi^2}+\ln\left|4\pi+\sqrt{1+16\pi^2}\right|-\ln 1\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[(4\pi)\sqrt{1+16\pi^2}+\ln\left|4\pi+\sqrt{1+16\pi^2}\right|\right]$$

$$=40.41$$

จึงได้ความยาวของส่วนโค้งคือ 40.41 หน่วยความยาว

ทฤษฎีบท 3.8.2 สำหรับส่วนโค้ง C ใน R^2 โดยมีสมการ คือ $y=f(x)$ โดยที่ $x\in[a,b]$ แล้ว

ความยาวส่วนโค้ง C คือ $L(a,b)=\int\limits_a^b \sqrt{1-\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

พิสูจน์ ส่วนโค้ง C ใน R^2 โดยมีสมการคือ $y=f(x)$ โดยที่ $x\in[a,b]$

เปลี่ยนสมการในรูปแบบคาร์ทีเซียนให้เป็นแบบเวกเตอร์ได้ ดังนี้ ให้ $x=t$ จะได้ $y=f(t)$

ดังนั้น เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\quad \vec{r}(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j}$ เมื่อ $t\in[a,b]$

พิจารณา $\quad \vec{r}'(t)=\vec{i}+f'(t)\vec{j}$

และ

$$\begin{aligned}\left|\vec{r}'(t)\right| &= \left|\vec{i}+f'(t)\vec{j}\right| \\ &= \sqrt{1^2+\left[f'(t)\right]^2} \\ &= \sqrt{1+\left[f'(t)\right]^2}\end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 3.8.2 จึงได้

$$\begin{aligned}L(a,b) &= \int\limits_a^b \left|\vec{r}'(t)\right|dt \\ &= \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt\end{aligned}$$

จากให้ $x=t;$ จึงได้

$$= \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้ง C คือ $L(a,b)=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

ตัวอย่าง 3.8.3 ให้สมการเส้นโค้ง C ใน R^2 คือ $y=5x^2$ เมื่อ $x\in[0,5]$ จงหาความยาวส่วนโค้ง

วิธีทำ จากสมการส่วนโค้ง

$$\begin{aligned}y &= 5x^2 \\ y' &= 10x \\ (y')^2 &= (10x)^2 \\ &= 100x^2 \\ L(0,5) &= \int\limits_0^5 \sqrt{1+100x^2}\,dx\end{aligned}$$

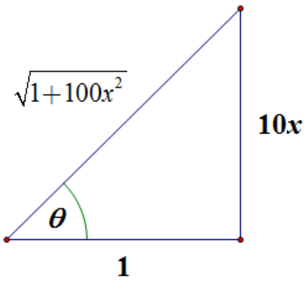
พิจารณา $\quad \int \sqrt{1+100x^2}\,dx=\int \sqrt{(1)^2+(10x)^2}\,dx$

ให้ $\quad 10x=\tan\theta$ จึงได้ $x=\dfrac{1}{10}\tan\theta$

$$dx=\frac{1}{10}\sec^2\theta\, d\theta$$

ตัวอย่าง

แทนค่า $$\int \sqrt{(1)^2+(10x)^2}\,dx = \int \left(\sqrt{1+\tan^2\theta}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\sec^2\theta\, d\theta$$



$$= \int \left(\sqrt{\sec^2\theta}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{10}\int \sec^3\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{20}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)+C$$

$$= \frac{1}{20}\left((10x)\sqrt{1+100x^2} + \ln\left|\sqrt{1+100x^2}+10x\right|\right)+C$$

$$L(0,5) = \int_0^5 \sqrt{1+100x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{20}\left[(10x)\sqrt{1+100x^2} + \ln\left|\sqrt{1+100x^2}+10x\right|\right]_{x=0}^{x=5}$$

$$= \frac{1}{20}\left(10(5)\sqrt{1+100(5)^2} + \ln\left|\sqrt{1+100(5)^2}+10(5)\right|\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left(50\sqrt{2501} + \ln\left|\sqrt{2501}+50\right|\right)$$

$$= \frac{1}{20}(2500.5+4.61)$$

$$= 125.26$$

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้งคือ 125.26 หน่วย

นิยาม 3.8.2 ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบบนปริภูมิสามมิติ กำหนดโดย $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ เมื่อ $t \in [a,b]$ ความยาวของส่วนโค้งจากจุด $\vec{r}(a)$ ถึงจุด $\vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $s(t)$ เรียก s ว่าเป็นฟังก์ชันความยาวของเส้นโค้ง

จากนิยาม 3.8.2 จึงได้ $$s(t) = L(a,t)$$

$$= \int_a^t \left|\vec{r}'(u)\right| du \qquad \text{...........(1)}$$

เรียกสมการ (1) ว่า ระยะทางกำหนดทิศทาง (directed distance) โดยวัดตามแนวเส้นโค้ง C เริ่มต้นจาก $\vec{r}(a)$

พิจารณา $$s'(t) = \left|r'(t)\right|$$

หรือ $$\frac{ds}{dt} = \left|r'(t)\right| \qquad \text{...........(2)}$$

นั่นคือ $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

ตัวอย่าง

ดังนั้น $$s(t)=L(a,t)$$
$$=\int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,du \text{ ....}(3)$$

เรียกสมการ (2) อัตราเร็วของการเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง C และเรียกสมการ (3) ว่าสมการอิงตัวแปรเสริมของความยาวเส้นโค้ง C โดยเริ่มต้นที่จุด $\vec{r}(a)$

ตัวอย่าง 3.8.4 ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบ กำหนดโดย $\vec{r}(t)=\left(2t,\ln t,4\sqrt{t}\right)$ จงหาความยาวส่วนโค้ง สำหรับ $t\in[1,4]$

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t)=\left(2t,\ln t,4\sqrt{t}\right)$

จึงได้ $f(t)=2t, g(t)=\ln t$ และ $h(t)=4\sqrt{t}$

พิจารณา $f'(t)=2$ แล้ว $\left[f'(t)\right]^2=(2)^2=4$

$g'(t)=\frac{1}{t}$ แล้ว $\left[g'(t)\right]^2=\left(\frac{1}{t}\right)^2=\frac{1}{t^2}$

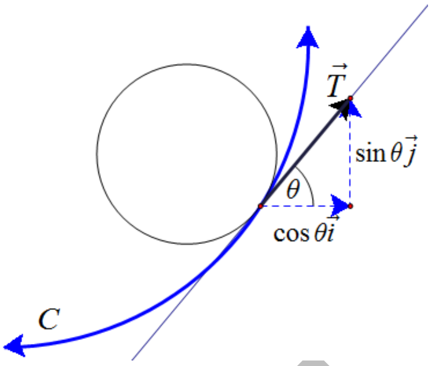
$h'(t)=\frac{d4\sqrt{t}}{dt}=2t^{-\frac{1}{2}}$ แล้ว $\left[h'(t)\right]^2=\left(2t^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4t^{-1}$

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg}{dt}\right)^2+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^4 \sqrt{4+\frac{1}{t^2}+4t^{-1}}\,dt$$
$$=\left[4t-\frac{1}{t}+4\ln t\right]_1^4$$
$$=\left[4(4)-\frac{1}{(4)}+4\ln(4)\right]-\left[4(1)-\frac{1}{(1)}+4\ln(1)\right]$$
$$=21.30-3$$
$$=18.3$$

ดังนั้น ความยาวส่วนโค้ง C คือ 18.3 หน่วย

3.9 ความโค้งของเส้นโค้ง

ค่าความโค้งสามารถวัดจากอัตราการเปลี่ยนแปลงของเส้นโค้งที่โค้งออกจากเส้นสัมผัส ณ จุดที่กำหนดให้ ดังภาพที่ 3.9.1



ภาพที่ 3.9.1 ความโค้งของเส้นโค้ง C

โดยอัตราการเปลี่ยนแปลงที่วัดจากค่าสัมบูรณ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมเอียงของเส้นสัมผัสเทียบกับระยะทางตามแนวเส้นโค้ง โดยสรุปเป็นนิยามได้ ดังนี้

นิยาม 3.9.1 ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบกำหนดโดยฟังก์ชันที่มีตัวแปรเสริม s เป็นความยาวส่วนโค้ง แล้วความโค้ง (curvature) ของ C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\kappa=\kappa(s)$ กำหนดโดย

$$\kappa=\kappa(s)=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$$

จากนิยาม 3.9.1 สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{T}$ กับ $\vec{N}$ จะได้ว่า $\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N}$

หมายเหตุ κ อ่านว่า แคปปา (kappa)

ทฤษฎีบท 3.9.1 ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ สำหรับแต่ละค่า t ที่ $\vec{T}'(t)$ และ $\vec{r}'(t)$ หาค่าได้ แล้ว ความโค้ง C กำหนดโดย $\kappa(t)=\dfrac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$ โดยที่ $|\vec{r}'(t)|\neq 0$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.9.1 $\kappa=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$

$$=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|=\frac{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}{\frac{ds}{dt}}=\left|\frac{\vec{T}'(t)}{\vec{r}'(t)}\right|$$

ดังนั้น ความโค้ง $\kappa(t)=\dfrac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 3.9.1 ให้ C เป็นส่วนโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+3t\vec{k}$ จงหาค่าความโค้ง

วิธีทำ จาก

$$\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+3t\vec{k}$$
$$\vec{r}'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3\vec{k}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(3)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+9}$$
$$=\sqrt{10}$$

จาก

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$\vec{T}(t)=\frac{-\sin t}{\sqrt{10}}\vec{i}+\frac{\cos t}{\sqrt{10}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{10}}\vec{k}$$
$$\vec{T}'(t)=-\frac{\cos t}{\sqrt{10}}\vec{i}-\frac{\sin t}{\sqrt{10}}\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left[\frac{-\cos t}{\sqrt{10}}\right]^2+\left[-\frac{\sin t}{\sqrt{10}}\right]^2}=\sqrt{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{10}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

จาก

$$\kappa(t)=\frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|r'(t)\right|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความโค้ง คือ $\dfrac{1}{10}$

ทฤษฎีบท 3.9.2 ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ แล้ว ความโค้ง C สำหรับแต่ละค่า t ที่ $\vec{r}'(t)$ หาค่าได้ คือ $\kappa(t)=\dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$ โดยที่ $\left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0$

พิสูจน์

$$\vec{r}'(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\vec{T}$$

และ

$$\vec{r}''(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{ds}{dt}\vec{T}'(t)+\frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T}$$

ดังนั้น

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\frac{ds}{dt}\vec{T}\times\left|\frac{ds}{dt}\vec{T}'(t)+\frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T}\right|$$

แต่

$$\vec{T}'(t)=\frac{d\vec{T}}{dt}=\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\frac{ds}{dt}\vec{T}\times\left|\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\vec{T}}{ds}+\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\right|$$
$$=\frac{ds}{dt}\vec{T}\times\left|\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\kappa\vec{N}+\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\right|$$
$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\vec{T}\times\vec{N}+\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}\times\vec{T}$$
$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\vec{T}\times\vec{N}+\vec{0}$$
$$=\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\vec{T}\times\vec{N}$$

จึงได้
$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|=\left|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\kappa\vec{T}\times\vec{N}\right|$$
$$=\left|\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\right|\left|\kappa\right|\left|\vec{T}\times\vec{N}\right|$$

แต่ $\left|\vec{T}\times\vec{N}\right|=1$

จึงได้
$$\kappa=\frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$$

ดังนั้น ความโค้ง $\kappa(t)=\dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$

ตัวอย่าง 3.9.2 ให้ C เป็นส่วนโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+3t\vec{k}$ จงหาค่าความโค้ง โดยใช้ทฤษฎีบท 3.9.2

วิธีทำ จาก
$$\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+3t\vec{k}$$
$$\vec{r}'(t)=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3\vec{k}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\left|-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+3\vec{k}\right|$$
$$=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(3)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+9}$$
$$=\sqrt{10}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|^3=\left(\sqrt{10}\right)^3=10\sqrt{10}$$
$$\vec{r}''(t)=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$$

ตัวอย่าง

$$\text{พิจารณา}\quad \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin t & \cos t & 3\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos t & 3\\ -\sin t & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-\sin t & 3\\ -\cos t & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(0+3\sin t)\vec{i}-(0+3\cos t)\vec{j}+\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)\vec{k}$$

$$=3\sin t\vec{i}-3\cos t\vec{j}+\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|=\left|3\sin t\vec{i}-3\cos t\vec{j}+\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+1}$$

$$=\sqrt{10}$$

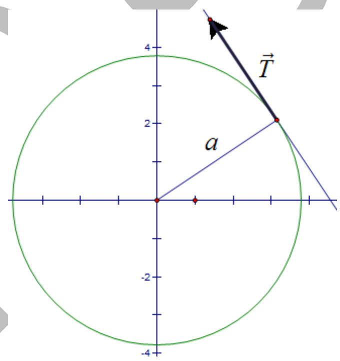
$$\text{จาก}\qquad \kappa(t)=\frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{10\sqrt{10}}=\frac{1}{10}$$

ดังนั้น ความโค้ง คือ $\dfrac{1}{10}$

ตัวอย่าง 3.9.3 จงหาความโค้งของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมียาว a หน่วย

วิธีทำ พิจารณาภาพที่ 3.9.2



ภาพที่ 3.9.2 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมียาว a หน่วย

เนื่องจาก สมการวงกลมที่มีจุกศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมียาว a หน่วย คือ

$$x=a\cos t, y=a\sin t$$

จึงได้ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันสำหรับวงกลม

$$\vec{r}'(t)=-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}$$

ตัวอย่าง

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \left|-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j}\right|$$
$$= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}$$
$$= \sqrt{a^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}$$
$$= a$$

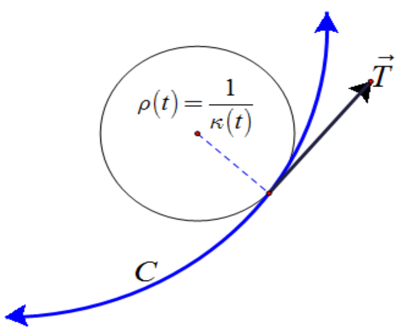
จาก
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$= \frac{-a\sin t\vec{i} + a\cos t\vec{j}}{a}$$
$$= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}(t)\right| = \left|-\sin t\vec{i} + \cos t\vec{j}\right|$$
$$= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}$$
$$= 1$$

จาก
$$\kappa(t) = \frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$= \frac{1}{a}$$

ดังนั้น ความโค้ง คือ $\frac{1}{a}$

จากตัวอย่าง 3.9.3 สำหรับ a ที่เป็นรัศมีของความโค้งของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด สามารถหาความสัมพันธ์ ระหว่างค่า $\kappa(t)$ กับรัศมี a ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.9.2 สำหรับความโค้ง $\kappa(t) \neq 0$ จะเรียกส่วนกลับของ $\kappa(t)$ ว่ารัศมีความโค้ง (radius of curvature) ณ จุด $\vec{r}(t)$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\rho(t)$ กำหนดโดย $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ เมื่อ $\kappa(t) \neq 0$ ดังภาพที่ 3.9.3



ภาพที่ 3.9.3 รัศมีความโค้ง

ตัวอย่าง 3.9.4 ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}$ จงหาความโค้ง และรัศมีความโค้ง ที่ t ใด ๆ

วิธีทำ จาก $$\vec{r}(t)=2\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}$$

พิจารณา
$$\vec{r}'(t)=2\left[\frac{d}{dt}\cos t\right]\vec{i}+2\left[\frac{d}{dt}\sin t\right]\vec{j}$$
$$=-2\sin t\vec{i}+2\cos t\vec{j}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}=2$$

จาก
$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$\vec{T}(t)=\frac{-2\sin t\vec{i}+2\cos t\vec{j}}{2}$$
$$=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}$$
$$\vec{T}'(t)=-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\left|-\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}\right|$$
$$=\sqrt{(-\cos t)^2+(-\sin t)^2}$$
$$=1$$

จาก
$$\kappa(t)=\frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}=\frac{1}{2}$$

ดังนั้น ความโค้ง คือ $\frac{1}{2}$

จาก
$$\rho(t)=\frac{1}{\kappa(t)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

ดังนั้น รัศมีความโค้งคือ 2

ตัวอย่าง 3.9.5 ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=\cos(3t)\vec{i}+\sin(3t)\vec{j}+4t\vec{k}$ จงหาความโค้ง และรัศมีความโค้ง ที่ t ใด ๆ

วิธีทำ จาก $$\vec{r}(t)=\cos(3t)\vec{i}+\sin(3t)\vec{j}+4t\vec{k}$$

จะได้
$$\vec{r}'(t)=-3\sin(3t)\vec{i}+\cos(3t)\vec{j}+4\vec{k}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{(-3\sin(3t))^2+(\cos(3t))^2+(4)^2}$$
$$=\sqrt{9\left(\sin^2 3t+\cos^2 3t\right)+16}$$
$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$
$$=\frac{-3\sin(3t)\vec{i}+3\cos(3t)\vec{j}+4\vec{k}}{5}$$
$$\vec{T}'(t)=-\frac{9}{5}\cos(3t)\vec{i}-\frac{9}{5}\sin(3t)\vec{j}$$
$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left(-\frac{9}{5}\cos(3t)\right)^2+\left(-\frac{9}{5}\sin(3t)\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{81}{25}\left(\cos^2 3t+\sin^2 3t\right)}=\frac{9}{5}$$
$$\kappa(t)=\frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}=\frac{\frac{9}{5}}{5}=\frac{9}{25}$$

ดังนั้น ความโค้ง คือ $\frac{9}{25}$

จาก $$\rho(t)=\frac{1}{\kappa(t)}=\frac{1}{\frac{9}{25}}=\frac{25}{9}$$

ดังนั้น รัศมีความโค้ง คือ $\frac{25}{9}$

ตัวอย่าง 3.9.6 ให้ C เป็นส่วนโค้งฮิลิกซ์ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k}$ โดยที่ $a,b\geq 0, a^2+b^2\neq 0$ จงหาความโค้ง และรัศมีความโค้ง

วิธีทำ จาก $$\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+a\sin t\vec{j}+bt\vec{k}$$

พิจารณา $$\vec{r}'(t)=-a\sin t\vec{i}+a\cos t\vec{j}+b\vec{k}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+(b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\left|\vec{r}'(t)\right|^3=\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\vec{r}''(t)=-a\cos t\vec{i}-a\sin t\vec{j}$$
$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}a\cos t & b\\ -a\sin t & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-a\sin t & b\\ -a\cos t & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-a\sin t & a\cos t\\ -a\cos t & -a\sin t\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=(0+ab\sin t)\vec{i}-(0+ab\cos t)\vec{j}+\left(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t\right)\vec{k}$$

ตัวอย่าง

$$= ab\sin t\vec{i} - ab\cos t\vec{j} + a^2\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right| = \left|ab\sin t\vec{i} - ab\cos t\vec{j} + a^2\vec{k}\right|$$

$$= \sqrt{(ab\sin t)^2 + (-ab\cos t)^2 + \left(a^2\right)^2}$$

$$= \sqrt{(ab)^2 + a^4}$$

$$= a\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)}$$

จาก $$\kappa(t) = \frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$$

$$= \frac{a\sqrt{\left(a^2+b^2\right)}}{\left(a^2+b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\left(a^2+b^2\right)}$$

จึงได้ว่า ความโค้ง คือ $\dfrac{a}{a^2+b^2}$

จาก $$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{1}{\dfrac{a}{\left(a^2+b^2\right)}} = \frac{a^2+b^2}{a}$$

ดังนั้น รัศมีความโค้ง คือ $\dfrac{a^2+b^2}{a}$

ตัวอย่าง 3.9.7 ให้ C เป็นส่วนโค้ง Helix กำหนดโดย $\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$ จงหาความโค้งและรัศมีความโค้ง

วิธีทำ จาก $$\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j} + 2t\vec{k}$$

พิจารณา $$\vec{r}'(t) = -2\sin t\vec{i} + 2\cos\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{r}''(t) = -2\cos(t)\vec{i} - 2\sin(t)\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin t & 2\cos t & 2 \\ -2\cos t & -2\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2\cos(t) & 2 \\ -2\sin(t) & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2\sin(t) & 2 \\ -2\cos(t) & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2\sin(t) & 2\cos(t) \\ -2\cos(t) & -2\sin(t) \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 4\sin t\vec{i} + 4\cos t\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right| = \sqrt{(4\sin t)^2 + (-4\cos t)^2 + (4)^2}$$

$$= \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 16}$$

$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$$\vec{r}'(t) = |\vec{r}'(t)|$$
$$= \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 4}$$
$$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

จาก
$$k(t) = \frac{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}{v^3(t)}$$
$$= \frac{\sqrt{32}}{\left(\sqrt{8}\right)^3} = \frac{1}{4}$$

จาก $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)} = 4$

ดังนั้น ความโค้งของเส้นโค้ง คือ $\frac{1}{4}$ และรัศมีความโค้งของเส้นโค้ง คือ 4

ทฤษฎีบท 3.9.3 เส้นโค้งเรียบ C ของสมการเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ มีอนุพันธ์อันดับสองที่ต่อเนื่องเป็นเส้นตรงก็ต่อเมื่อ $|\kappa| = 0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ ให้ C เป็นเส้นตรง จึงได้ $\vec{T}$ เป็นเวกเตอร์ค่าคงตัว

นั่นคือ $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$

ดังนั้น $\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right| = |\kappa| = 0$

$\Leftarrow$ ให้ $|\kappa| = 0$

จึงได้ $\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right| = 0$

นั่นคือ $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$ แสดงว่า $\vec{T}$ จะมีทิศทางคงที่

ดังนั้น C เป็นเส้นตรง

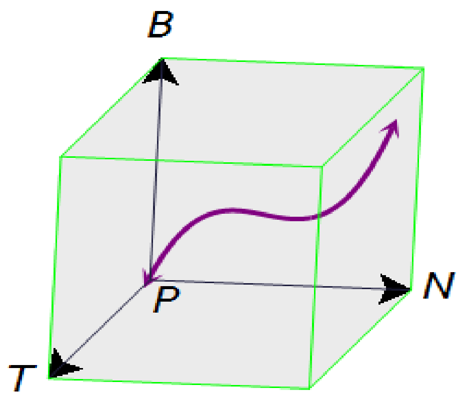
ตัวอย่าง

3.10 เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย และระนาบสัมผัสประชิด

นิยาม 3.10.1 สำหรับ $\vec{T}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง C และ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย เรียกเวกเตอร์เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ ว่าเวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย (unit binormal vector) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{B}$ โดยที่ $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$

ข้อสังเกต

พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ เนื่องจาก $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ ต่างเป็นเวกเตอร์ที่มีความยาวเท่ากับหนึ่งหน่วยและ $\vec{T}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ฉะนั้นจะได้ว่า $\vec{T}=\vec{N}\times\vec{B}$ และ $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$ ด้วยทิศทางของ $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$ เป็นไปตามกฎมือขวา เป็นพิกัดที่มีจุดกำเนิดเคลื่อนที่ไปบนเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ มีชื่อว่ากรอบของเฟรเนต์



ภาพที่ 3.10.1 ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$

สำหรับเส้นตรงสามเส้นซึ่งผ่านจุด P ตามภาพที่ 3.10.1 เส้นที่ขนานกับ $\vec{T}$ คือ เส้นสัมผัส เส้นที่ขนานกับ $\vec{N}$ คือ เส้นแนวฉาก และเส้นที่ขนานกับ $\vec{B}$ คือ เส้นแนวฉากรองของเส้นโค้งที่จุด P

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ เรียกว่า ระนาบแนวโค้ง (osculating plane)

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$ และ $\vec{B}$ เรียกว่า ระนาบสัมผัส (rectifying plane)

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{N}$ และ $\vec{B}$ เรียกว่า ระนาบตั้งฉาก (normal plane)

ตัวอย่าง 3.10.1 กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=3t^2\vec{i}+2t^3\vec{j}+3t\vec{k}$ จงหาเวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย เมื่อ t ใด ๆ และ $t=1$

วิธีทำ

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

$$=\frac{6t\vec{i}+6t^2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}}=\frac{6t\vec{i}+6t^2\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{81}}$$

$$=\frac{6t\vec{i}+6t^2\vec{j}+3\vec{k}}{9}=\frac{2}{3}t\vec{i}+\frac{2}{3}t^2\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{2}{3}t\vec{i}+\frac{2}{3}t^2\vec{j}+\frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4t}{3}\vec{j}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\left|\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4t}{3}\vec{j}\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4t}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16t^2}{9}}=\frac{2\sqrt{1+4t^2}}{3}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4t}{3}\vec{j}}{\frac{2}{3}\sqrt{1+4t^2}}=\frac{\frac{2}{3}\left(\vec{i}+2t\vec{j}\right)}{\frac{2}{3}\sqrt{1+4t^2}}=\frac{\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4t}{3}\vec{j}}{\frac{2}{3}\sqrt{1+4t^2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left(\vec{i}+2t\vec{j}\right)}{\frac{2}{3}\sqrt{1+4t^2}}=\frac{\left(\vec{i}+2t\vec{j}\right)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}+\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$$

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{2}{3}t & \frac{2}{3}t^2 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}t^2 & \frac{1}{3}\\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{2}{3}t & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{2}{3}t & \frac{2}{3}t^2\\ \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} & \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(0-\frac{2t}{3\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{i}-\left(0-\frac{1}{3\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{j}+\left(\frac{4t^2}{3\sqrt{1+4t^2}}-\frac{2t^2}{3\sqrt{1+4t^2}}\right)\vec{k}$$

$$=-\frac{2t}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}+\frac{1}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}+\frac{2t^2}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{k}$$

ดังนั้น $\vec{B}(t)=-\frac{2t}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}+\frac{1}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}+\frac{2t^2}{3\sqrt{1+4t^2}}\vec{k}$

เมื่อ $t=1$; $\vec{B}(1)=-\dfrac{2(1)}{3\sqrt{1+4(1)^2}}\vec{i}+\dfrac{1}{3\sqrt{1+4(1)^2}}\vec{j}+\dfrac{2(1)^2}{3\sqrt{1+4(1)^2}}\vec{k}$

$$=-\frac{2}{3\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{2}{3\sqrt{5}}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย เมื่อ $t=1$ คือ $-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\vec{i}+\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\vec{j}+\dfrac{2}{3\sqrt{5}}\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.10.2 กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=e^t\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}$ เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย เมื่อ $t=0$

วิธีทำ จาก $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}=\frac{e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}}{\sqrt{\left(e^t\right)^2+\left(-e^{-t}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}}{\sqrt{e^{2t}-e^{-2t}+2}}=\frac{e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}}{\sqrt{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}}$$

$$=\frac{e^t\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}}{e^t+e^{-t}}$$

$$=\frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\vec{i}+\frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}\vec{k}$$

จาก $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$

$$\vec{T}'(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\vec{i}+\frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}\vec{k}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{e^t+e^{-t}}\right)\vec{i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\right)\vec{j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}}{e^t+e^{-t}}\right)\vec{k}$$

$$=\frac{\left(e^t+e^{-t}\right)\frac{d}{dt}\left(e^t\right)-\left(e^t\right)\frac{d}{dt}\left(e^t+e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\vec{i}+$$

$$\frac{\left(e^t+e^{-t}\right)\frac{d}{dt}\left(-e^{-t}\right)-\left(-e^{-t}\right)\frac{d}{dt}\left(e^t+e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\vec{j}+$$

$$\frac{\left(e^t+e^{-t}\right)\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right)\frac{d}{dt}\left(e^t+e^{-t}\right)}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}\vec{k}$$

$$=\frac{\left(e^{t}+e^{-t}\right)e^{t}-\left(e^{t}\right)\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{i}+$$

$$\frac{\left(e^{t}+e^{-t}\right)\left(e^{-t}\right)+\left(e^{-t}\right)\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{j}-\frac{\left(\sqrt{2}\right)\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\left[\left(e^{2t}+1-e^{2t}+1\right)\vec{i}+2\vec{j}-\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{t}\right)\vec{k}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}$$

$$=\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{i}+\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(t)\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}+\left(\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}+\left(\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right)^{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4+4+2\left(e^{t}-e^{-t}\right)^{2}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{4}}}=\frac{\sqrt{8+2\left(e^{2t}-2e^{t}e^{-t}+e^{-2t}\right)}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{8+2e^{2t}-4+2e^{-2t}}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2e^{2t}+4+2e^{-2t}}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2}}{e^{t}+e^{-t}}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{i}+\frac{2}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{j}-\frac{\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{t}\right)}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\vec{k}}{\frac{\sqrt{2}}{e^{t}+e^{-t}}}$$

$$=\frac{\frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{e^{t}+e^{-t}}}$$

$$=\left[\frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)^{2}}\right]\left[\frac{e^{t}+e^{-t}}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}-\sqrt{2}\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}}{\sqrt{2}\left(e^{t}+e^{-t}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)}$$

ที่ $t=0;$

$$\vec{T}(t)=\frac{e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}+\frac{-e^{-t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{k}$$

$$\vec{T}(0)=\frac{e^{(0)}}{e^{(0)}+e^{-(0)}}\vec{i}+\frac{-e^{-0}}{e^{(0)}+e^{-(0)}}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^{(0)}+e^{-(0)}}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-\left(e^{t}-e^{-t}\right)\vec{k}}{\left(e^{t}+e^{-t}\right)}$$

$$\vec{N}(0)=\frac{\sqrt{2}\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}-\left(e^{0}-e^{-0}\right)\vec{k}}{\left(e^{0}+e^{-0}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{B}(0)=\vec{T}(0)\times\vec{N}(0)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(0-\frac{1}{2}\right)\vec{i}-\left(0-\frac{1}{2}\right)\vec{j}+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{k}$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์แนวฉากรอง เมื่อ $t=0$ คือ $\vec{B}(0)=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

ตัวอย่าง 3.10.3 จงหาสมการระนาบสัมผัสประชิด และสมการเส้นแนวฉาก เมื่อ

$\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}+(1+\cos t)\vec{j}+2\vec{k}$ เมื่อ $0\le t\le 3\pi$ ณ จุด $(0,0,2)$

วิธีทำ สมการเส้นโค้ง $\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}+(1+\cos t)\vec{j}+2\vec{k}, 0\le t\le 3\pi$

ณ จุด $(0,0,2)$ บนเส้นโค้ง คือ จุด $\vec{r}(\pi)$

เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย

$$\begin{aligned}
\vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|} \\
&= \frac{\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}}{\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2}} \\
&= \frac{\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}}{1} \\
&= \cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|} \\
&= \frac{-\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}}{\sqrt{(-\sin t)^2+(-\cos t)^2}} \\
&= \frac{-\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}}{1} \\
&= -\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}
\end{aligned}$$

ที่ $t=\pi$;

$$\vec{T}(\pi)=\cos\pi\vec{i}-\sin\pi\vec{j}=-\vec{i}$$

$$\vec{N}(\pi)=-\sin\pi\vec{i}-\cos\pi\vec{j}=\vec{j}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\pi) &= \vec{T}(\pi)\times\vec{N}(\pi) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= -\vec{k}
\end{aligned}$$

สมการของระนาบประชิดที่จุด $(0,0,2)$ คือ

3.11 การบิด

นิยาม 3..11.1 ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบ ซึ่งประกอบด้วยแกนเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$ อัตราการหมุนของระนาบผ่านโค้ง (หรือระนาบสัมผัส) รอบแกนเวกเตอร์ $\vec{T}$ เรียกว่า การบิด (torsion) ให้ $\tau(t)$ เป็นการบิดของเส้นโค้ง จะได้ว่า

$$\tau(t)=-\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N}$$

ทฤษฎีบท 3.11.1 สูตรของเฟรอเนต์ – แซร์เรต์ (Frenet – Serret formulae) แสดงความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$

1. $\dfrac{d\vec{T}}{ds}=\kappa(t)\vec{N}(t)$ 2. $\dfrac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$
3. $\dfrac{d\vec{N}}{ds}=\tau\vec{B}-\kappa\vec{T}$ เมื่อ τ การบิด และ κ เป็นความโค้ง

พิสูจน์ สำหรับเส้นโค้ง C ใด ๆ ที่เป็นเส้นโค้งเรียบใน R^3 ที่มี s เป็นฟังก์ชันความยาวของเส้นโค้ง $\vec{T}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัส และ $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ เป็นเวกเตอร์ความโค้งของเส้นโค้ง

จาก $$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{\vec{T}'(t)}{v(t)} \text{ เมื่อ } v(t)\neq 0$$

จาก $$\vec{T}'(t)=\left|\vec{T}'(t)\right|\vec{N}(t)$$

ดังนั้น $$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{v(t)}\vec{N}(t)$$

แต่ $$\frac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{v(t)}=\kappa(t)$$

ดังนั้น $$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa(t)\vec{N}(t) \qquad \text{...........(1)}$$

ฉะนั้นเวกเตอร์ความโค้ง $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ เป็นเวกเตอร์ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{N}$ กับสเกลาร์ κ เมื่อ κ คือ ความโค้ง และ $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\vec{N}$ ด้วย

เนื่องจาก $\vec{N}$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ ดังนั้น $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$ จึงตั้งฉากกับ $\vec{T}$ ด้วย

พิจารณาอนุพันธ์ของ $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ เทียบกับ s

จะเห็นว่า $$\frac{d\vec{B}}{ds}=\frac{d}{dx}\left(\vec{T}\times\vec{N}\right)$$

$$=\vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds}+\frac{d\vec{T}}{ds}\times\vec{N}$$
$$=\vec{T}\times\frac{d\vec{N}}{ds} \text{ (เพราะ } \frac{d\vec{T}}{ds} \text{ ขนานกับ } \vec{N}\text{)}$$

ดังนั้น $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$

เนื่องจาก $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดคงตัว ฉะนั้น $\vec{B}$ ย่อมตั้งฉากกับ $\frac{d\vec{B}}{ds}$

จึงได้ว่า $\frac{d\vec{B}}{ds}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ และ $\vec{B}$

ดังนั้น $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ย่อมขนานกับ $\vec{N}$ จึงสามารถเขียน $\frac{d\vec{B}}{ds}$ ให้อยู่ในรูปของผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{N}$ กับสเกลาร์ได้ดังนี้

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N} \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1) และสมการ (2) จะได้

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N} \text{ และ } \frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$$

และจะหาค่าของ $\frac{d\vec{N}}{ds}$ อีกค่าหนึ่งดังนี้

เพราะว่า $\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}$

จะได้
$$\frac{d\vec{N}}{ds}=\vec{B}\times\frac{d\vec{T}}{ds}+\frac{d\vec{B}}{ds}\times\vec{T}$$
$$=\vec{B}\times\kappa\vec{N}+\frac{d\vec{B}}{ds}\times\vec{T}$$
$$=-\kappa\left(\vec{N}\times\vec{B}\right)-\tau\left(\vec{N}\times\vec{T}\right)$$

แต่ $\vec{N}\times\vec{B}=\vec{T}$ และ $\vec{N}\times\vec{T}=-\vec{B}$

ดังนั้น
$$\frac{d\vec{N}}{ds}=-\kappa\vec{T}+\tau\vec{B} \qquad ....(3)$$

จากสมการ (1), สมการ (2) และ สมการ (3) จึงได้

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=k\vec{N}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds}=\tau\vec{B}-\kappa\vec{T}$$
$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$$

ทฤษฎีบท 3.11.2 ให้ C เป็นเส้นโค้งที่ กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ การบิด τ ของฟังก์ชันของเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\tau=\dfrac{\vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{a}'}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}$ เมื่อ $|\vec{v}\times\vec{a}|\neq 0$

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 3.11.1 ข้อ 2

$$\frac{d\vec{B}}{ds}=-\tau\vec{N}$$

โดยกฎลูกโซ่
$$\begin{aligned}\frac{d\vec{B}}{dt}&=\frac{d\vec{B}}{ds}\frac{ds}{dt}\\&=v(t)\frac{d\vec{B}}{ds}\\&=v(t)\left(-\tau\vec{N}\right)\end{aligned}$$

ฉะนั้น
$$\frac{d\vec{B}}{dt}=-\tau v(t)\vec{N}$$

จาก
$$\vec{a}(t)=v'(t)\vec{T}(t)+v^2(t)k(t)\vec{N}(t)$$

จะได้
$$\begin{aligned}\vec{a}(t)&=v'(t)T'(t)+v''(t)\vec{T}(t)+v^2(t)\left[k(t)\vec{N}(t)\right]\\&\quad+2v(t)v'(t)k(t)\vec{N}(t)\\&=v'(t)T'(t)+v''(t)\vec{T}(t)+v^2(t)\left[k(t)\vec{N}'(t)\right.\\&\quad\left.+k'(t)\vec{N}(t)\right]+2v(t)v'(t)k(t)\vec{N}(t)\\&=v'(t)\vec{T}'(t)+v''(t)\vec{T}(t)+v^2(t)k(t)\vec{N}'(t)\\&\quad+\left[v^2(t)k'(t)+2v(t)v'(t)k(t)\right]\vec{N}(t)\end{aligned}$$

แต่
$$T'(t)=\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}=v(t)k(t)\vec{N}(t)$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\vec{a}'(t)&=v'(t)v(t)\kappa(t)\vec{N}(t)+v''(t)\vec{T}(t)+v^2(t)\kappa(t)\vec{N}'(t)\\&\quad+\left[v^2(t)\kappa'(t)+2v(t)v'(t)\kappa(t)\right]\vec{N}(t)\\&=v''(t)\vec{T}(t)+\left[v^2(t)\kappa'(t)+3v(t)v'(t)\kappa(t)\right]\vec{N}(t)\\&\quad+v^2(t)\kappa(t)\vec{N}'(t)\end{aligned}\qquad\text{...........(1)}$$

จาก
$$\begin{aligned}\vec{N}&=\vec{B}\times\vec{T}\\&=\frac{d\vec{N}(t)}{dt}=\vec{B}(t)\times\vec{T}'(t)+\vec{B}'(t)\times\vec{T}(t)\\&=\vec{B}(t)\times v(t)\kappa(t)\vec{N}(t)-\tau v(t)\vec{N}(t)\times\vec{T}(t)\\&=v(t)\kappa(t)\vec{B}(t)\times\vec{N}(t)-\tau v(t)\vec{N}(t)\times\vec{T}(t)\\&=v(t)\kappa(t)\vec{T}(t)+\tau v(t)\vec{B}(t)\end{aligned}$$

จะได้
$$\vec{a}'(t)=v''(t)\vec{T}(t)+\left[v^2(t)\kappa'(t)+3v(t)v'(t)\kappa(t)\right]\vec{N}(t)$$
$$+v^2(t)\kappa(t)\left[v(t)\kappa(t)\vec{T}(t)+\tau v(t)\vec{B}(t)\right]$$
$$=v''(t)\vec{T}(t)+\left[v^2(t)\kappa'(t)+3v(t)v'(t)\kappa(t)\right]\vec{N}(t)$$
$$+\left[v^3(t)\kappa(t)\vec{T}(t)+\tau v^3(t)\kappa(t)\vec{B}(t)\right]$$
$$=\left[v''(t)+v^3(t)\kappa(t)\right]\vec{T}(t)+\tau v^3(t)\kappa(t)\vec{B}(t)$$
$$+\left[v^2(t)\kappa'(t)+3v(t)v'(t)\kappa(t)\right]\vec{N}(t) \quad ....(2)$$

จาก $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ จะได้ $\vec{v}(t)=v(t)\vec{T}(t)$

และ $\vec{a}(t)=v'(t)\vec{T}(t)+v^2(t)\kappa(t)\vec{N}(t)$

$$\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=v(t)\vec{T}(t)\times\left[v'(t)\vec{T}(t)+v^2(t)\kappa(t)\vec{N}(t)\right]$$
$$=v^3(t)\kappa(t)\vec{B}(t) \quad ....(3)$$

จากสมการ (2) และสมการ (3) จะได้ว่า
$$(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'=\tau v^6\kappa^2$$
$$\tau=\frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'}{v^6\kappa^2}$$

แต่ $\kappa=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{v^3}$ แทนค่า
$$\tau=\frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'}{v^6\left(\dfrac{|\vec{a}\times\vec{v}|}{v^3}\right)^2}$$
$$=\frac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'}{|\vec{a}\times\vec{v}|^2}$$

ดังนั้น สามารถหาค่าการบิดของเส้นโค้ง จาก $\tau=\dfrac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}$

จากทฤษฎีบท 3.11.2 $\tau=\dfrac{(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}$ สำหรับ $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งเรียบแล้ว

จึงได้
$$\vec{v}(t)=\vec{r}'(t)$$
$$\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)=\vec{r}''(t)$$
$$\vec{a}'(t)=\vec{v}''(t)=\vec{r}'''(t)$$ แทนในค่า τ

นั่นคือ
$$\tau=\frac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\cdot\vec{r}'''}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$$

ดังนั้น สามารถหาค่าการบิดของเส้นโค้ง จาก $\tau=\dfrac{(\vec{r}'\times\vec{r}'')\cdot\vec{r}'''}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}$

ตัวอย่าง 3.11.1 ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ กำหนดโดย $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+\frac{2}{3}t^3\vec{k}$ จงหา ค่าความโค้งและการบิด

วิธีทำ

$$\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+\frac{2}{3}t^3\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t)=\vec{i}+2t\vec{j}+2t^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\left|\vec{r}'(t)\right| &= \sqrt{(1)^2+(2t)^2+\left(2t^2\right)^2} \\
&= \sqrt{1+4t^2+4t^4} \\
&= \sqrt{\left(2t^2+1\right)^2} \\
&= \left(2t^2+1\right)
\end{aligned}$$

$$\vec{r}''(t)=2\vec{j}+4t\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 2t^2 \\ 0 & 2 & 4t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2t & 2t^2 \\ 2 & 4t \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 4t \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left(8t^2-4t^2\right)\vec{i}-\left(4t-0\right)\vec{j}+\left(2-0\right)\vec{k} \\
&= 4t^2\vec{i}-4t\vec{j}+2\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right| &= \sqrt{\left(4t^2\right)^2+\left(-4t\right)^2+\left(2\right)^2} \\
&= \sqrt{16t^4+16t^2+4} \\
&= \sqrt{4\left(4t^4+4t^2+1\right)} \\
&= 2\sqrt{\left(2t^2+1\right)^2}=2\left(2t^2+1\right)
\end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned}
k(t) &= \frac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3} \\
&= \frac{2\left(2t^2+1\right)}{\left(2t^2+1\right)^3}=\frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าความโค้ง คือ $\frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2}$

จาก $\vec{r}''(t) = 2\vec{j} + 4t\vec{k}$

พิจาณา $\vec{r}'''(t) = 4\vec{k}$

และ $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = 4t^2\vec{i} - 4t\vec{j} + 2\vec{k}$

จาก $\left(\vec{r}'\times\vec{r}''\right)\cdot\vec{r}''' = \left(4t^2\vec{i} - 4t\vec{j} + 2\vec{k}\right)\cdot\left(4\vec{k}\right) = 8$

$$\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2 = \left[2\left(2t^2+1\right)\right]^2$$

$$= 4\left(2t^2+1\right)^2$$

จาก
$$\tau = \frac{\left(\vec{r}'\times\vec{r}''\right)\cdot\vec{r}'''}{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2}$$

$$= \frac{8}{4\left(2t^2+1\right)^2} = \frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2}$$

ดังนั้น การบิดของเส้นโค้ง C คือ $\dfrac{2}{\left(2t^2+1\right)^2}$

ตัวอย่าง 3.11.2 ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบ กำหนดโดย $\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + \vec{j} + 2\sin t\vec{k}$ จงหา

1. เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย
2. เวกเตอร์แนวฉาก
3. เวกเตอร์แนวฉากรอง
3. ค่าความโค้ง
5. รัศมีความโค้ง
6. การบิด ที่ $t = \dfrac{\pi}{6}$

วิธีทำ จาก
$$\vec{r}(t) = 2\cos t\vec{i} + \vec{j} + (2\sin t)\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{4\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} = 2$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$$

$$= \frac{-2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{k}}{2}$$

$$= -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย คือ $\vec{T}(t) = -\sin t\vec{i} + \cos t\vec{k}$

ตัวอย่าง

2. เวกเตอร์แนวฉาก $\vec{T}'(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{k}$

$$\left|\vec{T}'(t)\right| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = 1$$

จาก $\vec{N}(t) = \dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$

$$= \frac{-\cos t\vec{i} - \sin t\vec{k}}{1}$$

$$= -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์แนวฉาก คือ $\vec{N}(t) = -\cos t\vec{i} - \sin t\vec{k}$

3. เวกเตอร์แนวฉากรอง

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & 0 & \cos t \\ -\cos t & 0 & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ 0 & -\sin t \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -\sin t & 0 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (0-0)\vec{i} - \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = -\vec{j}$$

ดังนั้น เวกเตอร์แนวฉากรอง คือ $\vec{B}(t) = -\vec{j}$

3. ค่าความโค้ง

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -2\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{k}$$

$$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = -2\cos t\vec{i} - 2\sin t\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin t & 0 & -2\cos t \\ -2\cos t & 0 & -2\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2\cos t \\ 0 & -2\sin t \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2\sin t & 2\cos t \\ -2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2\sin t & 0 \\ -2\cos t & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -4\vec{j}$$

$$\left|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\right| = \left|-4\vec{j}\right| = 4$$

จาก $$k(t)=\frac{\left|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\right|}{v^3(t)}$$
$$=\frac{4}{(2)^3}=\frac{1}{2}$$

ดังนั้น ค่าความโค้ง คือ $k(t)=1$

5. รัศมีความโค้ง

จาก $\rho(t)=\frac{1}{k(t)}=\frac{1}{1}=1$

ดังนั้น รัศมีความโค้งคือ $\rho(t)=1$

6. การบิด

$$\vec{a}'(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{k}$$
$$(\vec{v}\times\vec{a})\cdot\vec{a}'=\left(-4\vec{j}\right)\cdot\left(2\sin t\vec{i}-2\cos t\vec{k}\right)$$
$$=0$$

จาก $$\tau=\frac{\left(\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\right)\cdot\vec{a}'(t)}{\left|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\right|^2}$$
$$=\frac{0}{16}=0$$

ดังนั้น การบิด คือ $\tau=0$

ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสและส่วนประกอบตามแนวฉากของเวกเตอร์ความเร่ง

จาก $$\vec{a}(t)=v'(t)\vec{T}(t)+v(t)\left|\vec{T}'(t)\right|\vec{N}(t)$$

เรียก $v'(t)$ ว่าส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของเวกเตอร์ความเร่ง (tangential component) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย a_T และเรียก $v(t)\left|\vec{T}'(t)\right|$ ว่าส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์แนวฉากของเวกเตอร์ความเร่ง (normal component) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย a_N กล่าวได้ว่า

$$a_T=v'(t) \text{ และ } a_N=v(t)\left|\vec{T}'(t)\right| \qquad \text{............(1)}$$

เนื่องจากเวกเตอร์ $\vec{a}(t),\vec{T}(t)$ และ $\vec{N}(t)$ อยู่ในระนาบเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{a}(t)$ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\vec{T}(t)$ กับ $\vec{N}(t)$ ได้ดังนี้

$$\vec{a}(t)=a_T\vec{T}(t)+a_N\vec{N}(t)$$

มีวิธีการหาส่วนประกอบทั้งสองอีกวิธีดังนี้

หาค่า a_T จาก

$$\vec{a}(t) = a_T\vec{T}(t) + a_N\vec{N}(t)$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t) &= a_T\vec{T}(t)\cdot\vec{v}(t) + a_N\vec{N}(t)\cdot\vec{v}(t) \\
&= a_T\left(\left|\vec{T}(t)\right|\left|\vec{v}(t)\right|\cos 0\right) + a_N\left(\left|\vec{N}(t)\right|\left|\vec{v}(t)\right|\cos\frac{\pi}{2}\right) \\
&= a_T\left|\vec{v}(t)\right| + 0 \\
&= a_T v(t) \\
a_T &= \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{v(t)}
\end{aligned}$$

หาค่า a_N จาก

$$\vec{a}(t) = a_T\vec{T}(t) + a_N\vec{N}(t)$$

$$\begin{aligned}
\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right| &= \left|a_T\vec{T}(t)\times\vec{v}(t) + a_N\vec{N}(t)\times\vec{v}(t)\right| \\
&= \left|a_T\left(\left|\vec{T}(t)\right|\left|\vec{v}(t)\right|\sin 0\right) + a_N\left(\left|\vec{N}(t)\right|\left|\vec{v}(t)\right|\sin\frac{\pi}{2}\right)\right| \\
&= \left|0 + a_N\left|\vec{v}(t)\right|\right| \\
&= a_N v(t) \\
a_N &= \frac{\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right|}{v(t)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a_T = \dfrac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{v(t)}$ และ $a_N = \dfrac{\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right|}{v(t)}$ ....(2)

ตัวอย่าง 3.11.3 กำหนดเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$ จงหา a_T และ a_N ที่ $t = 1$

วิธีทำ จากสมการ (1); $a_T = v'(t)$ และ $a_N = v(t)\left|\vec{T}'(t)\right|$

หาค่า $a_T = v'(t)$

จาก

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 3t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3t\vec{k} \\
\vec{v}(t) &= \vec{r}'(t) = 6t\vec{i} + 6t\vec{j} + 3\vec{k} \\
v(t) &= \left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{36t^2 + 36t^2 + 9} = \sqrt{72t^2 + 9} \\
v'(t) &= \frac{1}{2}\left(72t^2 + 9\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(72t^2 + 9\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(72t^2 + 9\right)^{-\frac{1}{2}}(144t) = \frac{72t}{\sqrt{72t^2 + 9}}
\end{aligned}$$

ที่ $t = 1$; $a_T = v'(1) = \dfrac{72(1)}{\sqrt{72(1) + 9}} = \dfrac{72}{\sqrt{81}} = 8$

ตัวอย่าง

หาค่า $a_N = v(t)\left|\vec{T}'(t)\right|$

จาก $$\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = 6t\vec{i} + 6t\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{36t^2 + 36t^2 + 9} = \sqrt{72t^2 + 9}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{6t\vec{i} + 6t\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{72t^2 + 9}}$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{54}{\sqrt{(72t^2 + 9)^3}}\vec{i} + \frac{54}{\sqrt{(72t^2 + 9)^3}}\vec{j} - \frac{216t}{\sqrt{(72t^2 + 9)^3}}\vec{k}$$

$$\vec{T}'(1) = \frac{2}{27}\vec{i} + \frac{2}{27}\vec{j} - \frac{8}{27}\vec{k}$$

$$\left|\vec{T}'(1)\right| = \frac{6\sqrt{2}}{27}$$

$$v(t) = \left|\vec{V}(t)\right| = \sqrt{36t^2 + 36t^2 + 9} = \sqrt{72t^2 + 9}$$

$$v(1) = \sqrt{72(1)^2 + 9} = 9$$

$$a_N = 9\left(\frac{6\sqrt{2}}{27}\right) = 2\sqrt{2}$$

ดังนั้น $a_T = 8$ และ $a_N = 2\sqrt{2}$

จากสมการ (2); $a_T = \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{v(t)}$ และ $a_N = \frac{\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right|}{v(t)}$

หาค่า $a_T = \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{v(t)}$

$$\vec{v}(t) = 6t\vec{i} + 6t\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

ที่ $t = 1$; $$\vec{v}(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{a}(1) = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$v(1) = \left|\vec{v}(1)\right|$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{81}$$

$$= 9$$

ดังนั้น $a_T = \frac{(6)(6)+(6)(6)}{9} = \frac{72}{9} = 8$

ตัวอย่าง

หาค่า $a_N = \dfrac{\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right|}{v(t)}$

จาก $\vec{v}(1)=6\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{a}(2)=6\vec{i}+6\vec{j}$ และ $v(1)=9$

$$\vec{a}(1)\times\vec{v}(1)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 6 & 0\\ 6 & 6 & 3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 6 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}6 & 0\\ 6 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & 6\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=18\vec{i}-18\vec{j}$$

ดังนั้น $a_N = \dfrac{\sqrt{(18)^2+(-18)^2}}{9}=\dfrac{18\sqrt{2}}{9}=2\sqrt{2}$

ดังนั้น จากสมการ (2) ได้ $a_T=8$ และ $a_N=2\sqrt{2}$

3.12 สรุป

บทนี้กล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ การเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่ การดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์แนวฉาก ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ ความโค้งของเส้นโค้ง สมบัติความโค้งของเส้นโค้ง รัศมีความโค้ง เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย และระนาบสัมผัสประชิด การบิด ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของเวกเตอร์ความเร่ง และ ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์แนวฉากของเวกเตอร์ความเร่ง โดยมีลายละเอียดสรุปได้ดังนี้

สำหรับ f,g และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริง

ให้ $x=f(t), y=g(t)$ และ $z=h(t)$ เมื่อ $t\in I$ เรียกเซตของจุด $\left(f(t),g(t),h(t)\right)$ ทั้งหมดว่าเส้นโค้งบนปริภูมิสามมิติ และให้ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เรียก $\vec{r}(t)$ ว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และ เรียก $f(t),g(t),h(t)$ ว่าส่วนประกอบของ $\vec{r}(t)$

การเขียนรอยทางเดินของการเคลื่อนที่

1. กำหนดค่าตัวแปร t และคำนวณหาค่า x และ y จากสมการ
2. กำจัดตัวแปร t และสร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y โดยตรง สมการที่ได้คือสมการคาร์ทีเซียน ของเส้นโค้งของการเคลื่อนที่

การดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ให้ $\vec{r}(t),\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ t ในโดเมนของ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ แล้ว

1. $(\vec{r}\pm\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\pm\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

2. $(f\vec{r})(t)=f(t)\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

3. $(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

3. $(\vec{r}\times\vec{s})(t)=\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

5. $(\vec{r}\circ f)(t)=\vec{r}(f(t))$

ลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ค่าจริง จะกล่าวว่า $\vec{r}(t)$ มี $\vec{R}$ เป็นลิมิต เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R}$ เมื่อทุกๆจำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะสามารถหาจำนวน $\delta>0$ ที่ทำให้ $0<|t-t_0|<\delta$ แล้ว $\left|\vec{r}(t)-\vec{R}\right|<\varepsilon$ ทุกค่า $t\in I$

สำหรับ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนช่วง I แล้ว $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)$ จะมีค่าก็ต่อเมื่อ $\lim_{t\to t_0}f(t),\lim_{t\to t_0}g(t)$ และ $\lim_{t\to t_0}h(t)$ มีค่า กล่าวคือ

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}g(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}h(t)\vec{k}$$

สมบัติลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ บนช่วง I และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ $t\in I$ ถ้า $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{R},\lim_{t\to t_0}\vec{s}(t)=\vec{S}$ และ $\lim_{t\to t_0}f(t)=L$

1. $\lim_{t\to t_0}f(t)\vec{r}(t)=L\vec{R}$

2. $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]=\vec{R}+\vec{S}$

3. $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]=\vec{R}\cdot\vec{S}$

3. $\lim_{t\to t_0}\left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]=\vec{R}\times\vec{S}$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ สำหรับฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ มีความต่อเนื่องที่ $t=t_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$ สมบัติความต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

1. ถ้า $\vec{r}$ ต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดบนช่วง I ใด ๆ จะกล่าวว่า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบนช่วง I

2. ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ ต่อเนื่องที่ $t=t_0$ ก็ต่อเมื่อ f,g และ h ต่อเนื่องที่ $t=t_0$

3.ให้ $\vec{r}(t)$ และ $\vec{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ $t\in I$ และต่อเนื่องบน I แล้ว $f(t)\vec{r}(t),\vec{r}(t)+\vec{s}(t),\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)$ และ $\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)$ ต่อเนื่องบน I

อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จะกล่าวว่า $\vec{r}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ ณ ที่ $t=t_0$ ถ้า $f(t),g(t)$ และ $h(t)$ หาอนุพันธ์ได้ ณ ที่ $t=t_0$ อนุพันธ์ของ $\vec{r}(t)$ คือ $\vec{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ เมื่อลิมิตมีค่า

ตัวอย่าง

จะกล่าวว่า $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่ t_0 ถ้ากำหนดให้ $t_0 + \Delta t = t_1$ เมื่อ $\Delta t \to 0$ จะได้ $t_1 \to t_0$ ดังนั้น $\vec{r}'(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0)}{t_1 - t_0}$ เมื่อลิมิตมีค่า

สมบัติอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ให้ $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t

1. $\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$
2. $\left[(f\vec{r})(t)\right]' = \left[f(t)\vec{r}(t)\right]' = f(t)\vec{r}'(t) + f'(t)\vec{r}(t)$
3. $\left[(\vec{r}+\vec{s})(t)\right]' = \left[\vec{r}(t) + \vec{s}(t)\right]' = \vec{r}'(t) + \vec{s}'(t)$
3. $\left[(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)\right]' = \left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]' = \vec{r}'(t)\cdot\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{s}'(t)$
5. $\left[(\vec{r}\times\vec{s})(t)\right]' = \left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]' = \vec{r}'(t)\times\vec{s}(t) + \vec{r}(t)\times\vec{s}'(t)$
6. $\left\{\vec{r}(t)\cdot\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}(t)\right]\right\}' = \vec{r}(t)\cdot\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}'(t)\right] + \vec{r}(t)\cdot\left[\vec{s}'(t)\times\vec{z}(t)\right]$
$+\vec{r}'(t)\cdot\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}(t)\right]$
7. $\left\{\vec{r}(t)\times\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}(t)\right]\right\}' = \vec{r}(t)\times\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}'(t)\right] + \vec{r}(t)\times\left[\vec{s}'(t)\times\vec{z}(t)\right]$
$+\vec{r}'(t)\times\left[\vec{s}(t)\times\vec{z}(t)\right]$

8. กฎลูกโซ่ ถ้า $\vec{r} = \vec{z}(s)$ และ $s = f(t)$ หาอนุพันธ์ได้ และพิสัยของ s เป็นเซตย่อยของโดเมนของ $\vec{r}$ แล้ว $\vec{r} = (\vec{z}\cdot f)(t)$ จะหาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $(\vec{z}\cdot f)(t) = \vec{z}\left[f(t)\right]f'(t)$ หรือ $\dfrac{d\vec{u}}{dx} = \dfrac{d\vec{u}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$

9. สำหรับ $\vec{r}^{(n)}(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่ n เมื่อ $n \in Z^+$ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ กำหนดโดย $\vec{r}^{(n)}(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\vec{r}^{(n-1)}(t)\right]$

10. $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t) = 0$

ความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง สำหรับ $\vec{r}(t)$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่เคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นโค้ง

1. ความเร็วเชิงเวกเตอร์ $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$
2. อัตราเร็วของการเคลื่อนที่ $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$
3. ความเร่งเชิงเวกเตอร์ $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t)$
4. อัตราเร่งของการเคลื่อนที่ $a(t) = \left|\vec{a}(t)\right|$

เวกเตอร์สัมผัส และเวกเตอร์แนวฉาก

1. เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$ เมื่อ $\left|\vec{r}'(t)\right| \neq 0$

2. เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ เมื่อ $\left|\vec{T}'(t)\right|\neq 0$

ปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ สำหรับ $\vec{r}(t)=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}+h(t)\vec{k}$ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ใด ๆ

$$\int \vec{r}(t)\,dt=\left(\int f(t)\,dt\right)\vec{i}+\left(\int g(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int h(t)dt\right)\vec{k}$$

ปริพันธ์จำกัดเขต ของ $\vec{r}$ จาก a ถึง b คือ

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt=\left(\int_a^b f(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int_a^b g(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}$$

ความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งเรียบ

1. ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $t\in[a,b]$ ความยาวส่วนโค้งเรียบ คือ $L(a,b)=\int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right|dt$

2. ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ ซึ่งกำหนดโดย ใน R^2 โดยมีสมการคือ $y=f(x)$ โดยที่ $x\in[a,b]$ แล้ว $L(a,b)=\int_a^b \sqrt{1-\left[f'(x)\right]^2}\,dx$

3. สมการอิงตัวแปรเสริมของความยาวเส้นโค้ง C โดยเริ่มต้นที่จุด $\vec{r}(a)$ $s(t)=L(a,t)=\int_a^t \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}\,du$

ความโค้งของเส้นโค้ง ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบกำหนดโดยฟังก์ชันที่มีตัวแปรเสริม s เป็นความยาวส่วนโค้ง แล้วความโค้งของ C กำหนดโดย $\kappa=\kappa(s)=\left|\dfrac{d\theta}{ds}\right|$

สมบัติความโค้งของเส้นโค้ง ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)$ สำหรับแต่ละค่า t

1. $\kappa(t)=\dfrac{\left|\vec{T}'(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$ โดยที่ $\left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0$

2. $\kappa(t)=\dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}$ โดยที่ $\left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0$

รัศมีความโค้ง

สำหรับความโค้ง $\kappa(t)\neq 0$ จะเรียกส่วนกลับของ $\kappa(t)$ ว่ารัศมีความโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ คือ $\rho(t)=\dfrac{1}{\kappa(t)}$

เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย และระนาบสัมผัสประชิด

เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วย ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{B}$ คือ เวกเตอร์เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ โดยที่ $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$ และ $\vec{N}$ เรียกว่า ระนาบแนวโค้ง

ตัวอย่าง

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{T}$ และ $\vec{B}$ เรียกว่า ระนาบสัมผัส

ระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{N}$ และ $\vec{B}$ เรียกว่า ระนาบตั้งฉาก

การบิด

ให้ C เป็นส่วนโค้งเรียบ ซึ่งประกอบด้วยแกนเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$ อัตราการหมุนของระนาบผ่านโค้ง (หรือระนาบสัมผัส) รอบแกนเวกเตอร์ $\vec{T}$ เรียกว่า การบิด ให้ $\tau(t)$ เป็นการบิดของเส้นโค้ง จะได้ว่า $\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N}$

สูตรของเฟรอเนต์ – แซร์เรต์ แสดงความสัมพันธ์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{T},\vec{N}$ และ $\vec{B}$

1. $\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa(t)\vec{N}(t)$
2. $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$
3. $\frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T}$

ให้ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ ค่าการบิด τ ของเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\tau = \frac{\vec{v}\times\vec{a}\cdot\vec{a}'}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|^2}$ เมื่อ $\left|\vec{v}\times\vec{a}\right| \neq 0$ หรือ $\tau = \frac{\left(\vec{r}'\times\vec{r}''\right)\cdot\vec{r}'''}{\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right|^2}$ เมื่อ $\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right| \neq 0$

ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของเวกเตอร์ความเร่ง $a_T = v'(t)$ หรือ $a_T = \frac{\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)}{v(t)}$

ส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์แนวฉากของเวกเตอร์ความเร่ง $a_N = v(t)\left|\vec{T}'(t)\right|$ และ $a_N = \frac{\left|\vec{a}(t)\times\vec{v}(t)\right|}{v(t)}$

ตัวอย่าง

แบบฝึกหัด 3

1. กำหนด $\vec{r}$ และ $\vec{s}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จงหา $(\vec{r}+\vec{s})(t),(\vec{r}\times\vec{s})(t)$ และ $(\vec{r}\cdot\vec{s})(t)$

1.1 $\vec{r}(t)=(t+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+2t\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=t\vec{i}+\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{j}+\dfrac{t^3}{3}\vec{k}$

1.2 $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+(t+2)\vec{j}+t\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=(t+1)^2\vec{i}+(t-1)^2\vec{j}+t\vec{k}$

1.3 $\vec{r}(t)=\sin(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}+2t^2\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=2\cos(t)\vec{i}+3\sin(t)\vec{j}+4t\vec{k}$

1.4 $\vec{r}(t)=\sec(t)\vec{i}+\tan(t)\vec{j}+\dfrac{4}{3}t\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=e^{-t}\vec{i}+2\cos(t)\vec{j}+2\sin(t)\vec{k}$

1.5 $\vec{r}(t)=\cos(t)\vec{i}+t\sin(t)\vec{j}+t^2\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=\cos(t)\vec{i}+2\sin(t)\vec{j}+\sin(t)\vec{k}$

2. จงหาลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\sin t\vec{i}+(t^2-\cos t)\vec{j}+e^t\vec{k}\right]$

2.2 $\lim\limits_{t\to 4\pi}\left(2\sin t\vec{i}+2\cos t\vec{j}+5t\vec{k}\right)$

2.3 $\lim\limits_{t\to 1}\left[2\ln(t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}+\dfrac{t^2}{2}\vec{k}\right]$

2.4 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(e^t\vec{i}+\sin t\vec{j}+5t\vec{k}\right)\cdot\left(t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t\vec{k}\right)\right]$

2.5 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(\cos(2t)\vec{i}+\sin(2t)\vec{j}+\sin(2t)\vec{k}\right)\times\left(t\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(t^2-1)\vec{k}\right)\right]$

3. ให้ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+4t\vec{k},\vec{s}(t)=\cos t\vec{i}+t\sin t\vec{j}+2t^2\vec{k}$ และฟังก์ชันค่าจริง $f(t)=6\sin t+\cos t+t$ จงหา

3.1 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)\vec{r}(t)$

3.2 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)+\vec{s}(t)\right]$

3.3 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\cdot\vec{s}(t)\right]$

3.4 $\lim\limits_{t\to 0}\left[\vec{r}(t)\times\vec{s}(t)\right]$

4. กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ จงพิจารณาว่า ต่อเนื่องที่ t ที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+(t-2)\vec{j}+t\vec{k}$ ที่จุด $t=0$

4.2 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ ที่จุด $t=0$

4.3 $\vec{r}(t)=\vec{i}+t^2\vec{j}+(1-t)\vec{k}$ ที่จุด $t=1$

4.4 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\sin t\vec{k}$ ที่จุด $t=0$

4.5 $\vec{r}(t)=(\sin t-t\cos t)\vec{i}+(\cos t+t\sin t)\vec{j}+t^2\vec{k}$ ที่จุด $t=\dfrac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง

5. กำหนดฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ จงหา $\vec{r}'(t)$

5.1 $\vec{r}(t)=t^2\vec{i}+(t-2)\vec{j}+t\vec{k}$

5.2 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$

5.3 $\vec{r}(t)=\vec{i}+t^2\vec{j}+(1-t)\vec{k}$

5.4 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\sin t\vec{k}$

5.5 $\vec{r}(t)=(\sin t-t\cos t)\vec{i}+(\cos t+t\sin t)\vec{j}+t^2\vec{k}$

6. กำหนดให้ $\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}+t\cos t\vec{j}+t\vec{k}$ และ $\vec{s}(t)=t\vec{i}+\vec{j}-t^2\vec{k}$ จงหาค่า

6.1 $(\vec{r}+\vec{s})'(t)$

6.2 $(\vec{r}\cdot\vec{s})'(t)$

6.3 $(\vec{r}\times\vec{s})'(t)$

7. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ ต่อไปนี้

7.1 $\int_0^1\left[t^3\vec{i}+7t^6\vec{j}+(t+1)\vec{k}\right]dt$

7.2 $\int_1^2\left[(5-5t)\vec{i}+2\sqrt{t}\vec{j}+\left(\frac{1}{t^2}\right)\vec{k}\right]dt$

7.3 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\sin t\vec{i}+(1+\cos t)\vec{j}+\sec^2 t\vec{k}\right]dt$

7.4 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[(\sec t\tan t)\vec{i}+(\tan t)\vec{j}+(2\sin t\cos t)\vec{k}\right]dt$

7.5 $\int_0^1\left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\vec{j}+\frac{1}{t^2-1}\vec{k}\right]dt$

8. อนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งเกลี่ยงกลม ณ เวลา t ใด ๆ กำหนดโดยเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}(t)$ จงหา ความเร็วและความเร่ง ขนาดของความเร็วทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค

8.1 $\vec{r}(t)=(t^2+1)\vec{i}+(t^2-1)\vec{j}+2t\vec{k}$ ที่ $t=2$

8.2 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+2t^2\vec{k}$ ที่ $t=\pi/4$

8.3 $\vec{r}(t)=\sec t\vec{i}+3\tan t\vec{j}+t^2\vec{k}$ ที่ $t=\pi/3$

8.4 $\vec{r}(t)=\ln(t^2-1)\vec{i}+3t\vec{j}+(t^2/3)\vec{k}$ ที่ $t=1$

8.5 $\vec{r}(t)=e^{2t}\vec{i}+2\sin t\vec{j}-\cos(t/2)\vec{k}$ ที่ $t=1$

ตัวอย่าง

9. จงหาความยาวของส่วนโค้งและระยะทางตามแนวการเคลื่อนที่ของส่วนโค้งที่กำหนดให้

9.1 $\vec{r}(t)=6\sin(2t)\vec{i}+6\cos(2t)\vec{j}+5t\vec{k}$ ช่วง $0\le t\le \pi$

9.2 $\vec{r}(t)=(2+t)\vec{i}+(t-1)\vec{j}-t\vec{k}$ ช่วง $0\le t\le 4$

9.3 $\vec{r}(t)=6t^3\vec{i}-2t\vec{j}-3t^3\vec{k}$ ช่วง $0\le t\le 2$

9.4 $\vec{r}(t)=t\sin t\vec{i}+t\cos t\vec{j}+(t-3)\vec{k}$ ช่วง $0\le t\le \pi$

9.5 $\vec{r}(t)=e^{-t}\vec{i}+2\cos(3t)\vec{j}+2\sin(3t)\vec{k}$ ช่วง $0\le t\le \pi$

10. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย เวกเตอร์ปกติหนึ่งหน่วย และ เวกเตอร์แนวฉากรองหนึ่งหน่วยของส่วนโค้งที่กำหนดให้

10.1 $\vec{r}(t)=3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+t\vec{k}$

10.2 $\vec{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\vec{i}+(\sin t-t\cos t)\vec{j}-3t\vec{k}$

10.3 $\vec{r}(t)=\left(\frac{t^3}{3}\right)\vec{i}+\left(\frac{2t}{3}\right)\vec{j}-3t^3\vec{k}$

10.4 $\vec{r}(t)=t\sin t\vec{i}+t\cos t\vec{j}+t^2\vec{k}$

10.5 $\vec{r}(t)=e^t\cos t\vec{i}+e^t\sin t\vec{j}+\sqrt{3}e^t\vec{k}$

11. จงหาความโค้ง รัศมีความโค้ง และการบิด ของส่วนโค้งที่กำหนดให้

11.1 $\vec{r}(t)=\cos 3t\vec{i}+\sin 3t\vec{j}+4t\vec{k}$

11.2 $\vec{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\vec{i}+(\sin t-t\cos t)\vec{j}+4\vec{k}$

11.3 $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+(1-\cos t)\vec{k}$

11.4 $\vec{r}(t)=(3e^t\cos t)\vec{i}+(3e^t\sin t)\vec{j}+4e^t\vec{k}$

11.5 $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(2t^2+3)\vec{j}+(2t+1)\vec{k}$

12. จงหาส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสของเวกเตอร์ความเร่ง (a_T) และส่วนประกอบตามแนวเวกเตอร์แนวฉากของเวกเตอร์ความเร่ง (a_N) ของส่วนโค้งที่กำหนดให้

12.1 $\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}+3t\vec{k}, t=\frac{\pi}{3}$

12.2 $\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}-\cos t\vec{j}+\sin t\vec{k}, t=\pi$

12.3 $\vec{r}(t)=(t^2-1)\vec{i}+(2t+3)\vec{j}+(t^2-2)\vec{k}, t=2$

12.4 $\vec{r}(t)=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t^2\vec{k}, t=1$

12.5 $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(2t^2+3)\vec{j}+(2t+1)\vec{k}, t=2$

เอกสารอ้างอิง

จินดา อาจริยะกุล, ผู้แปล. (2539). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สมพงษ์ ใจดี. (2522). **เวกเตอร์และโคออร์ดิเนท.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนัญญ อภิชาตบุตร. (2549). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Baipai, M. W. (1990). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: John Wiley.

Cumpbell, H. G. (1968). **Matrices with Application.** New York: Meredith.

Ferdinand, P. B. (2004). **Vector mechanics for engineers: dynamics.** New York : McGraw-Hill.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: Addison Wesley.

Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3nd ed). New York: Harper & Row Publishers.

Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.

Spiegel, M. R. (1981). **Vector Analysis.** Singapore: McGraw–Hill International Book Company.

ห้ามจำหน่าย

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 4

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

4.1 อนุพันธ์ระบุทิศทาง
4.2 เวกเตอร์เกรเดียนต์
4.3 เส้นแนวฉากและระนาบสัมผัสของผิว
4.4 สนามเวกเตอร์ และเส้นกระแส
4.5 การลู่ออกและเคิร์ลของสนามเวกเตอร์
4.6 สรุป
แบบฝึกหัด
เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาอนุพันธ์ระบุทิศทางได้
2. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าเวกเตอร์เกรเดียนต์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาเส้นแนวฉากและระนาบสัมผัสของผิวได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าสนามเวกเตอร์ และเส้นกระแสได้
5. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและพิจารณาการลู่ออกและเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ได้

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ศึกษาเอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย และซักถามประกอบการสอนด้วย Power point
3. ศึกษาจากคอมพิวเตอร์ประกอบการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป GSP
4. แบ่งกลุ่มอภิปราย สรุปบทเรียน
5. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน
7. ผู้สอนสรุปเนื้อหาเพิ่มเติม

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. เครื่องคอมพิวเตอร์และ LCD
4. โปรแกรมสำเร็จรูป GSP

การวัดผลและการประเมินผล

ตัวอย่าง

1. นักศึกษาสามารถตอบข้อซักถามได้
2. นักศึกษาให้ความสนใจในการเรียนการสอน
3. สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม
4. นักศึกษาสามารถทำแบบฝึกหัดได้

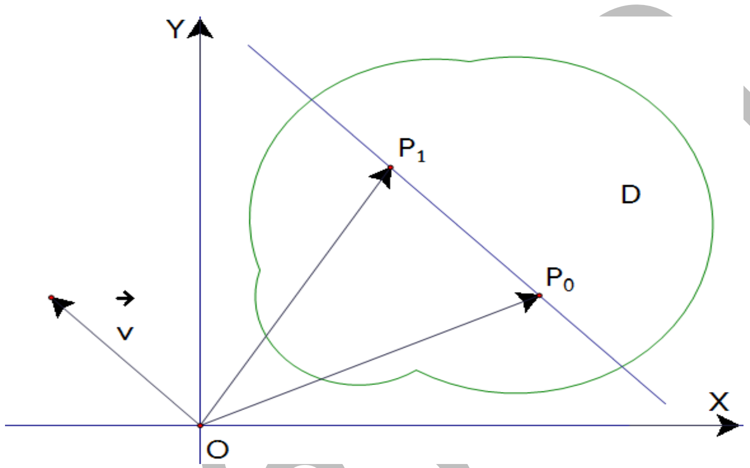
ตัวอย่าง

บทที่ 4
เวกเตอร์เชิงอนุพันธ์สำหรับพื้นผิว

ในบทนี้จะศึกษา อนุพันธ์ระบุทิศทาง เวกเตอร์เกรเดียนต์ เส้นแนวฉากและระนาบสัมผัสของผิว สนามเวกเตอร์ และ เส้นกระแส การลู่ออก เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

4.1 อนุพันธ์ระบุทิศทาง

พิจารณา $f: D \to R; D \subseteq R^n$ เมื่อ $n = 2,3,...$ ให้ P_0 เป็นจุดภายในของ $D, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n, h เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + h\vec{v}$ ดังภาพที่ 4.1.1



ภาพที่ 4.1.1 $D \subseteq R^2$

จะได้ว่า $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + h\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุดบนเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P_0 และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ระยะทางจาก P_0 ถึง $P_1 = \left|\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right| = |h||\vec{v}|$

เนื่องจาก P_0 เป็นจุดภายในของ D แสดงว่ามีจำนวนจริงบวก r ซึ่งเป็นเซตกลมปิด $B(P_0;r) \subseteq D$

ถ้ากำหนด $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย และเลือก h ซึ่ง $|h| < r$ จะได้ $\left|\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0}\right| = |h| < r$ ดังนั้น $P_1 \in D$ ดังภาพที่ 4.1.1 สามารถหาค่าของ f ที่ P_1 ได้

จาก
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + h\vec{v}$$
$$f\left(\overrightarrow{OP_1}\right) = f\left(\overrightarrow{OP_0} + h\vec{v}\right)$$
$$f\left(\overrightarrow{OP_1}\right) - f\left(\overrightarrow{OP_0}\right) = f\left(\overrightarrow{OP_0} + h\vec{v}\right) - f\left(\overrightarrow{OP_0}\right)$$ คือ ค่าที่เปลี่ยนแปลงของ f จากจุด P_0 ไปยัง จุด P_1

$$\frac{f\left(\overrightarrow{OP_1}\right)-f\left(\overrightarrow{OP_0}\right)}{h}=\frac{f\left(\overrightarrow{OP_0}+h\vec{v}\right)-f\left(\overrightarrow{OP_0}\right)}{h}$$

คือค่าเฉลี่ยของความเปลี่ยนแปลงของ f จากจุด P_0 ไปยัง จุด P_1 พิจารณาในช่วงของเส้นตรงที่ต่อระหว่าง P_0 กับ P_1 เมื่อเทียบกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overrightarrow{OP_1}\right)-f\left(\overrightarrow{OP_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overrightarrow{OP_0}+h\vec{v}\right)-f\left(\overrightarrow{OP_0}\right)}{h}$$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

ลิมิตนี้ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ที่จุด P_0 เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{v}$

นิยาม 4.1.1 สำหรับ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x_0,y_0) เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f'(x_0,y_0;\vec{v})$

นั่นคือ $f'(x_0,y_0;\vec{v})=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+hv_1,y_0+hv_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า

จากนิยาม 4.1.1 ให้ $\vec{u}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ จึงได้ $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$ จะได้ $f'(x_0,y_0;\vec{u})=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+hu_1,y_0+hu_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$ เมื่อลิมิตมีค่า และ เรียกค่าลิมิตที่ได้ว่า อนุพันธ์ระบุทิศทาง (directional derivative) ของ f ที่จุด (x_0,y_0) ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{v}$

ตัวอย่าง 4.1.1 กำหนด $f:D\to R;D\subseteq R^2$ โดยที่ $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่จุด $(2,3)$ เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{i}+\vec{j}$ และ อนุพันธ์ของ f ที่จุด $(2,3)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{i}+\vec{j}$

วิธีทำ $$f'(x_0,y_0;\vec{v})=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+hv_1,y_0+hv_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

จาก $$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$$

$$\begin{aligned}
f\left(x_0+hv_1,y_0+hv_2\right)&=f\left(2+h(1),3+h(1)\right)\\
&=f\left(2+h,3+h\right)\\
&=(2+h)^2+2(2+h)(3+h)+3(3+h)^2\\
&=4+2h+h^2+2\left(6+2h+3h+h^2\right)+3\left(9+6h+h^2\right)\\
&=4+2h+h^2+12+10h+2h^2+27+18h+3h^2\\
&=6h^2+30h+43
\end{aligned}$$

$$f\left(x_0,y_0\right)=f\left(2,3\right)$$

$$= (2)^2 + 2(2)(3) + 3(3)^2$$
$$= 4 + 12 + 27 = 43$$
$$f'\left(2,3;\vec{i}+\vec{j}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(6h^2+30h+43\right)-(43)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6h^2+30h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 6h + 30 = 30$$

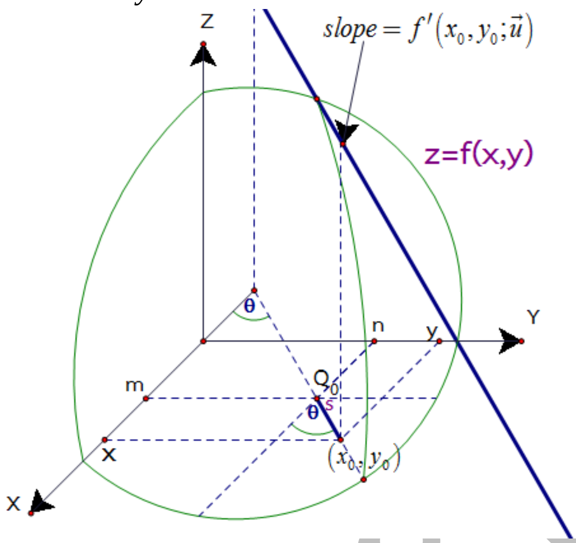
ดังนั้น อนุพันธ์ของ f ที่จุด $(2,3)$ เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{i}+\vec{j}$ คือ 30

ให้ $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

$$f'(x_0, y_0; \vec{u}) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+hu_1, y_0+hu_2\right) - f\left(x_0, y_0\right)}{h}$$
$$f\left(x_0+hu_1, y_0+hu_2\right) = f\left(2+\frac{h}{\sqrt{2}}, 3+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(2+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(3+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(3+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= \left(4+\frac{4h}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}\right) + 2\left(6+\frac{5h}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}\right) + 3\left(9+\frac{6h}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}\right)$$
$$= \left(4+\frac{4h}{\sqrt{2}}+\frac{h^2}{2}\right) + \left(12+\frac{10h}{\sqrt{2}}+\frac{2h^2}{2}\right) + \left(27+\frac{18h}{\sqrt{2}}+\frac{3h^2}{2}\right)$$
$$= 43 + \frac{32h}{\sqrt{2}} + \frac{6h^2}{2}$$
$$f\left(x_0, y_0\right) = f(2,3)$$
$$= (2)^2 + 2(2)(3) + 3(3)^2$$
$$= 4 + 12 + 27 = 43$$
$$f'\left(2,3;\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(43+\frac{32h}{\sqrt{2}}+\frac{6h^2}{2}\right)-(43)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{32h}{\sqrt{2}}+\frac{6h^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{32}{\sqrt{2}}+\frac{6h}{2} = \frac{32}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ f ที่จุด $(2,3)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{i}+\vec{j}$ คือ $\dfrac{32}{\sqrt{2}}$

ความหมายของอนุพันธ์ระบุทิศทาง คือ อัตราการแปลงค่าของฟังก์ชันตามทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ ถ้า $u_2 = 0$ อนุพันธ์ระบุทิศทาง คือ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และถ้า $u_1 = 0$ อนุพันธ์ระบุทิศทาง คือ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ดังภาพที่ 4.1.2



ภาพที่ 4.1.2 อนุพันธ์ระบุทิศทาง

ทฤษฎีบท 4.1.1 สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ที่มีอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ จะได้

$$f'(x, y; \vec{u}) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

พิสูจน์ จากนิยาม 4.1.1 $\quad f'(x_0, y_0; \vec{u}) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$

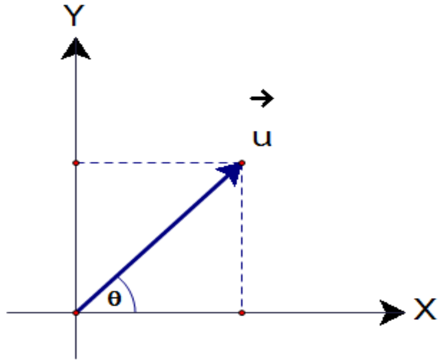
จาก $f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x, y) = hu_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + hu_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha_1 hu_1 + \alpha_2 hu_2$

โดยที่ $\alpha_1 \to 0$ และ $\alpha_2 \to 0$ เมื่อ $h \to 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f'(x_0, y_0; \vec{u}) &= \lim_{h \to 0} \frac{hu_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + hu_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha_1 hu_1 + \alpha_2 hu_2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right)}{h} \\
&= u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x, y; \vec{u}) = u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}$

จากทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้า $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับแกน X ดังภาพที่ 4.1.3



ภาพที่ 4.1.3 $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$

จากภาพที่ 4.1.3 ถ้า $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ สามารถหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางทำมุม θ กับแกน X ดังนี้ $f'(x,y;\vec{u})=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$

ตัวอย่าง 4.1.2 กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y)=4x^2+y^2-4$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศที่ทำมุมกับแกน X เป็นมุม $\dfrac{\pi}{4}$ ที่จุด $(1,2)$

วิธีทำ ให้ $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$

สำหรับ $\theta=\dfrac{\pi}{4}$;

$$
\begin{aligned}
\vec{u}&=\cos\frac{\pi}{4}\vec{i}+\sin\frac{\pi}{4}\vec{j}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\\
f'(x,y;\vec{u})&=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2+y^2-4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+y^2-4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&=(8x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+(2y)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&=4\sqrt{2}x+\sqrt{2}y\\
f'(1,2;\vec{u})&=4\sqrt{2}(1)+\sqrt{2}(2)\\
&=6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศที่ทำมุมกับแกน X เป็นมุม $\dfrac{\pi}{4}$ ที่จุด $(1,2)$ คือ $6\sqrt{2}$

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ ที่จุด $(2,1)$

วิธีทำ จาก

$$
\begin{aligned}
f'(x,y;\vec{u}) &= u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(\frac{x}{y}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\ln x-\ln y)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}(\ln x-\ln y)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2x}+\frac{\sqrt{3}}{2y}
\end{aligned}
$$

$$
f'(2,1;\vec{u})=\frac{1}{2(2)}+\frac{\sqrt{3}}{2(1)}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+2\sqrt{3}}{4}
$$

ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{u}=\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ ที่จุด $(2,1)$ คือ $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{4}$

สำหรับฟังก์ชันของสามตัวแปร อนุพันธ์ระบุทิศทางมีนิยามเช่นเดียวกับ สองตัวแปร กล่าวคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร x,y และ z และ $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x,y,z) ในทิศทางตามแนวเวกเตอร์ $\vec{u}$ คือ

$$
f'(x,y,z;\vec{u})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+hu_1,y+hu_2,z+hu_3)-f(x,y,z)}{h} \quad \text{เมื่อลิมิตมีค่า}
$$

สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x,y และ z ที่มีอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ จะได้

$$
f'(x,y,z;\vec{u})=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}+u_3\frac{\partial f}{\partial z}
$$

ถ้าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}$ ทำมุมกับแกน x,y และ z เป็นมุม α,β และ γ ตามลำดับ จะได้

$$
\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}
$$

อนุพันธ์ระบุทิศทางจะได้

$$
f'(x,y,z;\vec{u})=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+u_3\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma
$$

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดฟังก์ชัน $f(x,y,z)=x^3-xy^2+z$ จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ ที่จุด $(2,1,0)$

วิธีทำ ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\vec{v}$

จึงได้
$$\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{4+9+36}}$$
$$=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{49}}=\frac{2}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{6}{7}\vec{k}$$
$$f'(x,y,z;\vec{u})=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}+u_3\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$=\frac{2}{7}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3-xy^2+z\right)-\frac{3}{7}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-xy^2+z\right)+\frac{6}{7}\frac{\partial}{\partial z}\left(x^3-xy^2+z\right)$$
$$=\frac{2}{7}\left(3x^2-y^2\right)-\frac{3}{7}(-2xy)+\frac{6}{7}(1)=\frac{2}{7}\left(3x^2-y^2\right)+\frac{6}{7}(xy)+\frac{6}{7}$$
$$f'(1,1,0;\vec{u})=\frac{2}{7}\left(3(1)^2-(1)^2\right)+\frac{6}{7}((1)(1))+\frac{6}{7}(2,1,0)$$
$$=\frac{2}{7}(2)+\frac{6}{7}(1)+\frac{6}{7}=\frac{4+6+6}{7}=\frac{16}{7}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ $\vec{v}$ ที่จุด $(2,1,0)$ คือ $\frac{16}{7}$

4.2 เวกเตอร์เกรเดียนต์

นิยาม 4.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งมีอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ซึ่งต่อเนื่อง เวกเตอร์เกรเดียนต์ (gradient vector) ของ f ซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\nabla f(x,y)$ หรือ ∇f (อ่านว่า del f) เป็นเวกเตอร์ที่กำหนดโดย $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

และสำหรับ f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร x,y และ z เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f คือ
$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

ตัวอย่าง 4.2.1 กำหนดให้ $f(x,y,z)=3x^2y+y^3z^2$ จงหา ∇f ที่จุด $(1,2,1)$

วิธีทำ $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y+y^3z^2\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y+y^3z^2\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2y+y^3z^2\right)\vec{k}$$
$$=6xy\vec{i}+\left(3x^2+3y^2z^2\right)\vec{j}+2y^3z\vec{k}$$

∇f ที่จุด $(1,2,1)$; $\quad \nabla f(1,2,1) = 6(1)(2)\vec{i} + \left(3(1)^2 + 3(2)^2(1)^2\right)\vec{j} + 2(2)^3(1)\vec{k}$

$$= 12\vec{i} + 15\vec{j} + 16\vec{k}$$

ดังนั้น ∇f ที่จุด $(1,2,1)$ คือ $12\vec{i} + 15\vec{j} + 16\vec{k}$

ทฤษฎีบท 4.2.1 สำหรับ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ $\nabla c = \vec{0}$

พิสูจน์ พิจารณา

$$\nabla c = \frac{\partial c}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial c}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial c}{\partial z}\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

ดังนั้น สำหรับ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ $\nabla c = \vec{0}$

ทฤษฎีบท 4.2.2 สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ $\nabla cf = c\nabla f$

พิสูจน์ ให้ f ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ

พิจารณา

$$\nabla cf = \frac{\partial cf}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial cf}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial cf}{\partial z}\vec{k} = c\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + c\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + c\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$= c\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= c\nabla f$$

ดังนั้น $\nabla cf = c\nabla f$

ทฤษฎีบท 4.2.3 สำหรับ f และ g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

พิสูจน์ ให้ f, g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

พิจารณา

$$\nabla(f+g) = \frac{\partial}{\partial x}(f+g)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f+g)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f+g)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \nabla f + \nabla g$$

ดังนั้น $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

ทฤษฎีบท 4.2.4 สำหรับ f และ g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

พิสูจน์ ให้ f, g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\nabla(fg) &= \frac{\partial}{\partial x}(fg)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(fg)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(fg)\vec{k} \\
&= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{k} \\
&= \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}\right) + \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{j} + g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j}\right) + \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{k} + g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}\right) \\
&= \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{j} + f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{k}\right) + \left(g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j} + g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}\right) \\
&= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{k}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}\right) \\
&= f\nabla g + g\nabla f
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

ทฤษฎีบท 4.2.5 สำหรับ f และ g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \text{ เมื่อ } g^2 = 0$$

พิสูจน์ ให้ f, g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial x}}{g^2}\vec{i} - \frac{f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\vec{i}\right) + \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial y}}{g^2}\vec{j} - \frac{f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}\vec{j}\right) + \left(\frac{g\frac{\partial f}{\partial z}}{g^2}\vec{k} - \frac{f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\vec{k}\right) \\
&= \frac{g\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + g\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + g\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}{g^2} - \frac{f\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + f\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + f\frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}}{g^2} \\
&= \frac{g\nabla f}{g^2} - \frac{f\nabla g}{g^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 4.2.6 สำหรับ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้ $\nabla\left(f^{n}\right)=nf^{(n-1)}\nabla f$

พิสูจน์ ให้ f,g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปรที่หาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned}\nabla f^{n} &= \frac{\partial}{\partial x} f^{n}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y} f^{n}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z} f^{n}\vec{k} \\ &= nf^{n-1}\frac{\partial}{\partial x} f\vec{i}+nf^{n-1}\frac{\partial}{\partial y} f\vec{j}+nf^{n-1}\frac{\partial}{\partial z} f\vec{k} \\ &= nf^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y} f\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z} f\vec{k}\right) \\ &= nf^{n-1}\nabla f\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\left(f^{n}\right)=nf^{(n-1)}\nabla f$

ทฤษฎีบท 4.2.7 ถ้า $f=f(g)$ และ $g=g(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\nabla f=\frac{df}{dg}\nabla f$$

พิสูจน์ จาก

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{df}{dg}\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{df}{dg}\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{df}{dg}\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \\ &= \frac{df}{dg}\nabla f\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $f=f(g)$ และ $g=g(x,y,z)$ แล้ว $\nabla f=\dfrac{df}{dg}\nabla f$

ตัวอย่าง 4.2.2 กำหนด $f(x,y,z)=x^{2}yz$ และ $g(x,y,z)=2x^{2}+3y^{2}-z^{2}-5$ จงหา

1. $\nabla(f+g)$ ที่จุด $(1,2,1)$
2. $\nabla(fg)$ ที่จุด $(1,2,1)$
3. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)$ ที่จุด $(1,2,1)$
4. ∇f^{2} ที่จุด $(1,2,1)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}f(x,y,z) &= x^{2}yz \\ \nabla f(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}x^{2}yz\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}x^{2}yz\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}x^{2}yz\vec{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}x^{2}yz\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}x^{2}yz\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}x^{2}yz\vec{k} \\ &= 2xyz\vec{i}+x^{2}z\vec{j}+x^{2}y\vec{k} \\ g(x,y,z) &= 2x^{2}+3y^{2}-z^{2}-5\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}\nabla g(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2+3y^2-z^2-5\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2+3y^2-z^2-5\right)\vec{j}+\\ &\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(2x^2+3y^2-z^2-5\right)\vec{k}\\ &= 4x\vec{i}+6y\vec{j}-2z\vec{k}\\ \nabla f^2(x,y,z) &= 2f(x,y,z)\nabla f(x,y,z)\\ &= 2\left(x^2yz\right)\left(2xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k}\right)\\ &= \left(2x^2yz\right)(2xyz)\vec{i}+\left(2x^2yz\right)\left(x^2z\right)\vec{j}+\left(2x^2yz\right)\left(x^2y\right)\vec{k}\\ &= 4x^3y^2z^2\vec{i}+2x^4yz^2\vec{j}+2x^4y^2z\vec{k}\end{aligned}$$

ที่จุด $(1,2,1)$; $f(1,2,1)=(1)^2(2)(1)=2$

$$\begin{aligned}\nabla f(1,2,1) &= 2(1)(2)(1)\vec{i}+(1)^2(1)\vec{j}+(1)^2(2)\vec{k}=4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\\ g(1,2,1) &= 2(1)^2+3(2)^2-(1)^2-5=8\\ \nabla g(1,2,1) &= 4(1)\vec{i}+6(2)\vec{j}-2(1)\vec{k}=4\vec{i}+12\vec{j}-2\vec{k}\end{aligned}$$

1. จาก $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

$$\begin{aligned}\nabla(f+g)(1,2,1) &= \nabla f(1,2,1)+\nabla g(1,2,1)\\ &= \left(4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(4\vec{i}+12\vec{j}-2\vec{k}\right)\\ &= (4+4)\vec{i}+(1+12)\vec{j}+(2-2)\vec{k}\\ &= 8\vec{i}+13\vec{j}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla(f+g)$ ที่จุด $(1,2,1)$ คือ $8\vec{i}+13\vec{j}$

2. จาก $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

$$\begin{aligned}\nabla(fg)(1,2,1) &= f(1,2,1)\nabla g(1,2,1)+g(1,2,1)\nabla f(1,2,1)\\ &= 2\left(4\vec{i}+12\vec{j}-2\vec{k}\right)+8\left(4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)\\ &= \left(8\vec{i}+24\vec{j}-4\vec{k}\right)+\left(32\vec{i}+8\vec{j}+16\vec{k}\right)\\ &= (8+32)\vec{i}+(24+8)\vec{j}+(-4+16)\vec{k}\\ &= 40\vec{i}+32\vec{j}+12\vec{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla(fg)$ ที่จุด $(1,2,1)$ คือ $40\vec{i}+32\vec{j}+12\vec{k}$

3. จาก $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(1,2,1)=\frac{g(1,2,1)\nabla f(1,2,1)-f(1,2,1)\nabla g(1,2,1)}{g^2(1,2,1)}$$

$$=\frac{8\left(4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)-2\left(4\vec{i}+12\vec{j}-2\vec{k}\right)}{8^2}$$

$$=\frac{\left(32\vec{i}+8\vec{j}+16\vec{k}\right)-\left(8\vec{i}+24\vec{j}-4\vec{k}\right)}{64}$$

$$=\frac{(32-8)\vec{i}+(8-24)\vec{j}+(16-(-4))\vec{k}}{64}$$

$$=\frac{34\vec{i}-16\vec{j}+20\vec{k}}{64}=\frac{17\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}}{32}$$

$$=\frac{17}{32}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{5}{16}\vec{k}$$

ดังนั้น $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)$ ที่จุด $(1,2,1)$ คือ $\frac{17}{32}\vec{i}-\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{5}{16}\vec{k}$

4. จาก

$$\nabla f^2(x,y,z)=2f(x,y,z)\nabla f(x,y,z)$$

$$=4x^3y^2z^2\vec{i}+2x^4yz^2\vec{j}+2x^4y^2z\vec{k}$$

$$\nabla f^2(1,2,1)=4(1)^3(2)^2(1)^2\vec{i}+2(1)^4(2)(1)^2\vec{j}+2(1)^4(2)^2(1)\vec{k}$$

$$=16\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

ดังนั้น ∇f^2 ที่จุด $(1,2,1)$ คือ $16\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$

จากนิยามสามารถหาอนุพันธ์ระบุทิศทางในพจน์ของเวกเตอร์เกรเดียนต์และเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยได้ ดังนี้

สำหรับ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร x และ y อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x,y) ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$ คือ

$$f'(x,y;\vec{u})=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}\right)$$

$$=\nabla f\cdot\vec{u}$$

และ สำหรับ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปร x,y และ z อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x,y,z) ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ คือ

$$f'(x,y,z;\vec{u})=u_1\frac{\partial f}{\partial x}+u_2\frac{\partial f}{\partial y}+u_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)$$

$$=\nabla f\cdot\vec{u}$$

ตัวอย่าง

สำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางในเทอมของเวกเตอร์เกรเดียนต์ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u}$ ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\nabla_{\vec{T}} f$ ซึ่งหมายถึง ค่าเวกเตอร์เกรเดียนต์ในทิศทางของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}$ ที่มีทิศทางเฉพาะโดยสรุปเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 4.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์ อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด P ในทิศทางตามแนวเวกเตอร์ $\vec{T}$ จะเท่ากับผลคูณภายในของ $\vec{T}$ กับเกรเดียนต์ของ f ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\nabla_{\vec{T}} f$ คือ $\nabla_{\vec{T}} f = \nabla f \cdot \vec{T}$

ตัวอย่าง 4.2.3 กำหนด $f(x,y,z) = x^2 + xy + zy + y^2$ จงหา $\nabla_{\vec{T}} f$ ที่จุด $(1,1,3)$ ในทิศทางของเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$

วิธีทำ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{i} + 2t\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{10+4t^2}}\vec{i} + \frac{2t}{\sqrt{10+4t^2}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{10+4t^2}}\vec{k}$$

ที่จุด $(1,1,3)$ บนส่วนโค้ง $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$ ได้ $t = 1$

จึงได้

$$\vec{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{10+4(1)^2}}\vec{i} + \frac{2(1)}{\sqrt{10+4(1)^2}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{10+4(1)^2}}\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$$

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy + zy + y^2\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy + zy + y^2\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + xy + zy + y^2\right)\vec{k} = (2x+y)\vec{i} + (x+z+2y)\vec{j} + y\vec{k}$$

ที่จุด $(1,1,3)$;

$$\nabla f(1,1,3) = \left(2(1)+(1)\right)\vec{i} + \left((1)+(3)+2(1)\right)\vec{j} + (1)\vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$$

จาก

$$\nabla_{\vec{T}} f = \nabla f \cdot \vec{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\right)\cdot\left(3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}\right) = \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{12}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{18}{\sqrt{14}}$$

ดังนั้น $\nabla_{\vec{T}} f$ ที่จุด $(1,1,3)$ ในทิศทางของเส้นโค้ง $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + 3t\vec{k}$ คือ $\frac{8}{\sqrt{14}}$

ตัวอย่าง

จากบทแทรก $$\nabla_{\vec{T}} f = \nabla f \cdot \vec{T}$$
$$= \left|\nabla f\right|\left|\vec{T}\right|\cos\theta \text{ เมื่อ } \theta \text{ เป็นมุมระหว่าง } \nabla f \text{ กับ} \vec{T}$$

จะพบว่าค่าอนุพันธ์ระบุทิศทาง $\nabla_{\vec{T}} f$ มีค่ามากที่สุด เมื่อ $\theta = 0$ (เพราะ $\cos 0 = 1$) คือ $\vec{T}$ มีทิศทางเดียวกับ ∇f ซึ่งจะได้ว่า $\nabla_{\vec{T}} f = \left|\nabla f\right|$

นั่นคือ อนุพันธ์ทิศทางหรืออัตราการ เปลี่ยนแปลง (เพิ่มขึ้น) ของฟังก์ชันจะมีค่ามากที่สุดในทิศทางของเกรเดียนต์ และมีค่าเท่ากับขนาดของเกรเดียนต์นั้น

จากสมการข้างต้นจะพบว่าค่าอนุพันธ์ระบุทิศทางมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ คือ $\nabla_{\vec{T}} f = 0$ เมื่อ ∇f และ $\vec{T}$ ตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 4.2.4 จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $(2,1,-2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ และหาค่าและทิศทางของอนุพันธ์ระบุทิศทางที่มากที่สุด

วิธีทำ จาก $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{k}$$
$$= 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

ที่จุด $(2,1,-2)$; $\quad \nabla f(2,1,-2) = 2(2)\vec{i} + 2(1)\vec{j} + 2(-2)\vec{k}$
$$= 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

ให้ $\vec{T}(t)$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

จึงได้
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$
$$\nabla_{\vec{T}} f = \vec{T} \cdot \nabla f = \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) \cdot \left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}\right)$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $(2,1,-2)$ ในทิศทาง $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ คือ $\dfrac{16}{3}$

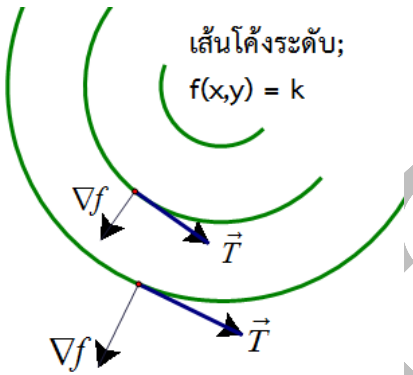
และ อนุพันธ์ระบุทิศทางที่มีค่ามากที่สุดเกิดขึ้น เมื่อทิศทางเป็นทิศทางเดียวกับ ∇f

โดยมีค่ามากที่สุดคือ $\left|\nabla f\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร x และ y สมการ $f(x,y)=k$ จะเป็นเส้นโค้งระดับของ f ให้ (x_1,y_1) เป็นจุดอยู่บนโค้งระดับและ $\vec{T}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยของเส้นโค้งระดับที่จุด (x_1,y_1) จะได้ อนุพันธ์ตามแนวเวกเตอร์ $\vec{T}$ จะเป็นศูนย์ เพราะว่าทิศทางดังกล่าวค่าของฟังก์ชันเท่ากับ k เป็นค่าคงตัว นั่นคือ

$$\nabla_{\vec{T}} f(x_1,y_1)=\vec{T}\cdot\nabla f(x_1,y_1)=0$$

นั่นคือ เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f จะตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{T}$ ซึ่งเป็นเส้นโค้งตามแนวเส้นโค้งระดับ

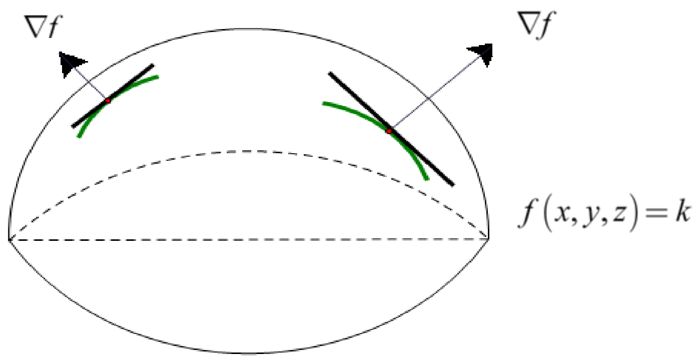


ภาพที่ 4.2.1 เส้นโค้งระดับ $f(x,y)=k$

จากที่ได้กล่าวมาสรุปความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ระบุทิศทางกับเวกเตอร์เกรเดียนต์ได้ ดังนี้

1. อนุพันธ์ระบุทิศทางในทิศทางเกรเดียนต์จะมีค่ามากที่สุด และมีค่าเท่ากับขนาดของเกรเดียนต์นั้น
2. อนุพันธ์ระบุทิศทางในทิศทางตั้งฉากกับเกรเดียนต์มีค่าเป็นศูนย์

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสามตัวแปร x, y และ z สมการ $f(x,y,z)=k$ มีกราฟเป็นผิวโค้งที่เรียกว่าผิวโค้งระดับ (level surface) ของ f เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f คือ ∇f จะเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่สัมผัสกับผิวโค้งระดับ อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f จะมีค่าสูงสุดในทิศทางตามแนวเกรเดียนต์ของ f และอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f จะมีค่าเป็นศูนย์ในทิศทางตามแนวเวกเตอร์ที่ขนานกับผิวโค้งระดับของ f ภาพที่ 4.2.2



ภาพที่ 4.2.2 เส้นโค้งระดับ $f(x,y,z)=k$ กับ ∇f

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 4.2.8 อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f จะเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง $f(x,y,z)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ กำหนดให้ $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของจุด (x,y,z) บนผิวโค้ง

แล้ว $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่สัมผัสผิวโค้ง

แต่
$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}\right) \\ &= \nabla f\cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

จากสมการพื้นผิว $f(x,y,z)=c$

$$df(x,y,z)=0$$

ดังนั้น $\nabla f\cdot d\vec{r}=0$

แสดงว่า ∇f ตั้งฉากกับ $d\vec{r}$

เพราะว่า $d\vec{r}$ สัมผัสส่วนโค้ง

ดังนั้น ∇F เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง

ตัวอย่าง 4.2.5 กำหนดสมการผิวโค้ง $xy+yz+zx=4$ จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้งที่จุด $(1,1,3)$

วิธีทำ จาก
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy+yz+zx \\ \nabla f &= \frac{\partial}{\partial x}(xy+yz+zx)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}(xy+yz+zx)\vec{j}+ \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z}(xy+yz+zx)\vec{k} \\ &= (y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+x)\vec{k} \end{aligned}$$

ที่จุด $(1,1,3)$;
$$\begin{aligned} \nabla f(1,1,3) &= (1+3)\vec{i}+(1+3)\vec{j}+(1+1)\vec{k} \\ &= 4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k} \end{aligned}$$

ดังนั้น เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้งที่จุด $(1,1,3)$ คือ $4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง $x^2+y^2+z-4=0$ ที่จุด $(1,4,1)$

วิธีทำ ให้ $f(x,y,z)=x^2+y^2+z-4$

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z-4\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z-4\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z-4\right)\vec{k}$$

$$=2x\vec{i}+2y\vec{j}+\vec{k}$$

$$\nabla f(1,4,1)=2(1)\vec{i}+2(4)\vec{j}+\vec{k}=2\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$$

ดังนั้น $2\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง $x^2+y^2+z-4=0$ ที่จุด $(1,4,1)$

ตัวอย่าง 4.2.7 ให้ $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด (x,y,z) ใด ๆ จงหา $\nabla|\vec{r}|$

วิธีทำ เนื่องจาก $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ และ $\nabla|\vec{r}|=\frac{\partial}{\partial x}|\vec{r}|\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}|\vec{r}|\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}|\vec{r}|\vec{k}$

$$\nabla|\vec{r}|=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{i}=\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\vec{i}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}=\frac{x}{|\vec{r}|}\vec{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{j}=\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\vec{j}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}=\frac{y}{|\vec{r}|}\vec{j}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\vec{k}=\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\vec{k}$$

$$=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}=\frac{z}{|\vec{r}|}\vec{k}$$

จะได้
$$\nabla|\vec{r}|=\frac{x}{|\vec{r}|}\vec{i}+\frac{y}{|\vec{r}|}\vec{j}+\frac{z}{|\vec{r}|}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}|}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

ดังนั้น $\nabla|\vec{r}|=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

ตัวอย่าง

4.3 เส้นแนวฉากและระนาบสัมผัสของผิว

กำหนด S เป็นผิวใน R^3 มีสมการคือ $F(x,y,z)=0$ ให้ $P(a,b,c)$ เป็นจุดบนผิว S C เป็นเส้นโค้งบนผิว S ซึ่งผ่านจุด P และมีสมการอิงตัวแปรเสริม คือ $x=x(t), y=y(t)$, $z=z(t)$ สำหรับ $t\in I$ เมื่อ I เป็นตัวแปรเสริม ดังนั้นจะมี $t_0\in I$ ซึ่ง

$$x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z_0=z(t_0)$$

เนื่องจาก C เป็นเส้นโค้งบนผิว S ดังนั้น

$$F\left(x(t),y(t),z(t)\right)=0 \text{ เมื่อ } t\in I$$

ให้ $$g(t)=F\left(x(t),y(t),z(t)\right)=0$$

จะได้ $$g'(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(P)x'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P)y'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P)z'(t_0)=0$$

จะได้ว่า $\left[\frac{\partial F}{\partial x}(P)\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}(P)\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}(P)\vec{k}\right]\cdot\left[x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}\right]=0$

หรือ $\nabla F(a,b,c)\cdot\left(x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}\right)$

แสดงว่า $\nabla F(a,b,c)$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$ แต่เนื่องจาก $x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง C ณ จุด $P(a,b,c)$ ดังนั้น $\nabla F(a,b,c)$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง C บนผิว S ที่จุด $P(a,b,c)$

โดยการพิจารณาเส้นสัมผัสเส้นโค้งต่างๆ ที่ผ่านจุด $P(a,b,c)$ บนผิว S ซึ่ง $\nabla F(P)\neq 0$ เส้นสัมผัสเส้นโค้งเหล่านั้นต่างก็ตั้งฉากกับ $\nabla F(P)$ ซึ่งจะได้ว่าเส้นสัมผัสเหล่านั้นต่างอยู่บนระนาบเดียวกันและระนาบดังกล่าวนี้จะตั้งฉากกับ $\nabla F(P)$ ซึ่งเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบสัมผัสของผิว S ที่จุด P และเรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับ $\nabla F(P)$ ว่า เส้นแนวฉาก ของผิว S ที่ จุด P และเรียกเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\nabla F(P)$ ว่าเวกเตอร์แนวฉากของผิว S ที่จุด P ดังนั้น สมการระนาบสัมผัส และ เวกเตอร์แนวฉาก สรุปดังนิยามต่อไปนี้

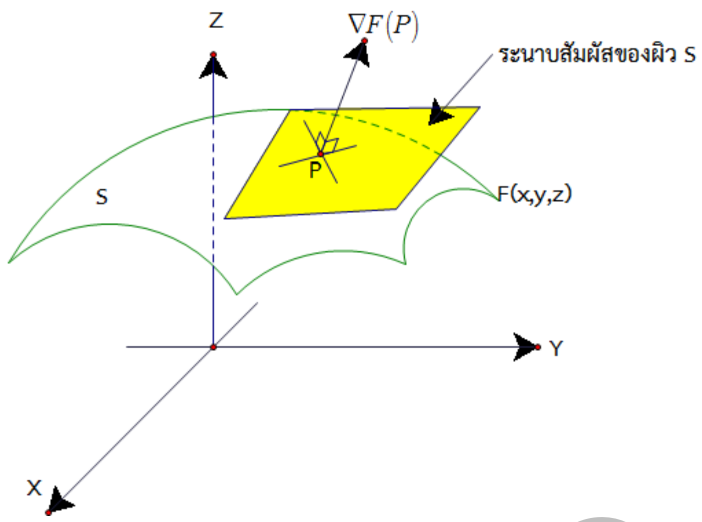
นิยาม 4.3.1 สำหรับ F เป็นฟังก์ชันของสามตัวแปรที่มีอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $P(a,b,c)$ จะกล่าวว่าระนาบที่มีสมการ

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)=0$$ ว่า

เป็นระนาบสัมผัสกับผิวโค้ง (tangent plane) ที่จุด $P(a,b,c)$ และเส้นตรงที่มีสมการ

$$x=a+t\frac{\partial}{\partial x}F(a,b,c), y=b+t\frac{\partial}{\partial y}F(a,b,c), z=c+t\frac{\partial}{\partial z}F(a,b,c)$$

เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ เป็นเส้นแนวฉากของผิวโค้ง ที่จุด (a,b,c) ดังภาพที่ 4.3.1



ภาพที่ 4.3.1 $\nabla F(P)$ และระนาบสัมผัสกับผิวโค้ง

สำหรับเวกเตอร์ $\vec{v}$ ใด ๆ ที่ตั้งฉากกับผิว S ก็ต่อเมื่อ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของ S ที่จุด P และกล่าวว่าผิว S_1 และผิว S_2 สัมผัสกันที่จุด P ก็ต่อเมื่อ ระนาบสัมผัสของ S_1 ที่จุด P และระนาบสัมผัสของ S_2 ที่จุด P เป็นระนาบเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาสมการระนาบสัมผัสและเส้นแนวฉากของผิวโค้ง $x^2+4y^2-16z=0$ ที่จุด $(2,4,2)$

วิธีทำ ให้ $F(x,y,z)=x^2+4y^2-16z$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=2x \quad \text{จะได้} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(2,4,2)=2(2)=4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=8y \quad \text{จะได้} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(2,4,2)=8(4)=32$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=-16 \quad \text{จะได้} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(2,4,2)=-16$$

สมการระนาบสัมผัส ณ จุด (a,b,c)

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)=0$$

สมการระนาบสัมผัส ณ จุด $(2,4,2)$ คือ

$$(x-2)\frac{\partial F}{\partial x}(2,4,2)+(y-4)\frac{\partial F}{\partial y}(2,4,2)+(z-2)\frac{\partial F}{\partial z}(2,4,2)=0$$

$$(x-2)(4)+(y-4)(32)+(z-2)(-16)=0$$

$$4x+32y-16z-104=0$$

ดังนั้น สมการระนาบสัมผัส ณ จุด $(2,4,2)$ คือ $4x+32y-16z-104=0$

จากสมการเส้นแนวฉากที่จุด (a,b,c)

$$x=a+t\frac{\partial}{\partial x}F(a,b,c),\ y=b+t\frac{\partial}{\partial y}F(a,b,c),\ z=c+t\frac{\partial}{\partial z}F(a,b,c)$$

จากสมการเส้นแนวฉากที่จุด $(2,4,2)$

$$x=2+t\frac{\partial}{\partial x}F(2,4,2)=2+t(4)=2+4t$$

$$y=4+t\frac{\partial}{\partial y}F(2,4,2)=4+t(32)=4+32t$$

$$z=2+t\frac{\partial}{\partial z}F(2,4,2)=2+t(-16)=2-16t$$

ดังนั้น สมการเส้นแนวฉากที่จุด $(2,4,2)$ คือ $x=2+4t, y=4+32t, z=2-16t$

จากนิยาม 4.3ในกรณีที่ สมการผิวโค้งในอยู่รูป $z=f(x,y)$ จัดรูปสมการ

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial x}F(a,b,c)=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial y}F(a,b,c)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z)=-1 \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial z}F(a,b,c)=-1$$

จะได้สมการเส้นตั้งฉากกับผิวโค้ง คือ

$$x=a+t\frac{\partial}{\partial x}f(a,b),\ y=b+t\frac{\partial}{\partial y}f(a,b),\ z=c-t$$

และสมการระนาบที่สัมผัสผิวโค้ง คือ

$$(x-a)\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)-(z-c)=0$$

ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาสมการเส้นปกติและระนาบสัมผัสของผิวโค้ง $f(x,y)=x^2+xy-y^2$ ที่จุด $(1,2,-5)$

วิธีทำ จาก $f(x,y)=x^2+xy-y^2$

จัดรูป $F(x,y,z)=x^2+xy-y^2-z$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z)=2x+y \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial x}F(1,2,-5)=2(1)+(2)=4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z)=x-2y \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial y}F(1,2,-5)=(1)-2(2)=-3$$

$$\frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z)=-1 \quad \text{จึงได้} \quad \frac{\partial}{\partial z}F(1,2,-5)=-1$$

จะได้สมการเส้นตั้งฉากกับผิวโค้งที่จุด $(1,2,-5)$ คือ

$$x = 1 + t(4) = 1 + 4t$$
$$y = 2 + t(-3) = 2 - 3t$$
$$z = -5 + t(-1) = -5 - t$$

ดังนั้น สมการเส้นตั้งฉากกับผิวโค้ง คือ $x = 1 + 4t, y = 2 - 3t, z = -5 - t$

และสมการระนาบสัมผัสของผิวโค้ง ที่จุด $(1,2,-5)$ คือ

$$(x-1)(4) + (y-2)(-3) - (z+5) = 0$$
$$4x - 3y - z - 3 = 0$$

ดังนั้น สมการระนาบคือ $4x - 3y - z - 3 = 0$

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาสมการระนาบที่สัมผัสผิว และสมการเส้นตั้งฉากผิว $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ ที่จุด $(1,-1,2)$

วิธีทำ

$$F(x,y,z) = 2xz^2 - 3xy - 4x$$
$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xz^2 - 3xy - 4x\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2xz^2 - 3xy - 4x\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(2xz^2 - 3xy - 4x\right)\vec{k}$$
$$= \left(2z^2 - 3y - 4\right)\vec{i} - 3x\vec{j} + 4xz\vec{k}$$
$$\nabla f(1,-1,1) = \left[2(1)^2 - 3(-1) - 4\right]\vec{i} - 3(1)\vec{j} + 4(1)(1)\vec{k}$$
$$= \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

สมการระนาบที่สัมผัสผิวที่จุด $(1,-1,2)$ คือ

$$1(x-1) + (-3)\left[y-(-1)\right] + (4)(z-2) = 0$$
$$x - 1 - 3y - 3 + 4z - 8 = 0$$
$$x - 3y + 4z - 12 = 0$$

ดังนั้น สมการระนาบที่สัมผัสผิว คือ $x - 3y + 4z - 12 = 0$

สมการเส้นตั้งฉากกับผิวที่จุด $(1,-1,2)$ คือ

$$x = 1 + t$$
$$y = -1 - 3t$$
$$z = 2 + 4t$$

ดังนั้น สมการเส้นตั้งฉาก คือ $x = 1 + t, y = -1 - 3t, z = 2 + 4t$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาสมการระนาบที่สัมผัสผิวและสมการเส้นตั้งฉากผิว $x^2+y^2-z^2-24=0$ ที่จุด $(3,-1,2)$

วิธีทำ

$$\vec{F}(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-24$$

$$\nabla\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2-z^2-24\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2-z^2-24\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2-z^2-24\right)\vec{k}$$

$$=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}$$

$$\nabla f(3,-1,2)=2(3)\vec{i}+2(-1)\vec{j}-2(2)\vec{k}$$

$$=6\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$$

สมการระนาบที่สัมผัสผิวที่จุด $(1,-1,2)$ คือ

$$6(x-6)-2[y-(-1)]-4(z-2)=0$$

$$6x-36-2y-2-4z+8=0$$

$$6x-2y-4z-30=0$$

ดังนั้น สมการระนาบที่สัมผัสผิว คือ $6x-2y-4z-30=0$

สมการเส้นตั้งฉากผิว จุด $(1,-1,2)$ คือ

$$x=1+6t$$

$$y=-1-2t$$

$$z=2-4t$$

ดังนั้น สมการเส้นตั้งฉากผิว $x=1+6t, y=-1-2t, z=2-4t$

4.4 สนามเวกเตอร์ และ เส้นกระแส

นิยาม 4.4.1 สนามเวกเตอร์ (vector field) คือ ฟังก์ชันซึ่งกำหนดเวกเตอร์จุดแต่ละจุดในโดเมนเพียงเวกเตอร์เดียว

สนามเวกเตอร์ในสองมิติ จะเขียนในรูป

$$\vec{F}(x,y)=f(x,y)\vec{i}+g(x,y)\vec{j}$$

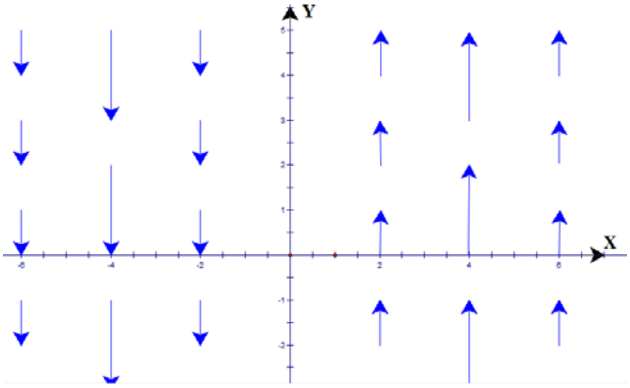
สนามเวกเตอร์ในสามมิติ จะเขียนในรูป

$$\vec{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$$

สำหรับ $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{x^2+y^2}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่ไม่นิยาม เมื่อ $x^2+y^2=0$ ซึ่ง $x^2+y^2=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=y=0$ นั่นคือ สนามเวกเตอร์นี้ไม่นิยามสำหรับจุดต่างๆบนแกน Z

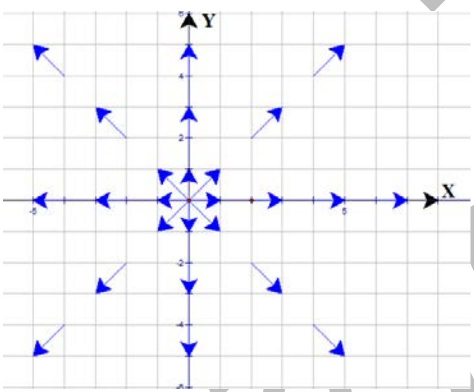
ตัวอย่าง 4.4.1 พิจารณากราฟของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y)=2x\vec{i}$

วิธทำ

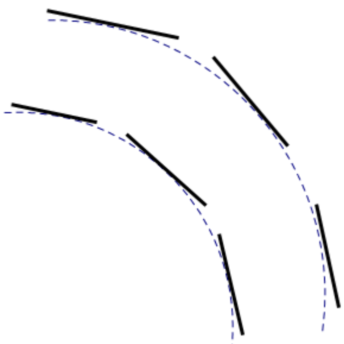


ตัวอย่าง 4.4.2 พิจารณากราฟของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}$

วิธีทำ



สนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่นิยามและไม่เป็นศูนย์ที่ทุกๆ จุดของบริเวณในปริภูมิเส้นโค้งใด ๆ ที่ผ่านบริเวณนี้เรียกว่า เส้นกระแส (flow lime) ของ $\vec{F}$ ซึ่งที่ทุกๆ จุดบนเส้นโค้ง เวกเตอร์ $\vec{T}$ สัมผัสกับเส้นโค้งจะขนานกับ $\vec{F}$ ดังภาพที่ 4.4.1 ซึ่งเส้นกระแสแสดงด้วยเส้นปะ



ภาพที่ 4.4.1 เส้นกระแส

ถ้า $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง สำหรับจุดใด ๆ บนเส้นกระแส และถ้า s แทนความยาวของเส้นโค้ง แล้วเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยกับเส้นโค้งที่จุดนั้น กำหนดโดย

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}$$

จาก $\vec{T}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\vec{i} + g(x,y,z)\vec{j} + h(x,y,z)\vec{k}$ จะได้

$$\vec{T} = \alpha\vec{F}$$

สำหรับ α เป็นค่าของฟังก์ชันที่เป็นสเกลาร์ที่เป็นฟังก์ชันของ x, y และ z จึงได้ว่า

$$\alpha f = \frac{dx}{ds}$$

$$\alpha g = \frac{dy}{ds}$$

$$\alpha h = \frac{dz}{ds}$$

ถ้า f, g และ h ไม่เป็นศูนย์ สามารถจำกัด α และ ds จะได้ว่า $\dfrac{dx}{f} = \dfrac{dy}{g} = \dfrac{dz}{h}$ ....(1)

จากสมการ (1) สามารถหาสมการของกระแสได้โดยการปริพันธ์ เมื่อกำหนด $\vec{F}$

ตัวอย่าง 4.4.3 ให้สนาม $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ จงหาสมการของเส้นกระแสที่ผ่านจุด $(3,4,7)$

วิธีทำ จาก $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k}$ จึงได้ $f = x, g = y$ และ $h = 1$

จาก
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{1}$$

$$\frac{dx}{x} = dz$$

จะได้ว่า
$$\ln x = z + \ln C_1$$

$$x = C_1 e^z \qquad \text{...........}(1)$$

จาก
$$\frac{dy}{y} = dz$$

จะได้ว่า
$$y = C_2 e^z \qquad \text{...........}(2)$$

จากสมการ (1) จะกำจัด C_1

ที่จุด $(3,4,7)$ จะได้
$$x = C_1 e^z$$

$$3 = C_1 e^7$$

$$C_1 = 3e^{-7}$$

จากสมการ (2) จะกำจัด C_2

ที่จุด $(3,4,7)$ จะได้
$$y = C_2 e^z$$

$$4 = C_2 e^7$$

$$C_2 = 4e^{-7}$$

ดังนั้น สมการของเส้นกระแสที่จุด $(3,4,7)$ คือ $x = 3e^{z-7}, y = 4e^{z-7}$

ตัวอย่าง

4.5 การลู่ออกและเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

สำหรับสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)= f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$ จาก ตัวดำเนินการ ∇ คือ $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

พิจารณา $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial x}g(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z}h(x,y,z)$$

จะได้ $\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งสรุปเป็นนิยาม ดังนี้

นิยาม 4.5.1 สำหรับสนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)= f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$ แล้วการลู่ออก (divergence) ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $div\,\vec{F}$ โดยที่ $div\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$

ข้อสังเกต การดำเนินการ $\nabla\cdot\vec{F}$ คล้ายการดำเนินการผลคูณภายในของสองเวกเตอร์ แต่ $\nabla\cdot\vec{F}$ ไม่มีสมบัติการการสลับที่ นั่นคือ $\nabla\cdot\vec{F}\neq\vec{F}\cdot\nabla$ เนื่องจาก $\vec{F}\cdot\nabla= f\frac{\partial}{\partial x}+g\frac{\partial}{\partial y}+h\frac{\partial}{\partial z}$

ตัวอย่าง 4.5.1 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z)=4x^2yz\vec{i}+xy^2\vec{j}+2yz^2\vec{k}$ จงหาการลู่ออกของ $\vec{F}$

วิธีทำ

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2yz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2yz^2\right)$$

$$=8xyz+2xy+4yz$$

ดังนั้น การลู่ออกของ $\vec{F}$ คือ $8xyz+2xy+4yz$

ตัวอย่าง 4.5.2 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z)=xe^y\vec{i}+z\sin y\vec{j}+xy\ln z\vec{k}$ จงหาการลู่ออกของ $\vec{F}$ ที่จุด $(3,0,1)$

วิธีทำ

$$div\,\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y\right)+\frac{\partial}{\partial y}(z\sin y)+\frac{\partial}{\partial z}(xy\ln z)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y\right)+\frac{\partial}{\partial y}(z\sin y)+\frac{\partial}{\partial z}(xy\ln z)$$

$$=e^y+z\cos y+\frac{xy}{z}$$

ที่จุด $(3,0,1)$; $div\,\vec{F}(3,0,1)=e^{(0)}+(1)\cos(0)+\frac{(3)(0)}{(1)}=2$

ดังนั้น การลู่ออกของ $\vec{F}$ ที่จุด $(3,0,1)$ คือ 2

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 4.5.1 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเวกเตอร์ แล้ว $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$

พิสูจน์ สำหรับสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ ใด ๆ

ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ และ $\vec{G}=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)&=\nabla\cdot\left[(f_1+g_1)\vec{i}+(f_2+g_2)\vec{j}+(f_3+g_3)\vec{k}\right]\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\&=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$

ทฤษฎีบท 4.5.2 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ ที่เป็นสนามเวกเตอร์ แล้ว $\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}-\nabla\cdot\vec{G}$

พิสูจน์ สำหรับสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ ใด ๆ

ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ และ $\vec{G}=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)&=\nabla\cdot\left[(f_1-g_1)\vec{i}+(f_2-g_2)\vec{j}+(f_3-g_3)\vec{k}\right]\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\left(-\frac{\partial g_1}{\partial x}-\frac{\partial g_2}{\partial y}-\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\&=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\\&=\nabla\cdot\vec{F}-\nabla\cdot\vec{G}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}-\nabla\cdot\vec{G}$

ตัวอย่าง 4.5.3 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=xe^y\vec{i}+y^2\vec{j}+xz\vec{k}$ และ $\vec{G}(x,y,z)=2x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$

จงหา $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)$ และ $\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}\vec{F}(x,y,z)&=xe^y\vec{i}+y^2\vec{j}+xz\vec{k}\\\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}(xz)\\&=e^y+2y+x\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$\vec{G}(x,y,z) = 2x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{G}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right)$$

$$= 4x + 2y + 2z$$

จาก $$\nabla \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$$

$$= \left(e^y + 2y + x\right) + \left(4x + 2y + 2z\right)$$

$$= 5x + 4y + e^y + 2z$$

ดังนั้น $\nabla \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = 5x + 4y + e^y + 2z$

จาก $$\nabla \cdot \left(\vec{F} - \vec{G}\right) = \nabla \cdot \vec{F} - \nabla \cdot \vec{G}$$

$$= \left(e^y + 2y + x\right) - \left(4x + 2y + 2z\right)$$

$$= -3x + e^y - 2z$$

ดังนั้น $\nabla \cdot \left(\vec{F} - \vec{G}\right) = -3x + e^y - 2z$

ทฤษฎีบท 4.5.3 สำหรับ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์และ ϕ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว

$$\nabla \cdot \left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla\phi$$

พิสูจน์ ให้ สนามเวกเตอร์ $\vec{F} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ และ ϕ เป็นฟังก์ชันเชิงสเกลาร์

พิจารณา $$\nabla \cdot \left(\phi\vec{F}\right) = \nabla \cdot \left(\phi f_1\vec{i} + \phi f_2\vec{j} + \phi f_3\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_3)$$

$$= \left(\phi\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_1\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \left(\phi\frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial z} + f_3\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\phi\frac{\partial f_1}{\partial x} + \phi\frac{\partial f_2}{\partial y} + \phi\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(f_1\frac{\partial \phi}{\partial x} + f_2\frac{\partial \phi}{\partial y} + f_3\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) + \left(f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \phi\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla\phi$$

ดังนั้น $\nabla \cdot \left(\phi\vec{F}\right) = \phi\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla\phi$

ตัวอย่าง 4.5.4 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=xe^{y}\vec{i}+y^{2}\vec{j}+xz\vec{k}$ และ $\phi=x^{2}-xy-z$ จงหา $\nabla\cdot\left(\phi\vec{F}\right)$

วิธีทำ $\vec{F}(x,y,z)=xe^{y}\vec{i}+y^{2}\vec{j}+xz\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(xz)\\
&= e^{y}+2y+x\\
\phi &= x^{2}-xy-z\\
\nabla\phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2}-xy-z\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{2}-xy-z\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^{2}-xy-z\right)\vec{k}\\
&= (2x-y)\vec{i}+(-x)\vec{j}+(-1)\vec{k}=(2x-y)\vec{i}-x\vec{j}-\vec{k}\\
\nabla\cdot\left(\phi\vec{F}\right) &= \phi\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla\phi\\
&= \left(x^{2}-xy-z\right)\left(e^{y}+2y+x\right)+\\
&\quad \left(xe^{y}\vec{i}+y^{2}\vec{j}+xz\vec{k}\right)\cdot\left[(2x-y)\vec{i}-x\vec{j}-\vec{k}\right]\\
&= \left(x^{2}e^{y}+2x^{2}y+x^{3}-xye^{y}-2xy^{2}-x^{2}y-ze^{y}-2yz-xz\right)+\\
&\quad \left[\left(xe^{y}\right)(2x-y)+y^{2}(-x)+(xz)(-1)\right]\\
&= \left(x^{2}e^{y}-xye^{y}-ze^{y}+x^{3}+x^{2}y-xy^{2}-xy-2yz\right)+\\
&\quad \left(2x^{2}e^{y}-xye^{y}+xy^{2}-xz\right)\\
&= 3x^{2}e^{y}-2xye^{y}-ze^{y}+x^{3}+x^{2}y-2xy^{2}-xy-xz-2yz
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\left(\phi\vec{F}\right)=3x^{2}e^{y}-2xye^{y}-ze^{y}+x^{3}+x^{2}y-2xy^{2}-xy-xz-2yz$

ทฤษฎีบท 4.5.4 สำหรับ ϕ เป็นฟังชันค่าจริงแล้ว $\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z^{2}}$

พิสูจน์ ให้ ϕ เป็นฟังชันเชิงสเกลาร์

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\phi &= \nabla\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\
&= \frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z^{2}}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z^{2}}$

ตัวอย่าง

จากทฤษฎีบท 4.5.4 คือการลู่ออกของเวกเตอร์เกรเดียนต์ $\nabla\cdot\nabla\phi$ สำหรับฟังก์ชันสเกลาร์ ϕ ใด ๆ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\nabla^2\phi$

จึงได้ว่า ∇^2 เป็นการดำเนินซึ่งเขียนในรูปสมการได้ดังนี้ $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ เป็นตัวดำเนินการอนุพันธ์

นิยาม 4.5.2 ตัวดำเนินการ ∇^2 ซึ่งเรียกว่าตัวดำเนินการลาปลาซ (laplacian oprator) และ สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f ใด ๆ ถ้า $\nabla^2 f=0$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันฮาโมนิก (harmonic function) และเรียกสมการ $\nabla^2 f=0$ สมการลาปลาซ (laplace equation)

ตัวอย่าง 4.5.5 ให้ $f(x,y)=x^2-y^2$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันฮาโมนิกหรือไม่

วิธีทำ จาก

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2x)=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-2y)=-2$$

$$\nabla^2 f=(2)+(-2)=0$$

เนื่องจาก $\nabla^2 f=0$
ดังนั้น $f(x,y)=x^2-y^2$ เป็นฟังก์ชันฮาโมนิก

ตัวอย่าง 4.5.6 ให้ $f(x,y)=e^x\cos y$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันฮาโมนิกหรือไม่

วิธีทำ จาก

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-e^x\sin y\right)=-e^x\cos y$$

$$\nabla^2 f=e^x\cos y+\left(-e^x\cos y\right)=0$$

เนื่องจาก $\nabla^2 f=0$
ดังนั้น $f(x,y)=e^x\cos y$ เป็นฟังก์ชันฮาโมนิก

นิยาม 4.5.3 กำหนดให้สนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$ แล้ว เคิร์ล (curl) ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ หรือการหมุน (rotation) ของ $\vec{F}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $Curl\,\vec{F}$ โดยที่

$$Curl\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f & g & h\end{vmatrix}$$

ในการกระจายตัวดำเนินการ $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ และ $\frac{\partial}{\partial z}$ ต้องอยู่หน้า f,g และ h

ตัวอย่าง 4.5.6 กำหนดให้สนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)=xe^{y}\vec{i}+z\cos y\vec{j}+xy\ln z\vec{k}$ จงหา $Curl\,\vec{F}$ ที่จุด $\left(-3,\frac{\pi}{2},e\right)$

วิธีทำ

$$Curl\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xe^{y} & z\cos y & xy\ln z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z\cos y & xy\ln z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xe^{y} & xy\ln z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ xe^{y} & z\cos y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}(xy\ln z)-\frac{\partial}{\partial z}(z\cos y)\right]\vec{i}-\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy\ln z)-\frac{\partial}{\partial z}(xe^{y})\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(z\cos y)-\frac{\partial}{\partial y}(xe^{y})\right]\vec{k}$$

$$=(x\ln z-\cos y)\vec{i}-y\ln z\vec{j}-xe^{y}\vec{k}$$

ที่จุด $\left(-3,\frac{\pi}{2},e\right)$

$$Curl\,\vec{F}\left(-3,\frac{\pi}{2},e\right)=\left[(-3)\ln(e)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\vec{i}-\frac{\pi}{2}\ln(e)\vec{j}-(-3)e^{\frac{\pi}{2}}\vec{k}$$

$$=-3\vec{i}-\frac{\pi}{2}\vec{j}+3e^{\frac{\pi}{2}}\vec{k}$$

ดังนั้น $Curl\,\vec{F}$ ที่จุด $\left(-3,\frac{\pi}{2},e\right)$ คือ $-3\vec{i}-\frac{\pi}{2}\vec{j}+3e^{\frac{\pi}{2}}\vec{k}$

ตัวอย่าง 4.5.7 ให้สนามเวกเตอร์ $\vec{F} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$ จงแสดงว่า

$$Curl\,\vec{F} = \vec{i}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \vec{j}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \vec{k}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$$

วิธีทำ $Curl\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix}$

$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial z}\vec{i} - \frac{\partial h}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{k} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$$

$$= \left(-\frac{\partial h}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial x}\vec{k}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}\right) + \left(-\frac{\partial g}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{j}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\vec{i}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}\right) + \left(\vec{j}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial y}\right) + \left(\vec{k}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}\right)$$

ดังนั้น $Curl\,\vec{F} = \vec{i}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \vec{j}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial y} + \vec{k}\times\frac{\partial\vec{F}}{\partial z}$

ทฤษฎีบท 4.5.5 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ ที่เป็นสนามเวกเตอร์ แล้ว $\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \nabla\times\vec{F} + \nabla\times\vec{G}$

พิสูจน์ สนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ ใด ๆ ให้ $\vec{F} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$ และ $\vec{G} = g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k}$

$$\vec{F}+\vec{G} = (f_1+g_1)\vec{i} + (f_2+g_2)\vec{j} + (f_3+g_3)\vec{k}$$

$$\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1+g_1 & f_2+g_2 & f_3+g_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_2+g_2 & f_3+g_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1+g_1 & f_3+g_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f_1+g_1 & f_2+g_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(f_3+g_3)-\frac{\partial}{\partial z}(f_2+g_2)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_3+g_3)-\frac{\partial}{\partial z}(f_1+g_1)\right)\vec{j}+$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_2+g_2)-\frac{\partial}{\partial y}(f_1+g_1)\right)\vec{k}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}+\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\right]\vec{i}-\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)\right]\vec{j}+$$

$$\left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\right]\vec{k}$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+$$

$$\left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial g_3}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_2 & f_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ f_1 & f_2\end{vmatrix}\vec{k}\right]+$$

$$\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ g_2 & g_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ g_1 & g_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ g_1 & g_2\end{vmatrix}\vec{k}\right]$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$

ทฤษฎีบท 4.5.6 สำหรับ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์และ ϕ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว

$$\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\left(\nabla\times\vec{F}\right)+(\nabla\phi)\times\vec{F}$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์และ ϕ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

$$\phi\vec{F}=\phi f_1\vec{i}+\phi f_2\vec{j}+\phi f_3\vec{k}$$

$$\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\nabla\times\left(\phi f_1\vec{i}+\phi f_2\vec{j}+\phi f_3\vec{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \phi f_1 & \phi f_2 & \phi f_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \phi f_2 & \phi f_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \phi f_1 & \phi f_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \phi f_1 & \phi f_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\phi f_3-\frac{\partial}{\partial z}\phi f_2\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi f_3-\frac{\partial}{\partial z}\phi f_1\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi f_2-\frac{\partial}{\partial y}\phi f_1\right)\vec{k}$$

$$=\left[\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial y}+f_3\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)-\left(\phi\frac{\partial f_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]\vec{i}-\left[\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial x}+f_3\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\left(\phi\frac{\partial f_1}{\partial z}+f_1\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right]\vec{j}+$$

$$\left[\left(\phi\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)-\left(\phi\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_1\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]\vec{k}$$

$$=\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{i}-\phi\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{i}\right)+\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{i}-f_2\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{i}\right)-\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{j}-\phi\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{j}\right)-$$

$$\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{j}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(\phi\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{k}-\phi\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{k}\right)+\left(f_2\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{k}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{k}\right)$$

$$=\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{i}-\phi\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{i}\right)-\left(\phi\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{j}-\phi\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(\phi\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{k}-\phi\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{k}\right)+$$

$$\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{i}-f_2\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{i}\right)-\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{j}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(f_2\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{k}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{k}\right)$$

$$=\phi\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+$$

$$\left[\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial y}-f_2\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(f_3\frac{\partial \phi}{\partial x}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(f_2\frac{\partial \phi}{\partial x}-f_1\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\phi\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}$$

$$=\phi\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\nabla\phi\right)\times\vec{F}$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\nabla\phi\right)\times\vec{F}$

ทฤษฎีบท 4.5.7 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเวกเตอร์ แล้ว

$$\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$$

พิสูจน์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเวกเตอร์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ และ $\vec{G}=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}$

$$\vec{F}\times\vec{G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1 & f_2 & f_3\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}$$

$$=(f_2g_3-f_3g_2)\vec{i}+(f_3g_1-f_1g_3)\vec{j}+(f_1g_2-f_2g_1)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_2g_3-f_3g_2)+\frac{\partial}{\partial y}(f_3g_1-f_1g_3)+\frac{\partial}{\partial z}(f_1g_2-f_2g_1)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}f_2g_3-\frac{\partial}{\partial x}f_3g_2\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}f_3g_1-\frac{\partial}{\partial y}f_1g_3\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}f_1g_2-\frac{\partial}{\partial z}f_2g_1\right)$$

$$=\left(f_2\frac{\partial g_3}{\partial x}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial x}-f_3\frac{\partial g_2}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\left(f_3\frac{\partial g_1}{\partial y}+g_1\frac{\partial f_3}{\partial y}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial y}-g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)$$

$$\left(f_1\frac{\partial g_2}{\partial z}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial z}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial z}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$=\left(g_1\frac{\partial f_3}{\partial y}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial z}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial z}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial x}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial x}-g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)+$$

$$\left(f_1\frac{\partial g_2}{\partial z}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial y}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial z}+f_3\frac{\partial g_1}{\partial y}-f_3\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)g_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)g_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)g_3\right]-$$

$$\left[f_1\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)+f_2\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)+f_3\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\vec{k}\right]\cdot\left(g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}\right)-$$

$$\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

$$=\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$

ทฤษฎีบท 4.5.8 สำหรับ ϕ เป็นฟังชันค่าจริงใด ๆ $\nabla\times(\nabla\phi)=\vec{0}$

พิสูจน์ ให้ ϕ เป็นฟังชันค่าจริง ใด ๆ ซึ่ง $\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\phi) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} \\
&= 0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\times(\nabla\phi)=\vec{0}$ สำหรับ ϕ เป็นฟังชันเชิงสเกลาร์ใด ๆ

ทฤษฎีบท 4.5.9 สำหรับ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์

และ $\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial x}\right)=0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$

ทฤษฎีบท 4.5.10 สำหรับ $\vec{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์

และ $\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}$

พิจารณา $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{vmatrix}\vec{j}+$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\right]\vec{i}-$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\right]\vec{j}+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\right]\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial x}\right]\vec{i}-$$

$$\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right]\vec{j}+$$

$$\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}\right]\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial x}+\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)\right]\vec{i}+$$

$$\left[-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\right)\right]\vec{j}+$$

ตัวอย่าง

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right)\right]\vec{k} \\
&=\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right]\vec{i}+ \\
&\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right]\vec{j}+ \\
&\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right]\vec{k} \\
&=\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial z}\right]\vec{i}-\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right]\vec{i}+ \\
&\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}\right]\vec{j}-\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right]\vec{j} \\
&\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right]\vec{k}-\left[\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right]\vec{k} \\
&=\left\{\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial x\partial z}\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y\partial z}\right]\vec{j}+\right. \\
&\left.\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right]\vec{k}\right\}-\left\{\left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right]\vec{i}+\right. \\
&\left.\left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right]\vec{k}\right\} \\
&=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right]\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right]\vec{j}+\right. \\
&\left.\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right]\vec{k}\right\}-\left\{\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\vec{i}+\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\vec{i}+\right. \\
&\left.\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\vec{j}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}\vec{k}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}\vec{k}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\vec{k}\right\} \\
&=\left\{\nabla\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right]\right\}-\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)+\right. \\
&\left.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)\right\} \\
&=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$

ทฤษฎีบท 4.5.11 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ

$$\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ และ $\vec{G}=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) &= \nabla\left(f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3\right)\\
&= \nabla f_1g_1+\nabla f_2g_2+\nabla f_3g_3\\
&= \left(f_1\nabla g_1+g_1\nabla f_1\right)+\left(f_2\nabla g_2+g_2\nabla f_2\right)+\left(f_3\nabla g_3+g_3\nabla f_3\right)\\
&= \left[f_1\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial g_1}{\partial z}\vec{k}\right)+g_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}\right)\right]+\\
&\quad\left[f_2\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial g_2}{\partial z}\vec{k}\right)+g_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}\right)\right]+\\
&\quad\left[f_3\left(\frac{\partial g_3}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial g_3}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{k}\right)+g_3\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k}\right)\right]\\
&= \left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{i}+f_1\frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{j}+f_1\frac{\partial g_1}{\partial z}\vec{k}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}\right)+\\
&\quad\left(f_2\frac{\partial g_2}{\partial x}\vec{i}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{j}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial z}\vec{k}\right)+\left(g_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}\right)+\\
&\quad\left(f_3\frac{\partial g_3}{\partial x}\vec{i}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial y}\vec{j}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{k}\right)+\left(g_3\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{i}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{j}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k}\right)\\
&= \left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial x}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{i}+\\
&\quad\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial y}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\vec{j}+\\
&\quad\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial z}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial z}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\vec{k}\\
&= \Bigg\{f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial x}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial x}+\left(f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)+\left(f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}-f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)+\\
&\quad g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial x}+\left(g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}-g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)+\left(g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}-g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\Bigg\}\vec{i}+\\
&\quad\Bigg\{f_1\frac{\partial g_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial y}+\left(f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}-f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}\right)+\left(f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}-f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)+\\
&\quad g_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}+\left(g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)+\left(g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}-g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\Bigg\}\vec{j}+\\
&\quad f_1\frac{\partial g_1}{\partial z}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial z}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}+\left(f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)+\left(f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}-f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}\right)+
\end{aligned}$$

$$g_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}+\left(g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}-g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+\left(g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\Bigg\}\vec{k}$$

$$=\Bigg\{\left(f_2\frac{\partial g_2}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}-f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)+\left(g_2\frac{\partial f_2}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}-g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)+$$

$$\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\Bigg\}\vec{i}$$

$$\Bigg\{\left(-f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial g_1}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial y}-f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)+\left(-g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial y}-g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$+\left(f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\Bigg\}\vec{j}+$$

$$\Bigg\{\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial z}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial z}-g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

$$+\left(f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\Bigg\}k$$

$$=\vec{F}\times\left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+$$

$$\vec{G}\times\left[\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]+$$

$$\left(f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{G}+\left(g_1\frac{\partial}{\partial x}+g_2\frac{\partial}{\partial y}+g_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{F}$$

$$=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}$$

ดังนั้น $\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}$

ทฤษฎีบท 4.5.12 สำหรับ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ

$$\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}-\vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ และ $\vec{G}=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์

จาก $$\vec{F}\times\vec{G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1 & f_2 & f_3\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(f_2g_3-f_3g_2\right)\vec{i}+\left(f_3g_1-f_1g_3\right)\vec{j}+\left(f_1g_2-f_2g_1\right)\vec{k}$$

$$\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_2g_3-f_3g_2 & f_3g_1-f_1g_3 & f_1g_2-f_2g_1\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_3g_1-f_1g_3 & f_1g_2-f_2g_1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f_2g_3-f_3g_2 & f_1g_2-f_2g_1\end{vmatrix}\vec{j}+\\
&\quad\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ f_2g_3-f_3g_2 & f_3g_1-f_1g_3\end{vmatrix}\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left[\frac{\partial}{\partial y}(f_1g_2-f_2g_1)-\frac{\partial}{\partial z}(f_3g_1-f_1g_3)\right]\vec{i}-\\
&\quad\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_1g_2-f_2g_1)-\frac{\partial}{\partial z}(f_2g_3-f_3g_2)\right]\vec{j}+\\
&\quad\left[\frac{\partial}{\partial x}(f_3g_1-f_1g_3)-\frac{\partial}{\partial y}(f_2g_3-f_3g_2)\right]\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}(f_1g_2)-\frac{\partial}{\partial y}(f_2g_1)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}(f_3g_1)-\frac{\partial}{\partial z}(f_1g_3)\right)\right]\vec{i}-\\
&\quad\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_1g_2)-\frac{\partial}{\partial x}(f_2g_1)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}(f_2g_3)-\frac{\partial}{\partial z}(f_3g_2)\right)\right]\vec{j}+\\
&\quad\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(f_3g_1)-\frac{\partial}{\partial x}(f_1g_3)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial y}(f_2g_3)-\frac{\partial}{\partial y}(f_3g_2)\right)\right]\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left\{f_1\frac{\partial g_2}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial y}-f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}-g_1\frac{\partial f_3}{\partial z}+f_1\frac{\partial g_3}{\partial z}+\right.\\
&\quad\left.g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}\right\}\vec{i}+\left\{-f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_1}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial z}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}\right.\\
&\quad\left.-f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial z}\right\}\vec{j}+\left\{f_3\frac{\partial g_1}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}-g_3\frac{\partial f_1}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}\right.\\
&\quad\left.-g_3\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}\right\}\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\left\{f_1\frac{\partial g_2}{\partial y}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial y}-f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}-g_1\frac{\partial f_3}{\partial z}+f_1\frac{\partial g_3}{\partial z}+\right.\\
&\quad\left.g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}+\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}-g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)+\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}-f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}\right)\right\}\vec{i}+\\
&\quad\left\{-f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_1}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial z}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}-f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}\right.
\end{aligned}$$

$$-g_2\frac{\partial f_3}{\partial z}+\left(g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}-g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)+\left(f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}-f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}\right)\Bigg\}\vec{j}+$$

$$\Bigg\{f_3\frac{\partial g_1}{\partial x}+g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}-g_3\frac{\partial f_1}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}-g_3\frac{\partial f_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial y}+$$

$$g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}+\left(g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}-g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\left(f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}-f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\Bigg\}\vec{k}$$

$$=\Bigg\{g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}-g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}-g_1\frac{\partial f_2}{\partial y}-g_1\frac{\partial f_3}{\partial z}-f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}$$

$$-f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}+f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_1\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_1\frac{\partial g_3}{\partial z}\Bigg\}\vec{i}+$$

$$\Bigg\{g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}-g_2\frac{\partial f_1}{\partial x}-g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}-g_2\frac{\partial f_3}{\partial z}-f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$-f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}+f_2\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial z}\Bigg\}\vec{j}+$$

$$\Bigg\{g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}+g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}-g_3\frac{\partial f_1}{\partial x}-g_3\frac{\partial f_2}{\partial y}-g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}-f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}-f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}$$

$$-f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}+f_3\frac{\partial g_1}{\partial x}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial y}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\Bigg\}\vec{k}$$

$$=\Bigg\{\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i}+g_2\frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{i}+g_3\frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{i}\right)+\left(g_1\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{j}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{j}\right)+$$

$$\left(g_1\frac{\partial f_3}{\partial x}\vec{k}+g_2\frac{\partial f_3}{\partial y}\vec{k}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k}\right)\Bigg\}-\Bigg\{\left(g_1\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{i}+g_1\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{i}+g_1\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{i}\right)+$$

$$\left(g_2\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{j}+g_2\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{j}+g_2\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(g_3\frac{\partial f_1}{\partial x}\vec{k}+g_3\frac{\partial f_2}{\partial y}\vec{k}+g_3\frac{\partial f_3}{\partial z}\vec{k}\right)\Bigg\}-$$

$$\Bigg\{\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{i}+f_2\frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{i}+f_3\frac{\partial g_1}{\partial z}\vec{i}\right)+\left(f_1\frac{\partial g_2}{\partial x}\vec{j}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{j}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial z}\vec{j}\right)+$$

$$\left(f_1\frac{\partial g_3}{\partial x}\vec{k}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial y}\vec{k}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{k}\right)\Bigg\}+\Bigg\{\left(f_1\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{i}+f_1\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{i}+f_1\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{i}\right)+$$

$$\left(f_2\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{j}+f_2\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{j}+f_2\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{j}\right)+\left(f_3\frac{\partial g_1}{\partial x}\vec{k}+f_3\frac{\partial g_2}{\partial y}\vec{k}+f_3\frac{\partial g_3}{\partial z}\vec{k}\right)\Bigg\}$$

$$=\left[\left(g_1\frac{\partial}{\partial x}+g_2\frac{\partial}{\partial y}+g_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)\right]-$$

$$\left[\left(g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\right]-$$

$$\left[\left(f_1\frac{\partial}{\partial x}+f_2\frac{\partial}{\partial y}+f_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}\right)\right]+$$

$$\left[\left(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}\right)\right]$$

$$=\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}-\vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}-\vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)$

ตัวอย่าง 4.5.8 ให้ $\vec{F}=3xz^2\vec{i}+yz\vec{j}-2xz\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ใด ๆ และ $\phi=x^2yz$ เป็นฟังชันก์ค่าจริง จงหา

1. $\nabla\times\vec{F}$
2. $\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)$
3. $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)$
4. $\nabla\left[\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)\right]$
5. $\nabla\times\left(\nabla\phi\right)$

วิธีทำ 1. $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3xz^2&yz&-2xz\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ yz&-2xz\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3xz^2&-2xz\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ 3xz^2&yz\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial y}-\frac{\partial yz}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x}-\frac{\partial 3xz^2}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial yz}{\partial x}-\frac{\partial 3xz^2}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$=-y\vec{i}+(2z+6xz)\vec{j}$$

ดังนั้น $\nabla\times\vec{F}=-y\vec{i}+(2z+6xz)\vec{j}$

2. พิจารณา $\phi\vec{F}=\left(x^2yz\right)\left(3xz^2\right)\vec{i}+\left(x^2yz\right)(yz)\vec{j}-\left(x^2yz\right)(2xz)\vec{k}$

$$=3x^3yz^3\vec{i}+x^2y^2z^2\vec{j}-2x^3yz^2\vec{k}$$

$$\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^3yz^3&x^2y^2z^2&-2x^3yz^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^2z^2&-2x^3yz^2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ 3x^3yz^3&-2x^3yz^2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ 3x^3yz^3&x^2y^2z^2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-2x^3yz^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y^2z^2\right)\right]\vec{i}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^3yz^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(3x^3yz^3\right)\right]+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2z^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3yz^3\right)\right]\vec{k}$$

$$=\left(-2x^3z^2-2x^2y^2z\right)\vec{i}-\left(-6x^2yz^2-9x^3yz^2\right)\vec{j}+\left(2xy^2z^2-3x^3z^3\right)\vec{k}$$

$$=2x^2z\left(xz-y^2\right)\vec{i}+3x^2yz^2\left(2+3x\right)\vec{j}+xz^2\left(2y^2-3x^2z\right)\vec{k}$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=2x^2z\left(xz-y^2\right)\vec{i}+3x^2yz^2\left(2+3x\right)\vec{j}+xz^2\left(2y^2-3x^2z\right)\vec{k}$

3. จากข้อ 1 $\nabla\times\vec{F}=-y\vec{i}+\left(2z+6xz\right)\vec{j}$

พิจารณา $$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & 2z+6xz & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2z+6xz & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ -y & 2z+6xz\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left[0-\frac{\partial}{\partial z}(2z+6xz)\right]\vec{i}-\left[0-\frac{\partial}{\partial z}(-y)\right]\vec{j}+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(2z+6xz)-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right]\vec{k}$$

$$=(-2-6x)\vec{i}+(6z+1)\vec{k}$$

ดังนั้น $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=(-2-6x)\vec{i}+(6z+1)\vec{k}$

4. พิจารณา $\nabla\times\vec{F}=-y\vec{i}+\left(2z+6xz\right)\vec{j}$

$$\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\left(3xz^2\vec{i}+yz\vec{j}-2xz\vec{k}\right)\cdot\left[-y\vec{i}+\left(2z+6xz\right)\vec{j}\right]$$

$$=\left(3xz^2\right)(-y)+(yz)(2z+6xz)+(-2xz)0$$

$$=-3xyz^2+2yz^2+6xyz^2$$

$$=3xyz^2+2yz^2$$

$$=yz^2\left(3x+2\right)$$

$$\nabla\left[\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)\right]=\nabla\left(3xyz^2+2yz^2\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(3xyz^2+2yz^2\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(3xyz^2+2yz^2\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(3xyz^2+2yz^2\right)\vec{k}$$

$$=3yz^2\vec{i}+\left(3xz^2+2z^2\right)\vec{j}+\left(6xyz+4yz\right)\vec{k}$$

ดังนั้น $\nabla\left[\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)\right]=3yz^2\vec{i}+\left(3xz^2+2z^2\right)\vec{j}+\left(6xyz+4yz\right)\vec{k}$

5. จาก $\phi = x^2yz$

พิจารณา $$\nabla\phi = \nabla\left(x^2yz\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2yz\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2yz\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2yz\right)\vec{k}$$

$$= 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$$

$$\nabla\times(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & x^2y \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2y \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xyz & x^2z \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2z\right)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(2xyz\right)\right]\vec{j} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2xyz\right)\right]\vec{k}$$

$$= \left(x^2 - x^2\right)\vec{i} - \left(2xy - 2xy\right)\vec{j} + \left(2xz - 2xz\right)\vec{k} = \vec{0}$$

ดังนั้น $\nabla\times(\nabla\phi) = \vec{0}$

ตัวอย่าง 4.5.9 ให้ $\vec{F} = (x+2y+4z)\vec{i} + (2x-3y-z)\vec{j} + (4x-y+2z)\vec{k}$ เป็นสนามเวกเตอร์ โดยที่ $\nabla\times\vec{u} = \vec{0}$ จงหาฟังก์ชันค่าจริง ϕ ซึ่งทำให้ $\vec{u} = \nabla\phi$

วิธีทำ ให้ $\phi(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

พิจารณา $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

จาก $$\vec{F} = \nabla\phi$$

จะได้ $(x+2y+4z)\vec{i} + (2x-3y-z)\vec{j} + (4x-y+2z)\vec{k} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = (x+2y+4z) \qquad \text{...........}(1)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = (2x-3y-z) \qquad \text{...........}(2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = (4x-y+2z) \qquad \text{...........}(3)$$

จากสมการ (1) ปริพันธ์เทียบกับ x

$$\phi(x,y,z) = \int x+2y+4zdx + f(y,z)$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z) \qquad ....(4)$$

จากสมการ(4); $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\phi(x,y,z)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y,z)\right)$

$$= 2x + \frac{\partial}{\partial y} f(y,z)$$

จากสมการ (2); $2x + \dfrac{\partial}{\partial y} f(y,z) = 2x - 3y - z$

จงได้ $\qquad \dfrac{\partial}{\partial y} f(y,z) = -3y - z$

$$f(y,z) = \int -3y - z\,dy + f(z)$$

$$= -3\frac{y^2}{2} - yz + f(z) \text{ แทนในสมการ } (4)$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - 3\frac{y^2}{2} - yz + f(z) \qquad ....(5)$$

พิจารณา $\qquad \dfrac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - 3\dfrac{y^2}{2} - yz + f(z)\right]$

$$= 4x - y + \frac{\partial}{\partial z} f(z)$$

จากสมการ(3) $4x - y + \dfrac{\partial}{\partial z} f(z) = 4x - y + 2z$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = 2z$$

$$f(z) = z^2 + c \qquad \text{แทนในสมการ}(5)$$

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - 3\frac{y^2}{2} - yz + z^2 + c$$

ดังนั้น ฟังก์ชันค่าจริงซึ่งทำให้ $\vec{u} = \nabla\phi$ คือ $\phi = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - 3\dfrac{y^2}{2} - yz + z^2 + c$

สนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ซึ่ง $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ เรียกว่า โซลีนอยดัล (solenoidal) ในกรณีนี้อาจหาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{v}$ ซึ่งทำให้ $\vec{F} = \nabla \times \vec{v}$ ได้เนื่องจาก $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ และเรียก $\vec{v}$ ว่าศักย์เวกเตอร์ของ $\vec{F}$

ถ้า $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ แล้วจะสามารถหาฟังก์ชันค่าสเกลาร์ ϕ ที่ทำให้ $\vec{F} = \nabla\phi$ ได้ เนื่องจาก $\nabla \times (\nabla\phi)$ สนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ เนื่องมาจาก $\vec{F} = \nabla\phi$ นี้เรียกว่า สนามเวกเตอร์อนุรักษ์ (conservative vector field) ซึ่งเวกเตอร์ ซึ่งเวกเตอร์จะไม่หมุน (irrational vector) และเรียก ϕ ว่าฟังก์ชันศักย์ (potential function)

ตัวอย่าง

จากตัวอย่าง 4.28 ได้ว่า สนามเวกเตอร์อนุรักษ์ คือ $\vec{F}=(x+2y+4z)\vec{i}+(2x-3y-z)\vec{j}+(4x-y+2z)\vec{k}$ และฟังก์ชันศักย์ คือ $\phi=\dfrac{x^2}{2}+2xy+4xz-3\dfrac{y^2}{2}-yz+z^2+c$

4.6 สรุป

บทนี้ได้กล่าวถึง อนุพันธ์ระบุทิศทาง เวกเตอร์เกรเดียนต์ สมบัติเวกเตอร์เกรเดียนต์ เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่จุด P_0 สมการระนาบสัมผัสของเส้นโค้ง สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง สนามเวกเตอร์ และเส้นกระแส การลู่ออกและเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ สมบัติของการลู่ออก ของสนามเวกเตอร์ เคิร์ล และสมบัติเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ ดังรายละเอียดพอสรุปดังนี้

อนุพันธ์ระบุทิศทาง

สำหรับ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y อนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด (x_0,y_0) เทียบกับเวกเตอร์ $\vec{v}=v_1\vec{i}+v_2\vec{j}$ นั่นคือ

$$f'(x_0,y_0;\vec{v})=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hv_1,y_0+hv_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$ เมื่อลิมิตมีค่า

สมบัติของอนุพันธ์ระบุทิศทางสำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชัน $f'(x,y;\vec{u})=u_1\dfrac{\partial f}{\partial x}+u_2\dfrac{\partial f}{\partial y}$

เวกเตอร์เกรเดียนต์

ให้ f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปรซึ่งมีอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ซึ่งต่อเนื่องเวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f กำหนดโดย $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

และสำหรับ f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร x,y และ z เวกเตอร์เกรเดียนต์ของ f คือ

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

สมบัติเวกเตอร์เกรเดียนต์ สำหรับ f และ g ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริงสามตัวแปร สำหรับ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ

1. $\nabla c=\vec{0}$
2. $\nabla cf=c\nabla f$
3. $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$
4. $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
4. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$ เมื่อ $g^2=0$
6. $\nabla(f^n)=nf^{(n-1)}\nabla f$
7. ถ้า $f=f(g)$ และ $g=g(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\nabla f = \frac{df}{dg}\nabla f$$

8. $\nabla_{\vec{T}} f = \nabla f \cdot \vec{T}$

สำหรับผิวโค้ง $f(x,y,z)=c$ จะได้ว่า ∇f ณ ที่จุด P_0 เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบสัมผัสที่จุด P_0

ระนาบสัมผัสของเส้นโค้ง ระนาบสัมผัสของเส้นโค้ง $F(x,y,z)=c$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ ณ จุด $P(a,b,c)$ มีสมการ

$$(x-a)\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)+(y-b)\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)+(z-c)\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)=0$$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับผิวโค้ง ณ $P(a,b,c)$ มีสมการเป็น $x=a+t\frac{\partial}{\partial x}F(a,b,c)$,

$$y=b+t\frac{\partial}{\partial y}F(a,b,c)\ ,z=c+t\frac{\partial}{\partial z}F(a,b,c)$$

สนามเวกเตอร์ และเส้นกระแส

สนามเวกเตอร์ในสองมิติ คือ $\vec{F}(x,y)=f(x,y)\vec{i}+g(x,y)\vec{j}$

สนามเวกเตอร์ในสามมิติ คือ $\vec{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$

การลู่ออกและเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

สนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\vec{i}+g(x,y,z)\vec{j}+h(x,y,z)\vec{k}$ แล้วการ ลู่ออกของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ กำหนดโดย $div\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$

สมบัติของการลู่ออกของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ สำหรับ ϕ ที่เป็นฟังก์ชันค่าจริง

1. $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$
2. $\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)=\nabla\cdot\vec{F}-\nabla\cdot\vec{G}$
3. $\nabla\cdot\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla\phi$
4. $\nabla\cdot\nabla\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

ตัวดำเนินการ ∇^2

ตัวดำเนินการ ∇^2 ซึ่งเรียกว่าตัวดำเนินการลาปลาซ และ สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f ใด ๆ ถ้า $\nabla^2 f=0$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันฮาโมนิก และเรียกสมการ $\nabla^2 f=0$ สมการลาปลาซ

เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

ให้สนามเวกเตอร์ $\vec{F}(x,y,z)=f\vec{i}+g\vec{j}+h\vec{k}$ แล้ว เคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ หรือ

การหมุนของ $\vec{F}$ กำหนดโดย $Curl\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f & g & h\end{vmatrix}$

สมบัติของเคิร์ลของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ สำหรับ ϕ เป็นฟังชันค่าจริง

1. $\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$
2. $\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)=\phi\left(\nabla\times\vec{F}\right)+(\nabla\phi)\times\vec{F}$
3. $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right)$
4. $\nabla\times(\nabla\phi)=\vec{0}$

4\. $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$

6\. $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F}$

7\. $\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)=\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)+\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}$

8\. $\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}-\vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)$

ตัวอย่าง

แบบฝึกหัด 4

1. จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด P ในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1.1 $f(x,y,z) = xy + yz + z$ ที่จุด $P(1,1,-2)$ ในทิศทาง $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$
   1.2 $f(x,y,z) = x^2y + y^2 - 3z^2$ ที่จุด $P(1,-1,0)$ ในทิศทาง $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
   1.3 $f(x,y,z) = 3x\sin(yz)$ ที่จุด $P(1,2,1)$ ในทิศทาง $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
   1.4 $f(x,y,z) = x^2 - 2y + e^{2z}$ ที่จุด $P(0,2,-1)$ ในทิศทาง $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
   1.5 $f(x,y,z) = x - xyz$ ที่จุด $P(1,-2,2)$ ในทิศทาง $\vec{u} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

2. กำหนดให้ $f(x,y,z)$ จงหา ∇f ที่จุด P ต่อไปนี้
   2.1 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ ที่จุด $P(1,1,1)$
   2.2 $f(x,y,z) = 2x^3 - 3(y^2 + z^2)$ ที่จุด $P(1,2,-1)$
   2.3 $f(x,y,z) = 2x^3 + 4y^2 - z$ ที่จุด $P(0,0,0)$
   2.4 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $P(1,1,-1)$
   2.5 $f(x,y,z) = x + xyz$ ที่จุด $P(1,-2,2)$

3. จงหาสมการระนาบที่สัมผัสและเส้นปกติของส่วนโค้ง $f(x,y,z)$ ที่จุด P
   3.1 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ที่จุด $P(2,4,-1)$
   3.2 $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ ที่จุด $P(2,0,2)$
   3.3 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ ที่จุด $P(2,3,13)$
   3.4 $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ที่จุด $P(2,1,-1)$
   3.5 $f(x,y,z) = \sin(xy) + z^2$ ที่จุด $P\left(\pi, \frac{1}{2}, -1\right)$

4. จงหา $div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   4.1 $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$
   4.2 $\vec{F}(x,y,z) = -\frac{x}{z}\vec{i} - \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$
   4.3 $\vec{F}(x,y,z) = e^x \cos y\vec{i} + e^x \sin y\vec{j} + z\vec{k}$
   4.4 $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos x)\vec{i} + (y + y\sin y)\vec{j} + 2z\vec{k}$
   4.5 $\vec{F}(x,y,z) = e^{xy}\vec{i} - \cos y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$

ตัวอย่าง

5. ให้สนามเวกเตอร์ $\vec{F} = xe^{y}\vec{i} + z\sin y\vec{j} + xy\ln z\vec{k}, \vec{G} = xyz\vec{i} + ze^{y}\vec{j} + y\sin z\vec{k}$ และฟังก์ชันค่าจริง $\phi = x^3 - xy^2 - z$ จงหา

   5.1 $\nabla\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right)$

   5.2 $\nabla\cdot\left(\vec{F}-\vec{G}\right)$

   5.3 $\nabla\cdot\left(\phi\vec{F}\right)$

   5.4 $\nabla\cdot\left(\phi\vec{G}\right)$

   5.5 $\nabla\cdot\nabla\phi$

6. จงหา $Curl\vec{F}$ ของสนามเวกเตอร์ $\vec{F}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   6.1 $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$

   6.2 $\vec{F}(x,y,z) = -\frac{x}{z}\vec{i} - \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$

   6.3 $\vec{F}(x,y,z) = e^{x}\cos y\vec{i} + e^{x}\sin y\vec{j} + z\vec{k}$

   6.4 $\vec{F}(x,y,z) = (x+\cos x)\vec{i} + (y + y\sin y)\vec{j} + 2z\vec{k}$

   6.5 $\vec{F}(x,y,z) = e^{xy}\vec{i} - \cos y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$

7. ให้ สนามเวกเตอร์ $\vec{F} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + \left(x^2y+1\right)\vec{k}, \vec{G} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ และฟังก์ชันค่าจริง $\phi = x^3 - xy^2 - z$ จงหา

   7.1 $\nabla\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right)$

   7.2 $\nabla\times\left(\phi\vec{F}\right)$

   7.3 $\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$

   7.4 $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)$

   7.5 $\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)$

ตัวอย่าง

เอกสารอ้างอิง

จินดา อาจริยะกุล, ผู้แปล. (2539). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นามมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2547). **แคลคูลัส 3.** กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สมพงษ์ ใจดี. (2522). **เวกเตอร์และโคออร์ดิเนท.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนัญญู อภิชาตบุตร. (2549). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Baipai, M. W. (1990). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: John Wiley.

Ferdinand, P. B. (2004). **Vector mechanics for engineers: dynamics.** New York : McGraw-Hill.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: Addison Wesley.

Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3nd ed). New York: Harper & Row Publishers.

Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.

Spiegel, M. R. (1981). **Vector Analysis.** Singapore: McGraw–Hill International Book Company.

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

แผนบริหารการสอนประจำบทที่ 5

หัวข้อเนื้อหาประจำบท

5.1 ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง
5.2 ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
5.3 งาน
5.4 ปริพันธ์ตามเส้นเป็นอิสระจากวิถี
5.5 ทฤษฎีบทของกรีน
5.6 สมการเวกเตอร์ของผิว
5.7 การหาพื้นที่ของผิวโค้ง
5.8 ปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์
5.9 ทฤษฎีบทของสโตกส์
5.10 ทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนส์
5.11 สรุป
แบบฝึกหัด
เอกสารอ้างอิง

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

1. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริงได้
2. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
3. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่างานได้
4. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าปริพันธ์ตามเส้นเป็นอิสระจากวิถีได้
5. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจทฤษฎีบทของกรีน
6. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าสมการเวกเตอร์ของผิวได้
7. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจและหาค่าปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้
8. เพื่อให้นักศึกษาเกิดความรู้ความเข้าใจทฤษฎีบทของสโตกส์และทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนส์

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. ศึกษาเอกสารคำสอน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
2. การบรรยาย อภิปราย และซักถามประกอบการสอนด้วย Power point
3. ศึกษาจากคอมพิวเตอร์ประกอบการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป GSP
4. แบ่งกลุ่มอภิปราย สรุปบทเรียน
5. ฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
6. มอบหมายแบบฝึกหัดเป็นการบ้าน

ตัวอย่าง

7. ผู้สอบสรุปเนื้อหาเพิ่มเติม

สื่อการเรียนการสอน

1. Power point
2. เอกสารคำสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์
3. เครื่องคอมพิวเตอร์และ LCD
4. โปรแกรมสำเร็จรูป GSP

การวัดผลและการประเมินผล

1. นักศึกษาสามารถตอบข้อซักถามได้
2. นักศึกษาให้ความสนใจในการเรียนการสอน
3. สังเกตการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม
4. นักศึกษาสามารถทำแบบฝึกหัดได้

ตัวอย่าง

บทที่ 5
ปริพันธ์เชิงเวกเตอร์

ในบทนี้จะกล่าวถึงปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง ปริพันธ์ตามเส้นของค่าฟังก์ชันเวกเตอร์ งาน ปริพันธ์ตามเส้นและวิถีอิสระ ทฤษฎีบทของกรีน สมการเวกเตอร์ของผิว การหาพื้นที่ของผิวโค้ง ปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ทฤษฎีบทของสโตกส์ และทฤษฎีบทไดเวอร์เจนส์

ซึ่งการหาค่าของปริพันธ์ตามเส้นขึ้นอยู่กับเส้นโค้งและทิศทางของการเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง ซึ่งจะพิจารณาปริพันธ์ตามเส้นซึ่งมีค่าคงตัว โดยเริ่มจากการศึกษาลักษณะต่าง ๆ ของเส้นโค้ง ดังนี้

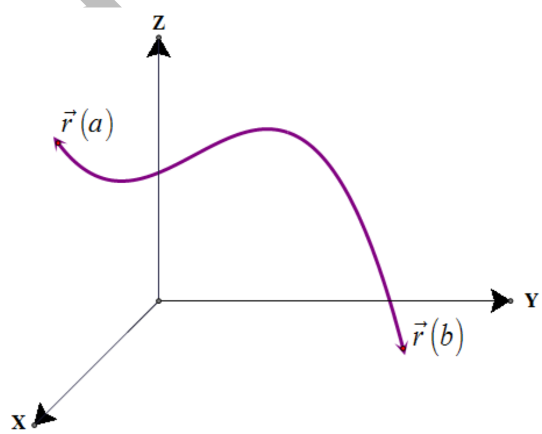
กำหนดความสัมพันธ์ $C=\left\{x(t),y(t),z(t)\,|\,\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\right\}$ เรียกกราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $a\le t\le b$

โดย $\vec{r}(a)$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $\vec{r}(b)$ เป็นจุดสิ้นสุด

1. กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t)$ เรียก เส้นโค้งวิถี (path) หรือ รอยทางเดินของการเคลื่อนที่
2. ถ้า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ แล้ว $\vec{r}$ เป็นวิถีต่อเนื่อง (continuous curve)

ถ้า วิถี $\vec{r}$ มีสมบัติว่า ทุกค่า $t_1,t_2\in(a,b)$ และ $t_1\ne t_2$ จะได้ $\vec{r}_1(t_1)\ne\vec{r}_2(t_2)$ แล้ว $\vec{r}$ เป็นวิธีเชิงเดียว

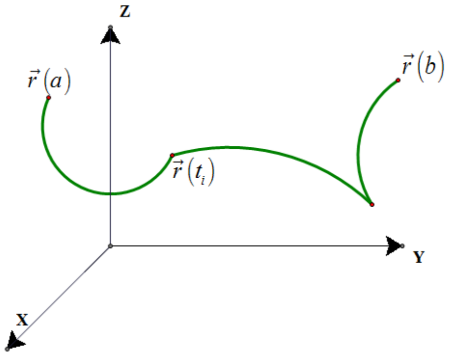
3. ถ้า $\vec{r}$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $\vec{r}'$ ต่อเนื่องบน (a,b) แล้วเรียก $\vec{r}$ ว่าเป็นวิถีเรียบ (smooth curve)
4. ถ้า $\vec{r}$ เป็นวิถีต่อเนื่องและสามารถแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยด้วยจุด $t_0,t_1,\ldots,t_n$ โดยที่ $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ และ $\vec{r}$ เป็นวิถีเรียบบนแต่ละช่วงย่อย $[t_{i-1},t_i]$ เรียก $\vec{r}$ ว่าเป็นวิถีเรียบเป็นช่วง ๆ (piecewise smooth curve)
5. กราฟของวิถีต่อเนื่อง เรียก เส้นโค้งต่อเนื่องและ กราฟของวิถีเรียบ เรียก เส้นโค้งเรียบ ดังภาพที่ 5.1.1



ภาพที่ 5.1.1 เส้นโค้งเรียบมีจุดเริ่มต้นที่ $\vec{r}(a)$ และจุดสิ้นสุดที่ $\vec{r}(b)$

ตัวอย่าง

5. กราฟของวิถีเรียบเป็นช่วง ๆ เรียกว่าเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ ดังภาพที่ 5.1.2

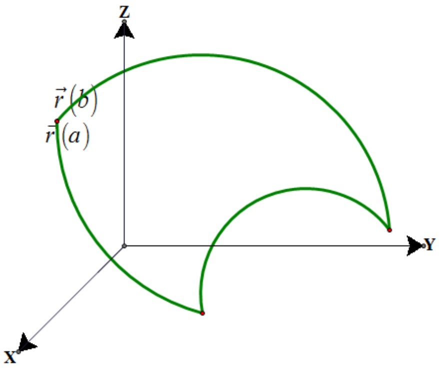


ภาพที่ 5.1.2 เส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ มีจุดเริ่มต้นที่ $\vec{r}(a)$ และจุดสิ้นสุดที่ $\vec{r}(b)$

7. เส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดด้วยวิถีเชิงเดียว $\vec{r}$ เรียกว่า เส้นโค้งเชิงเดียว (simple curve)

8. ถ้า วิถี $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a,b]$ มีสมบัติว่า $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$ แล้ว$\vec{r}$ เป็นวิถีปิด หรือกล่าวว่า วิถีปิด คือ วิถีซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

9. เส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดด้วยวิถีปิด $\vec{r}$ เรียกว่า เส้นโค้งปิด ดังภาพที่ 5.1.3

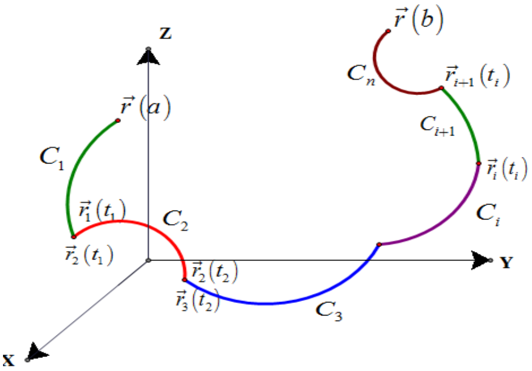


ภาพที่ 5.1.3 เส้นโค้งปิด

10. ถ้า วิถี $\vec{r}$ เป็นวิถีปิด และเป็นวิถีเชิงเดียว แล้ว $\vec{r}$ เป็นวิถีปิดเชิงเดียว หรือกล่าวว่า วิถีปิดเชิงเดียว คือ วิถีซึ่งตัดกันที่จุดเดียวเท่านั้น คือจุดปลายทั้งสอง

11. ถ้า $C_1:\vec{r}_1(t)$ บนช่วง $[t_0,t_1],C_2:\vec{r}_2(t)$ บนช่วง $[t_1,t_2],C_3:\vec{r}_3(t)$ บนช่วง $[t_2,t_3],\dots,C_i:\vec{r}_i(t)$ บนช่วง $[t_{i-1},t_i],\dots,C_n:\vec{r}_n(t)$ บนช่วง $[t_{n-1},t_n]$ โดยที่ $\vec{r}_1(t_1)=\vec{r}_2(t_1)$, $\vec{r}_2(t_2)=\vec{r}_3(t_2),\dots,\vec{r}_i(t_i)=\vec{r}_{i+1}(t_i),\dots,\vec{r}_{n-1}(t_{n-1})=\vec{r}_n(t_n)$ จะได้ $C=C_1+C_2+\dots+C_n$ หรือ $C=C_1\cup C_2\cup\dots\cup C_n$ เป็นเส้นโค้งของวิถี $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[t_0,t_n]$ ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=\vec{r}_i(t)$ เมื่อ $t\in[t_{i-1},t_i]$ ดังภาพที่ 5.1.4

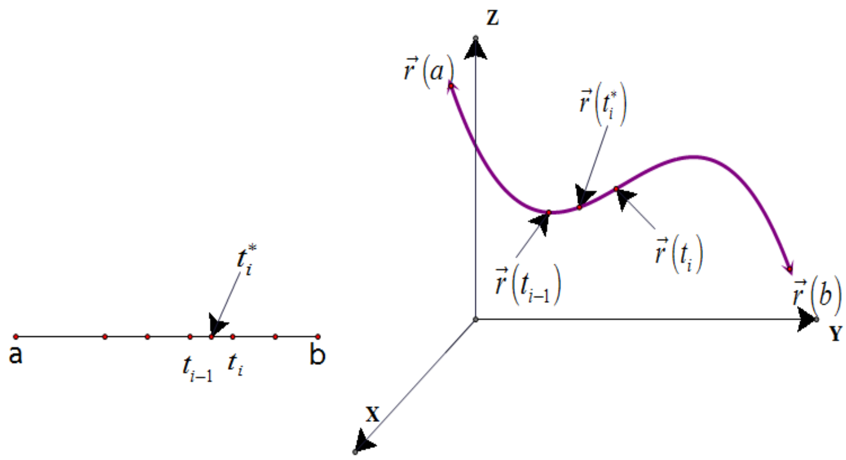
ตัวอย่าง



ภาพที่ 5.1.4 เส้นโค้งของวิถี $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[t_0,t_n]$ โดย $\vec{r}(t)=\vec{r}_i(t)$ เมื่อ $t\in[t_{i-1},t_i]$

5.1 ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง

นิยาม 5.1.1 ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$ สำหรับ $a,b\in R$ ซึ่ง $\vec{r}(t)$เป็นวิถีเรียบหรือ วิถีเรียบเป็นช่วง ๆ s เป็นฟังก์ชันความยาวของส่วนโค้ง กำหนดโดย $s(t)=\int_a^t|\vec{r}'(u)|du$ เมื่อ $t\in[a,b]$ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีโดเมนครอบคลุมทุกจุดบนเส้นโค้ง C ให้ $\{t_i\,|\,i=0,1,2,\ldots,n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ โดยที่ $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ เลือก $t_i^*\in[t_{i-1},t_i]$ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left(s(t_i)-s(t_{i-1})\right)$ มีค่า แล้ว ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง f บน C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\int_C f$ หรือ $\int_C fds$ หรือ $\int_{\vec{r}} f$ หรือ $\int_{\vec{r}} fds$ กำหนดโดย $\int_C fds=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left(s(t_i)-s(t_{i-1})\right)$ เมื่อลิมิตมีค่า



ภาพที่ 5.1.5 เส้นโค้ง C ในช่วง $t\in[a,b]$

ตัวอย่าง

นิยาม 5.1.2 เส้นโค้ง C ซึ่งเชื่อมจุด P และ Q ประกอบด้วยเส้นโค้ง $C_1, C_2, ..., C_n$ ต่อกันโดยที่แต่ละเส้นโค้งย่อยเป็นเส้นโค้งเรียบ แล้วสามารถกำหนดปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C จาก P ถึงจุด Q โดย

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds + ... + \int_{C_n} f(x,y,z)ds$$

ทฤษฎีบท 5.1.1 ให้เส้นโค้ง C มีสมการ $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ หรือเขียนในรูป ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ เมื่อ $a \le t \le b$ ถ้า $x'(t), y'(t)$ และ $z'(t)$ เป็นฟังก์ชันในช่วงดังกล่าว ปริพันธ์ตามเส้นจะหาค่าได้

โดย $\displaystyle\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}'(t)|dt$

พิสูจน์ จากนิยาม 5.1.1

$$\begin{aligned}
\int_C fds &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left(s(t_i) - s(t_{i-1})\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left[\frac{s(t_i) - s(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right](t_i - t_{i-1}) \\
&\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left|\vec{r}'\left(t_1^*\right)\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}'(t)|dt
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}'(t)|dt$

ทฤษฎีบท 5.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนครอบคลุมทุกจุดบนเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $\displaystyle\int_{-C} fds = \int_C fds$

พิสูจน์ ให้ $\vec{r}^*(t) = \vec{r}(b+a-t)$ เมื่อ $a \le t \le b$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_{-C} fds &= \int_{t=a}^{t=b} \left|\vec{r}^*(t)\right|dt = \int_{t=a}^{t=b} \left|\vec{r}'(b+a-t)\right|dt \\
&= \int_{u=b}^{u=a} \left|\vec{r}'(u)\right|d(b+a-u) \qquad \text{เมื่อ } u = b+a-t \\
&= -\int_{u=b}^{u=a} \left|\vec{r}'(u)\right|du = \int_a^b \left|\vec{r}'(u)\right|du = \int_C fds
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_{-C} fds = \int_C fds$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}$ เมื่อ $t\in[0,\pi]$ จงหา $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$

วิธีทำ จาก

$$\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t)=\frac{d}{dt}\left(4\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}\right)$$

$$=-4\sin t\vec{i}+4\cos t\vec{j}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\left|-4\sin t\vec{i}+4\cos t\vec{j}\right|$$

$$=\sqrt{(-4\sin t)^2+(4\cos t)^2}$$

$$=\sqrt{16\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}=\sqrt{16}=4$$

จาก $$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

พิจารณา $$f\left(x(t),y(t)\right)=\sqrt{(4\cos t)^2+(4\sin t)^2}=\sqrt{16}=4$$

จากสูตร

$$\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f\left(x(t),y(t)\right)\left|\vec{r}'(t)\right|dt$$

$$=\int_0^{\pi}(4)(4)dt=\int_0^{\pi}16dt$$

$$=16t\Big|_0^{\pi}=16\pi$$

ดังนั้น $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$ คือ 16π

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}$ เมื่อ $t\in[0,2\pi]$ จงหาค่าของ $\int_C x^2+y^2+z^2\,ds$

วิธีทำ จาก

$$\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t)=\frac{d}{dt}\left(3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+4t\vec{k}\right)$$

$$=-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right|=\left|-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}+4\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+(4)^2}$$

$$=\sqrt{9\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+16}$$

$$=\sqrt{9+16}=5$$

จาก $$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

ตัวอย่าง

$$f\left(x(t),y(t),z(t)\right)=\left(3\cos t\right)^2+\left(3\sin t\right)^2+\left(4t\right)^2$$
$$=9\cos^2 t+9\sin^2 t+16t^2$$
$$=9\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)+16t^2$$
$$=9+16t^2$$

พิจารณา $\quad f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\left|\vec{v}(t)\right|=\left(9+16t^2\right)(5)=45+80t^2$

จาก
$$\int_C f\left(x,y,z\right)ds=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\left|\vec{r}'(t)\right|dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(45+80t^2\right)dt$$
$$=45t+\frac{80t^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$=45(2\pi)+\frac{80(2\pi)^3}{3}$$
$$=\frac{270\pi+640\pi^3}{3}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int_C x^2+y^2+z^2ds=90\pi+\frac{640\pi^3}{3}$

นิยาม 5.3 ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีความโค้งบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $u:[c,d]\to[a,b]$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงซึ่งมีอนุพันธ์และ $u'\neq 0$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่กำหนด โดย

$\vec{r}_2(t)=\vec{r}_1\left(u(t)\right)$ บนช่วง $[c,d]$ จะได้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกัน

ให้ C_1 เป็นเส้นโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_1$ และ C_2 เป็นเส้นโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_2$

ถ้า $u'(t)>0$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว กราฟของ C_1 และ C_2 มีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $u'(t)<0$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว กราฟของ C_1 และ C_2 มีทิศทางตรงข้ามกัน

ตัวอย่าง 5.1.3 ให้ C_1 เป็นส่วนโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_1(t)=t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k}$ เมื่อ $t\in[-1,1]$ และ C_2 เป็นส่วนโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_2(t)=(t+1)\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}$ เมื่อ $t\in[1,3]$ พิจารณาว่า C_1 และ C_2 เป็นวิถีที่สมมูลกันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจากมี $u(t)=t+1$

ซึ่งทำให้
$$\vec{r}_1\left(u(t)\right)=(t+1)\vec{i}+(t+1)\vec{j}+(t+1)\vec{k}$$
$$=\vec{r}_2(t)$$

จากนิยาม 5.1.3 C_1 และ C_2 เป็นวิถีที่สมมูลกัน

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.1.3 ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีเชิงเดียวและเป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีเชิงเดียวและเป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ และ $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกันแล้ว

$$\int_{\vec{r}_1} fds = \int_{\vec{r}_2} fds$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ ที่สมมูลกัน

จากนิยาม 5.1.3 จะมี $u:[c,d]\to[a,b]$ ซึ่งมีอนุพันธ์ และ $u'\neq 0$ บนช่วง $[c,d]$

ซึ่งทำให้ $\vec{r}_2(t)=\vec{r}_1(u(t))$ บนช่วง $[c,d]$

แบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกันและมีทิศทางเดียวกัน

จึงได้ว่า $u'(t)>0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $u(c)=a,u(d)=b$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} fds &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_2(t)\right)\left|\vec{r}'(t)\right|dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1(u(t))\right)\left|\vec{r}_1'(u(t))u'(t)\right|dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1(u(t))\right)\left|\vec{r}_1'(u(t))\right|\left|u'(t)\right|dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1(u(t))\right)\left|\vec{r}_1'(u(t))\right|u'(t)dt \quad \text{เพราะว่า } u'(t)>0\end{aligned}$$

แทนค่า $w=u(t)$ บนช่วง $[c,d]$ จึงได้ $dw=u'(t)$

จึงได้
$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} fds &= \int_{w=u(c)}^{w=u(d)} f\left(\vec{r}_1(w)\right)\left|\vec{r}_1'(w)\right|dw\\ &= \int_{w=a}^{w=b} f\left(\vec{r}_1(w)\right)\left|\vec{r}_1'(w)\right|dw = \int_{\vec{r}_1} fds\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{\vec{r}_1} fds = \int_{\vec{r}_2} fds$

กรณีที่ 2 $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกันและมีทิศทางตรงข้ามกัน

จึงได้ว่า $u'(t)<0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $u(c)=b,u(d)=a$

$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} fds &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_2(t)\right)\left|\vec{r}_2'(t)\right|dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1(u(t))\right)\left|\vec{r}'(u(t))u'(t)\right|dt\end{aligned}$$

$$= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1\left(u(t)\right)\right)\left|\vec{r}'\left(u(t)\right)\right|\left|u'(t)\right|dt$$

$$= \int_{t=c}^{t=d} f\left(\vec{r}_1\left(u(t)\right)\right)\left|\vec{r}'\left(u(t)\right)\right|\left(-u'(t)\right)dt \text{ เพราะว่า } u'(t) < 0$$

แทนค่า $w = u(t)$ บนช่วง $[c,d]$ จึงได้ $dw = u'(t)$

จึงได้ $$\int_{\vec{r}_2} fds = -\int_{w=u(c)}^{w=u(d)} f\left(\vec{r}_1(w)\right)\left|\vec{r}_1'(w)\right|dw$$

$$= -\int_{w=b}^{w=a} f\left(\vec{r}_1(w)\right)\left|\vec{r}_1'(w)\right|dw$$

$$= \int_{w=a}^{w=b} f\left(\vec{r}_1(w)\right)\left|\vec{r}_1'(w)\right|dw = \int_{\vec{r}_1} fds$$

ดังนั้น $\int_{\vec{r}_1} fds = \int_{\vec{r}_2} fds$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 จึงได้ว่า $\int_{\vec{r}_1} fds = \int_{\vec{r}_2} fds$

ตัวอย่าง 5.1.4 จงหาปริพันธ์ตามเส้น $f(x,y) = x + 2y$ เมื่อ C เป็นเส้นตรงรอบรูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากระนาบ $x + 2y + 3z - 6 = 0$ ตัดกับแกนพิกัด โดยเริ่มจากจุดบนแกน X ไปตามระนาบ XY

วิธีทำ หาจุดตัดของระนาบบนแกน X โดยให้ $z = 0$ และ $y = 0$

จากระนาบ $$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

แทนค่า $z = 0$ และ $y = 0$ จึงได้ $$x + 2(0) + 3(0) - 6 = 0$$

$$x = 6$$

จึงได้ว่าระนาบตัดแกน X ที่จุด $(6,0,0)$

หาจุดตัดแกน Y โดยให้ $x = 0$ และ $z = 0$

จากระนาบ $$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$(0) + 2y + 3(0) - 6 = 0$$

$$y = 3$$

จึงได้ว่าระนาบตัดแกน Y ที่จุด $(0,3,0)$

หาจุดตัดแกน Z โดยให้ $x = 0$ และ $y = 0$

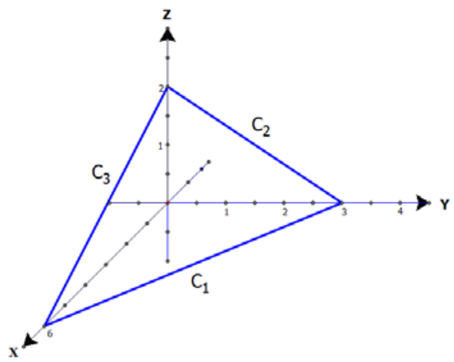
จากระนาบ $$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

$$(0) + 2(0) + 3z - 6 = 0$$

$$z = 2$$

ตัวอย่าง

จึงได้ว่าระนาบตัดแกน Z ที่จุด $(0,0,2)$



ภาพที่ 5.1.6 ระนาบตัดแกน X,Y และ Z

เส้นตรง C_1 ผ่านจุด $(6,0,0)$ และ $(0,3,0)$ คือ $x=6+6t, y=3t, z=0$ เมื่อ $0\le t\le 1$
เส้นตรง C_2 ผ่านจุด $(0,3,0)$ และ $(0,0,2)$ คือ $x=0, y=3-3t, z=2t$ เมื่อ $0\le t\le 1$
เส้นตรง C_3 ผ่านจุด $(0,0,2)$ และ $(6,0,0)$ คือ $x=6t, y=0, z=2-2t$ เมื่อ $0\le t\le 1$

พิจารณา $\int_C (x+2y)ds=\int_{C_1}(x+2y)ds+\int_{C_2}(x+2y)ds+\int_{C_3}(x+2y)ds$

จาก $$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

ตามเส้น C_1 $$ds=\sqrt{(-6)^2+(3)^2+(0)^2}\,dt=3\sqrt{5}dt$$

ตามเส้น C_2 $$ds=\sqrt{(0)^2+(-3)^2+(2)^2}\,dt=\sqrt{13}dt$$

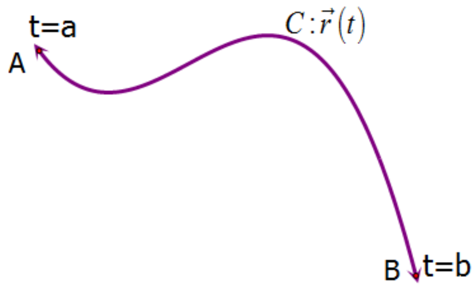
ตามเส้น C_3 $$ds=\sqrt{(6)^2+(-2)^2+(0)^2}\,dt=2\sqrt{10}dt$$

จึงได้
$$\begin{aligned}\int_C (x+2y)ds &= \int_0^1[(6-6t)+2(3t)]\left(3\sqrt{5}\right)dt+\int_0^1[(0)+2(3-3t)]\sqrt{13}dt+\\ &\quad \int_0^1[(6t)+2(0)]2\sqrt{10}dt\\ &= \int_0^1 18\sqrt{5}dt+\int_0^1\left(6\sqrt{13}-6\sqrt{13}t\right)dt+\int_0^1 12\sqrt{10}tdt\\ &= 18\sqrt{5}t\Big|_0^1+\left[6\sqrt{13}t-\frac{6\sqrt{13}t^2}{2}\right]_0^1+\frac{12\sqrt{10}t^2}{2}\Big|_0^1\\ &= 18\sqrt{5}t\Big|_0^1+\left(6\sqrt{13}t-3\sqrt{13}t^2\right)\Big|_0^1+6\sqrt{10}t^2\Big|_0^1\\ &= 18\sqrt{5}+6\sqrt{13}-3\sqrt{13}+6\sqrt{10}\\ &= 18\sqrt{5}+3\sqrt{13}+6\sqrt{10}\end{aligned}$$

ดังนั้น ปริพันธ์ตามเส้น คือ $18\sqrt{5}+3\sqrt{13}+6\sqrt{10}$

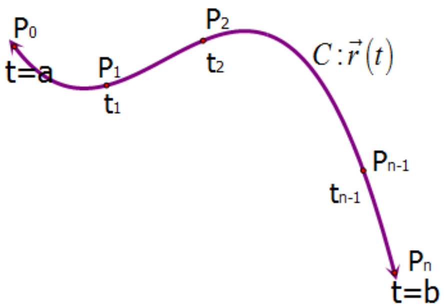
5.2 ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ให้ $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a \le t \le b$ เป็นวิถีเรียบ หรือ วิถีเรียบเป็นช่วง ๆ และ $\vec{r}$ เป็นวิถีเชิงเดียว C เป็นกราฟของ $\vec{r}$ ดังภาพที่ 5.2.1 $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C และมีพิสัยเป็นเซตย่อยของ R^n



ภาพที่ 5.2.1 เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$

ให้ $P=\{t_0,t_1,t_2,...,t_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง $[a,b]$ จึงได้ P แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อย ด้วยจุด $t_0,t_1,t_2,...,t_n$ โดยที่ $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ และ $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ ทุกค่า $k=1,2,3,...,n$ ให้ P_k มีพิกัดเป็น $\vec{r}(t_k)$ เมื่อ $k=0,1,2,3,...,n$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ดังนั้น $P_k=\vec{r}(t_k)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ทุกค่า $k=0,1,2,3,...,n$ ดังภาพที่ 5.2.2



ภาพที่ 5.2.2 จุดบนเส้นโค้ง C

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\cdot\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right)\left(t_k-t_{k-1}\right)$ มีค่า จากการแสดงข้างต้นสามารถสรุปการปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บนเส้นโค้ง C ดังนิยาม 5.2.1 ต่อไปนี้

นิยาม 5.2.1 ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บนเส้นโค้ง C หรือปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถี $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $t\in[a,b]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ หรือ $\int\limits_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ หรือ $\int\limits_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เมื่อ $A=\vec{r}(a)$ และ $B=\vec{r}(b)$

โดย $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}'(t)dt$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.2.1 ให้ $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}$ และเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)=(t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}$ เมื่อ $0\le t\le 1$ จงหา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จาก $$\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}+xy\vec{j}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\vec{F}\left(x(t),y(t)\right)&=(t+1)^2\,\vec{i}+(t+1)\left(t^2\right)\vec{j}\\&=\left(t^2+2t+1\right)\vec{i}+\left(t^3+t^2\right)\vec{j}\end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned}\vec{r}(t)&=(t+1)\vec{i}+t^2\vec{j}\\\vec{r}\,'(t)&=\frac{d}{dt}(t+1)\vec{i}+\frac{d}{dt}\left(t^2\right)\vec{j}=\vec{i}+2t\vec{j}\end{aligned}$$

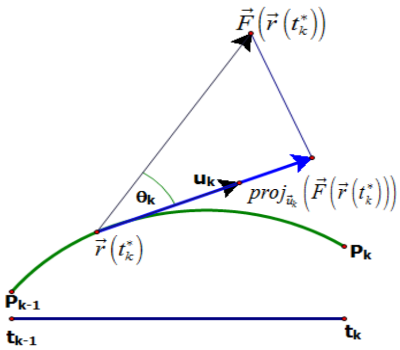
$$\begin{aligned}\vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}\,'(t)&=\left[\left(t^2+2t+1\right)\vec{i}+\left(t^3+t^2\right)\vec{j}\right]\cdot\left[\vec{i}+2t\vec{j}\right]\\&=\left(t^2+2t+1\right)\cdot(1)+\left(t^3+t^2\right)\cdot(2t)\\&=\left(t^2+2t+1\right)+\left(2t^4+2t^3\right)\\&=2t^4+2t^3+t^2+2t+1\end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}&=\int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}\,'(t)dt\\&=\int_0^1\left(2t^4+2t^3+t^2+2t+1\right)dt\\&=\left.\frac{2t^5}{5}+\frac{2t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right|_0^1\\&=\left.\frac{2t^5}{5}+\frac{t^4}{2}+\frac{t^3}{3}+t^2+t\right|_0^1\\&=\frac{2(1-0)^5}{5}+\frac{(1-0)^4}{2}+\frac{(1-0)^3}{3}+(1-0)^2+(1-0)\\&=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+1=3.23\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=3.23$

5.3 งาน

การหางานที่ได้จากแรง $\vec{F}$ ในการเคลื่อนวัตถุจากจุด $\vec{r}(a)$ ไปยังจุด $\vec{r}(b)$ ตามเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$ และ C เป็นวิถีเรียบหรือวิถีเรียบเป็นช่วง ๆ และ $\vec{r}$ เป็นวิถีเชิงเดียว ในทำนองเดียวกับการหาค่าปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันเวกเตอร์ข้างต้น



ภาพที่ 5.3.1 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ บน $\vec{u}_k$

ในช่วงเวลา $\left[t_{k-1},t_k\right]$ ให้ s แทนระยะทางการเคลื่อนที่จาก P_{k-1} ไปยัง P_k ตามเส้นโค้ง C ดังนั้น

$$\begin{aligned} s &= \left|\vec{r}\left(t_k\right)-\vec{r}\left(t_{k-1}\right)\right| \\ &= \left|\frac{\vec{r}\left(t_k\right)-\vec{r}\left(t_{k-1}\right)}{t_k-t_{k-1}}\right|\left(t_k-t_{k-1}\right) \\ &\approx \left|\vec{r}\left(t_k^*\right)\right|\left(t_k-t_{k-1}\right) \text{ เมื่อ } t_k^* \in \left[t_{k-1},t_k\right] \end{aligned}$$

สำหรับ $\vec{r}\left(t_k^*\right)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งในช่วงเวลา $\left[t_{k-1},t_k\right]$

$\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ เป็นค่าของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่จุด $\vec{r}\left(t_k^*\right)$

$\vec{u}_k$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $\vec{r}\left(t_k^*\right)$

θ_k เป็นมุมที่ $\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ ทำกับเวกเตอร์ $\vec{u}_k$

$proj_{\vec{u}_k}\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)$ เป็นภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ บน $\vec{u}_k$

จึงได้ว่า $\left|proj_{\vec{u}_k}\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\right|$ = ภายฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ บน $\vec{u}_k$

$$\begin{aligned} &= \left|\frac{\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\cdot\vec{u}_k}{\left|\vec{u}_k\right|}\right| \\ &= \left|\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\right|\left|\vec{u}_k\right|\cos\left(\theta_k\right) \\ &= \left|\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\right|(1)\cos\left(\theta_k\right) \\ &= \left|\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\right|\cos\left(\theta_k\right) \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

งานช่วง $[t_{k-1},t_k]=$ ขนาดของแรง$\times$ระยะทาง

$\approx$ ขนานของแรงในทิศทางของการเคลื่อนที่$\times$ระยะทางจาก $\vec{r}(t_{k-1})$ ไปยัง $\vec{r}(t_k)$

$=$ ขนาดของแรงในทิศทางของการเคลื่อนที่ $\times\left|\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})\right|$

$=$ ขนาดของแรงในทิศทางของการเคลื่อนที่ $\times\left|\dfrac{\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right|(t_k-t_{k-1})$

$\approx$ ขนาดของแรงในทิศทางของการเคลื่อนที่ $\times\left|\vec{r}'(t)\right|(t_k-t_{k-1})$

เมื่อ $t_k^*\in[t_{k-1},t_k]$

$=$ ภาพฉายเชิงสเกลาร์ของ $\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)$ บน $\vec{u}_k\times\left|\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right|(t_k-t_{k-1})$

$$=\left|proj_{\vec{u}_k}\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\right|\times\left|\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right|(t_k-t_{k-1})$$

$$=\left|\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right|\cos(\theta_k)\times\left|\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right|(t_k-t_{k-1})$$

$$=\left[\left(\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\right)\cdot\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right](t_k-t_{k-1})$$

งานทั้งหมด $\approx\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\cdot\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right](t_k-t_{k-1})$

เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด $(n\to\infty)$ และ Δt_k มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ทุกค่า $k=1,2,3,\ldots,n$ จะได้

งานทั้งหมด $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{F}\left(\vec{r}\left(t_k^*\right)\right)\cdot\vec{r}'\left(t_k^*\right)\right](t_k-t_{k-1})$ ในกรณีที่ลิมิตลู่เข้า

จากงานทั้งหมดที่ได้จึงพอสรุปการหาค่างานที่ได้จากแรง $\vec{F}$ ตามเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$ ดังนิยาม 5.3.1

นิยาม 5.3.1 งาน (work) ที่ได้จากแรง $\vec{F}$ ในการเคลื่อนวัตถุจากจุด $\vec{r}(a)$ ไปยังจุด $\vec{r}(b)$ ตามเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$ และ C เป็นวิถีเรียบหรือวิถีเรียบเป็นช่วง ๆ และ $\vec{r}$ เป็นวิถีเชิงเดียวกำหนดโดย งาน $=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$

จากนิยาม 5.2.1 $\quad\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b\vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}'(t)dt$ และนิยาม 5.3.1 จึงได้ว่า

$$\text{งาน}=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_a^b\vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\vec{r}'(t)dt$$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหางานที่เกิดจากการเคลื่อนวัตถุด้วยแรง $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ ไปตามเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดด้วยวิถี $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+2t\vec{k}$ โดยมีช่วงการเคลื่อนที่ คือ $t\in[0,2\pi]$

วิธีทำ จาก $\vec{r}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+2t\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
\vec{r}'(t)&=\frac{d}{dt}\cos t\vec{i}+\frac{d}{dt}\sin t\vec{j}+\frac{d}{dt}2t\vec{k}\\
&=-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+2\vec{k}\\
\vec{F}(x,y,z)&=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}\\
\vec{F}(x(t),y(t),z(t))&=(\cos t)^2\,\vec{i}+(\sin t)^2\,\vec{j}+(2t)^2\,\vec{k}\\
&=\cos^2 t\vec{i}+\sin^2 t\vec{j}+4t^2\vec{k}\\
\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)&=\left(\cos^2 t\vec{i}+\sin^2 t\vec{j}+4t^2\vec{k}\right)\cdot\left(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+2\vec{k}\right)\\
&=\left(\cos^2 t\right)(-\sin t)+\left(\sin^2 t\right)(\cos t)+\left(4t^2\right)(2)\\
&=-\cos^2 t\sin t+\sin^2 t\cos t+8t^2
\end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned}
\text{งาน}&=\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}\\
&=\int_0^{2\pi}\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot\vec{r}'(t)dt\\
&=\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2 t\sin t+\sin^2 t\cos t+8t^2\right)dt\\
&=\int_0^{2\pi}-\cos^2 t\sin t dt+\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t dt+\int_0^{2\pi}8t^2dt\\
&=\int_0^{2\pi}\cos^2 t d(\cos t)+\int_0^{2\pi}\sin^2 t d\sin t+8\int_0^{2\pi}t^2dt\\
&=\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}+\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}+8\left.\left(\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^{2\pi}\\
&=\frac{1}{3}\cos^3(2\pi)+\frac{1}{3}\sin^3(2\pi)+\left(\frac{8}{3}\right)(2\pi)^3\\
&=\frac{1}{3}(1)+\frac{1}{3}(0)+\frac{64}{3}\pi^3\\
&=\frac{1}{3}+\frac{64}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

ดังนั้น งานที่เกิดจากการเคลื่อนวัตถุด้วย คือ $\frac{1}{3}+\frac{64}{3}\pi^3$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.3.1 ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกัน ถ้า $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศทางเดียวกันแล้ว

$$\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ สำหรับ $u:[c,d]\to[a,b]$ ซึ่งมีอนุพันธ์ และ $u'\neq 0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $\vec{r}_2(t)=\vec{r}_1(u(t))$ บนช่วง $[c,d]$

ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศทางเดียวกัน จึงได้ว่า $u'>0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $u(c)=a, u(d)=b$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2'(t)\,dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_1(u(t)))\cdot(\vec{r}_1(u(t))u'(t))\,dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_1(u(t)))\cdot\vec{r}_1(u(t))u'(t)\,dt\end{aligned}$$

ให้ $w=u(t)$ บนช่วง $[c,d]$ จึงได้ $dw=u'(t)dt$ แทนค่า

จึงได้
$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 &= \int_{w=u(c)}^{w=u(d)} \vec{F}(\vec{r}_1(w))\cdot\vec{r}_1'(w)\,dw\\ &= \int_{w=a}^{w=b} \vec{F}(\vec{r}_1(w))\cdot\vec{r}_1'(w)\,dw = \int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

ทฤษฎีบท 5.3.2 ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกัน ถ้า $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศตรงข้ามกันแล้ว

$$\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = -\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ สำหรับ $u:[c,d]\to[a,b]$ ซึ่งมีอนุพันธ์ และ $u'\neq 0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $\vec{r}_2(t)=\vec{r}_1(u(t))$ บนช่วง $[c,d]$

ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

จึงได้ว่า $u'<0$ บนช่วง $[c,d]$ และ $u(c)=b, u(d)=a$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2'(t)\,dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_1(u(t)))\cdot(\vec{r}_1(u(t))u'(t))\,dt\\ &= \int_{t=c}^{t=d} \vec{F}(\vec{r}_1(u(t)))\cdot\vec{r}_1(u(t))u'(t)\,dt\end{aligned}$$

ให้ $w=u(t)$ บนช่วง $[c,d]$ จึงได้ $dw=u'(t)dt$ แทนค่า

จึงได้
$$\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = \int_{w=u(c)}^{w=u(d)} \vec{F}\left(\vec{r}_1(w)\right)\cdot \vec{r}_1'(w)\,dw$$
$$= \int_{w=a}^{w=b} \vec{F}\left(\vec{r}_1(w)\right)\cdot \vec{r}_1'(w)\,dw = \int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1$$

ดังนั้น $\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

ทฤษฎีบท 5.3.3 ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสองมิติ โดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ เมื่อ $x(t)$, $y(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $[a,b]$ และ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{i}$ เมื่อ $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C Pdx+Qdy$$

เมื่อ $\int_C Pdx = \int_a^b P\left(x(t),y(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt$ และ $\int_C Qdy = \int_a^b Q\left(x(t),y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}dt$

พิสูจน์ จาก
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot \vec{r}'(t)\,dt = \int_a^b \left(\vec{F}\left(x(t),y(t)\right)\right)\cdot\left(x'(t),y'(t)\right)dt$$
$$= \int_a^b \left(P\left(x(t),y(t)\right)\left(x'(t)\right)+Q\left(x(t),y(t)\right)\left(y'(t)\right)\right)dt$$
$$= \int_a^b P\left(x(t),y(t)\right)\left(x'(t)\right)dt+\int_a^b Q\left(x(t),y(t)\right)\left(y'(t)\right)dt$$
$$= \int_a^b P\left(x(t),y(t)\right)dx(t)+\int_a^b Q\left(x(t),y(t)\right)dy(t)$$
$$= \int_C P\left(x(t),y(t)\right)dx(t)+\int_C Q\left(x(t),y(t)\right)dy(t)$$
$$= \int_C P\left(x(t),y(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_C Q\left(x(t),y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

ให้ $\int_C Pdx = \int_C P\left(x(t),y(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt$ และ $\int_C Qdy = \int_C Q\left(x(t),y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}dt$

แทนค่า
$$\int_C \vec{F}\cdot ds = \int_C P\left(x(t),y(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_C Q\left(x(t),y(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}dt$$
$$= \int_C Pdx+\int_C Qdy = \int_C Pdx+Qdy$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C Pdx+Qdy$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.3.2 ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสองมิติ ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=t\vec{i}+4t\vec{j}$ เมื่อ $0\le t\le 1$ และ $\vec{F}(x,y)=\left(x^2y^2\right)\vec{i}+2xy\vec{j}$ จงหา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จาก $P(x,y)=x^2y^2$ จึงได้ $P(x(t),y(t))=(t)^2(4t)^2=16t^4$

และ $Q(x,y)=2xy$ จึงได้ $Q(x(t),y(t))=2(t)(4t)=8t^2$

จาก $\vec{r}(t)=t\vec{i}+4t\vec{j}$

จึงได้ $x(t)=t, y(t)=4t$ แล้ว $\dfrac{dx}{dt}=1$ และ $\dfrac{dy}{dt}=4$

จาก
$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_C Pdx+Qdy \\
&= \int_C P(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_C Q(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}dt \\
&= \int_0^1 \left(16t^4\right)(1)\,dt+\int_0^1 \left(8t^2\right)(4)\,dt \\
&= \int_0^1 16t^4dt+\int_0^1 32t^2dt \\
&= \left.\frac{16t^5}{5}\right|_0^1+\left.\frac{32t^3}{3}\right|_0^1 \\
&= \frac{16}{5}+\frac{32}{3}=\frac{48+160}{15}=\frac{208}{15}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\dfrac{208}{15}$

ทฤษฎีบท 5.3.4 ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสามมิติ กำหนดโดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $x(t),y(t)$ และ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $[a,b]$ และ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ เมื่อ $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ และ $R(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$

เมื่อ $\int_C Pdx=\int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dx(t)}{dt}dt, \int_C Qdy=\int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dy(t)}{dt}dt$

และ $\int_C Rdz=\int_a^b R(x(t),y(t),z(t))\dfrac{dz(t)}{dt}dt$

ตัวอย่าง

พิสูจน์ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}'(t)\,dt$

$$= \int_a^b \left(\vec{F}(x(t),y(t),z(t))\right)\cdot\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))(x'(t)) + Q(x(t),y(t),z(t))(y'(t)) + R(x(t),y(t),z(t))(z'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))(x'(t))\,dt + \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))(x'(t))(y'(t))\,dt + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))(x'(t))(z'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\,dx(t) + \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))\,dy(t) + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))\,dz(t)$$

$$= \int_C P(x(t),y(t),z(t))\,dx(t) + \int_C Q(x(t),y(t),z(t))\,dy(t) + \int_C R(x(t),y(t),z(t))\,dz(t)$$

$$= \int_C P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + \int_C Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy(t)}{dt}dt + \int_C R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$$

ให้ $\int_C Pdx = \int_C P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt, \int_C Qdy = \int_C Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy(t)}{dt}dt$ และ

$\int_C Rdz = \int_C R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$

แทนค่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + \int_C Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy(t)}{dt}dt + \int_C R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz(t)}{dt}dt$

$$= \int_C Pdx + \int_C Qdy + \int_C Rdz$$

$$= \int_C Pdx + Qdy + Rdz$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.3.3 ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสามมิติ ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^4\vec{k}$ เมื่อ $0\le t\le 1$ และ $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2z\vec{j}+\vec{k}$ จงหา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จาก $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+2z\vec{j}+\vec{k}$

จึงได้ $P(x,y,z)=x^2, Q(x,y,z)=2z$ และ $R(x,y,z)=1$

พิจารณา $P\big(x(t),y(t),z(t)\big)=(t)^2=t^2$

$Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)=2(t^2)=2t^2$ และ $R\big(x(t),y(t),z(t)\big)=1$

พิจารณา $\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{dt}{dt}=1, \dfrac{dy(t)}{dt}=\dfrac{dt^2}{dt}=2t, \dfrac{dz(t)}{dt}=\dfrac{dt^4}{dt}=4t^3$

$$\int_C Pdx=\int_C P\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dx(t)}{dt}dt$$

$$=\int_0^1 t^2(1)dt=\int_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\int_C Qdy=\int_C Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

$$=\int_0^1 (2t^2)(2t)dt=\int_0^1 4t^3dt=\frac{4t^4}{4}\bigg|_0^1=t^4\Big|_0^1$$

$$=1$$

$$\int_C Rdz=\int_C R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dz(t)}{dt}dt$$

$$=\int_0^1 (1)(4t^3)dt=\int_0^1 4t^3dt=\frac{4t^4}{4}\bigg|_0^1=t^4\Big|_0^1$$

$$=1$$

จาก
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\frac{1}{3}+1+1=\frac{7}{3}$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\dfrac{7}{3}$

นิยาม 5.3.2 ให้ $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ เมื่อ x_i เป็นฟังก์ชันค่าจริง บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $\vec{i}=1,2,3,\ldots,n$ และ $\vec{F}=(f_1, f_2, f_3,\ldots, f_n)$ เมื่อ f_i เป็นฟังก์ชันค่าจริงนิยามบนเส้นโค้ง C โดยที่ $\vec{i}=1,2,3,\ldots,n$ จะได้

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C f_1dx_1+\int_C f_2dx_2+\int_C f_3dx_3+\ldots+\int_C f_ndx_n$$

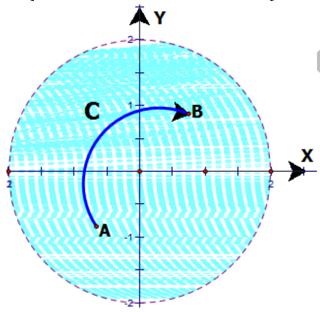
5.4 ปริพันธ์ตามเส้นเป็นอิสระจากวิถี

นิยาม 5.4.1 ให้ S เป็นเซตเปิดใน R^n เรากล่าวว่า S เป็น เซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจุดสองจุด A, B ใน S จะมีวิถีใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B

จากนิยาม 5.4.1 พบว่า S จะเป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ ถ้า S เป็นเซตเปิด และทุกคู่ของจุด A, B ใน S มีเส้นโค้งเรียบ C จากจุด A ไปยังจุด B โดยที่เส้นโค้ง C อยู่ภายใน S ทั้งสิ้น

ตัวอย่าง 5.4.1 พิจารณา $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$ เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงหรือไม่

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$ ดังภาพที่ 5.4.1

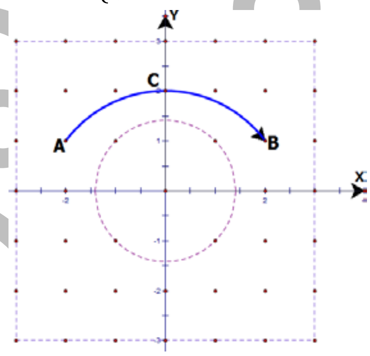


ภาพที่ 5.4.1 เส้นโค้ง C ใน $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\}$

จากภาพที่ 5.4.1 กราฟของเซต S พบว่าทุกจุด A, B ใน S จะมีวิถี C ใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และ จุดสิ้นสุดที่จุด B จึงได้ว่า S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้

ตัวอย่าง 5.4.2 พิจารณา $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, -3<x<3$ และ $-3<y<3\}$ เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงหรือไม่

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, -3<x<3$ และ $-3<y<3\}$ ดังภาพที่ 5.4.2



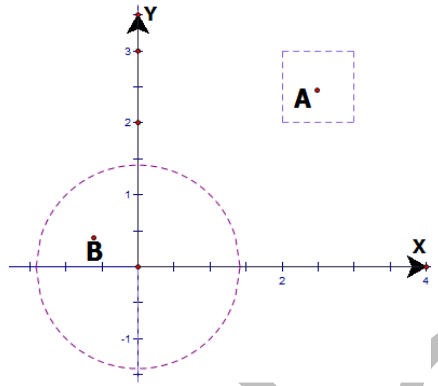
ภาพที่ 5.4.2 เส้นโค้ง C ใน $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, -3<x<3$และ $-3<y<3\}$

จากภาพที่ 5.4.2 กราฟของเซต S พบว่าทุกจุด A, B ใน S จะมีวิถี C ใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และ จุดสิ้นสุดที่จุด B จึงได้ว่า S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.4.3 พิจารณา $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, 2<x<3$ และ $2<y<3\}$ เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงหรือไม่

วิธีทำ พิจารณากราฟของ $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, 2<x<3$ และ $2<y<3\}$ ดังภาพที่ 5.43



ภาพที่ 5.4.3 เส้นโค้ง C ใน $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<2, 2<x<3$ และ $2<y<3\}$

จากภาพที่ 5.4.3 กราฟของเซต S เนื่องจากมีบางจุด A,B ใน S ที่ไม่มีวิถี C ใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และ จุดสิ้นสุดที่จุด B จึงได้ว่า S เป็นไม่เซตเปิดที่เชื่อมโยงได้

นิยาม 5.4.2 ให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n ซึ่ง $\vec{F}:S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน S และ A และ B เป็นจุดอยู่ใน S ถ้า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีใดก็ตามที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B มีค่าคงตัวแล้วเรียกว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีจากจุด A ถึงจุด B ถ้าทุกคู่ของจุด A,B ใน S ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีจากจุด A ถึงจุด B แล้ว เรียกว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S

นิยาม 5.4.3 ให้ S เป็นเซตเปิดใน R^n และ $\vec{F}:S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องบน S ฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ คือ ฟังก์ชันค่าจริง $\phi:S\to R$ ซึ่งมีสมบัติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi=\vec{F}$ เรียกฟังก์ชัน $\vec{F}$ ที่มีฟังก์ชันศักดิ์ว่า ฟังก์ชันเกรเดียนต์

หมายเหตุ ถ้า ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ แล้วจะได้ว่า $\nabla\phi_1=\vec{F}=\nabla\phi_2$ จึงได้ว่า ϕ_1 และ ϕ_2 จะต่างกันด้วยค่าคงตัว กล่าวคือ $\phi_1=\phi_2+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ดังนั้น ถ้า ϕ เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ แล้ว $\phi+c$ เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ ด้วย

ตัวอย่าง 5.4.4 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z)=2xyz^2\vec{i}+x^2z^2\vec{j}+2x^2yz\vec{k}$ บนโดเมนใน R^3 มีฟังก์ชัน $\phi(x,y,z)=x^2yz^2$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน R^3 จงพิจารณาว่า ϕ เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ หรือไม่

วิธีทำ พิจารณา
$$\begin{aligned}\nabla\phi(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}x^2yz^2\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}x^2yz^2\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}x^2yz^2\vec{k}\\&=2xyz^2\vec{i}+x^2z^2\vec{j}+2x^2yz\vec{k}\\&=\vec{F}(x,y,z)\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\nabla\phi(x,y,z)=\vec{F}(x,y,z)$

ดังนั้น $\phi(x,y,z)=x^2yz^2$ เป็นศักดิ์ของ $\vec{F}(x,y,z)$

ทฤษฎีบท 5.4.1 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งสำหรับการปริพันธ์ตามเส้น

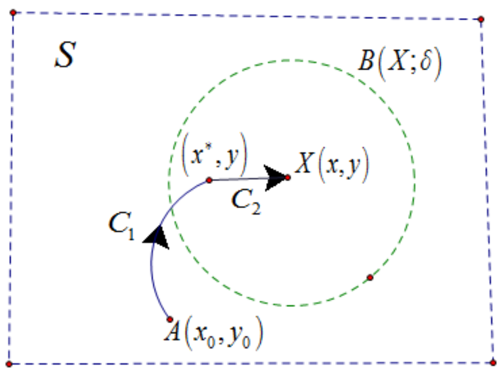
กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n และ $\vec{F}:S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ถ้าปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S โดยที่ A เป็นจุดใด ๆ ใน S และ เป็นฟังก์ชันค่าจริง นิยามโดย $\phi(X)=\int_A^X \vec{F}\cdot d\vec{r}$ จะได้ ϕ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi(X)=\vec{F}(X)$ ทุก $X\in S$

ดังนั้น $$\nabla\int_A^X \vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}(X) \qquad \text{ทุก } X\in S$$

พิสูจน์ ในปริภูมิสองมิติ กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ และ $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ เมื่อ P,Q เป็นฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร และปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S และจุด $A(x_0,y_0)$ เป็นจุดใน S ให้ $X(x,y)$ เป็นจุดใน S

จาก S เป็นเซตเปิดจึงมี $\delta>0$ ที่ทำให้ $B(X;\delta)=\left\{(u,v)\,|\,\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2}<\delta\right\}\subseteq S$

จะแสดงว่า $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=P(x,y)$ เลือก $(x^*,y)\in B(X;\delta)$ โดยที่ $x^*<x$



ภาพที่ 5.4.4 เส้นโค้ง C_1 และ C_2

ตัวอย่าง

จากภาพที่ 5.4.4 เส้นโค้ง C_1 กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งจากจุด A ไปยังจุด (x^*, y) และเส้นโค้ง C_2 กำหนดโดย $\vec{r}_2 = (t, y)$ เมื่อ $x^* \le t \le x$ เป็นส่วนของเส้นตรงจาก (x^*, y) ไปยังจุด $X(x, y)$ ให้ $C = C_1 + C_2$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}_2$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x^*,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$$

เพราะว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S จึงได้ว่า $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ มีค่าเพียงค่าเดียว

เพราะว่า ค่า $\int_{(x_0,y_0)}^{(x^*,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$ ขึ้นอยู่กับค่าของ x, y

จึงสามารถนิยามฟังก์ชัน $\phi(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x^*,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$

ซึ่งทำให้ $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(x, y)$ และ

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x^*,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_{(x_0,y_0)}^{(x^*,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$$

$$= 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \frac{\partial}{\partial x}\int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2$$

เพราะว่า $$\int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \left(\vec{F}(\vec{r}_2)\right) \cdot \vec{r}_2'(t) dt$$

$$= \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \left(P(\vec{r}_2(t))\vec{i} + Q(\vec{r}_2(t))\vec{j}\right) \cdot \vec{r}_2'(t) dt$$

$$= \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \left(P(t, y)\vec{i} + Q(t, y)\vec{j}\right) \cdot \left(t'\vec{i} + y'\vec{j}\right) dt$$

เพราะ $C_2 : \vec{r}_2(t) = (t, y)$ เมื่อ $x^* \le t \le x$

$$= \int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \left(P(t, y)\vec{i} + Q(t, y)\vec{j}\right) \cdot \left(1\vec{i} + 0\vec{j}\right) dt$$

ตัวอย่าง

$$= \int_{t=x^*}^{t=x} \big(P(t,y)\big)(1) + \big(Q(t,y)\big)(0)dt$$

$$= \int_{t=x^*}^{t=x} P(t,y)dt$$

ให้ $g(t) = P(t,y);$

$$= \int_{t=x^*}^{t=x} g(t)dt$$

จึงได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{(x^*,y)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{t=x^*}^{t=x} g(t)dt\right]$$

$= \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{t=x^*}^{t=x} g(t)dt\right)$ เพราะว่า $\displaystyle\int_{t=x^*}^{t=x} g(t)dt$ เป็นฟังก์ชันของ x

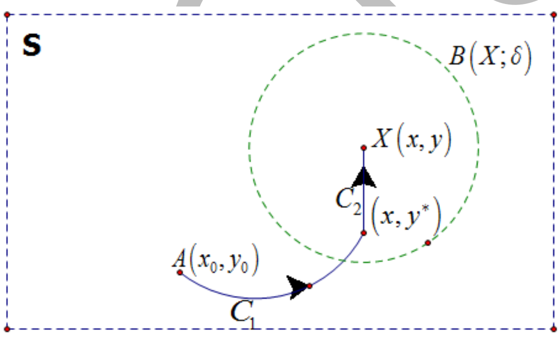
$= g(x)$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส

$$= P(x,y)$$

ดังนั้น $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\int \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = P(x,y)$

จะแสดงว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = Q$

เลือก $(x,y^*) \in B(X;\delta)$ โดยที่ $y^* < y$



ภาพที่ 5.4.5 เส้นโค้ง C_1 และ C_2

จากภาพที่ 5.4.5 เส้นโค้ง C_1 กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งจากจุด A ไปยังจุด (x,y^*) และ เส้นโค้ง C_2 กำหนดโดย $\vec{r}_2 = (x,t)$ เมื่อ $y^* \le t \le y$ เป็นส่วนของเส้นตรงจาก (x,y^*) ไปยังจุด $X(x,y)$ ให้ $C = C_1 + C_2$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F}d\vec{r}_2$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

ตัวอย่าง

เพราะว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S จึงได้ว่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ มีค่าเพียงค่าเดียว

เพราะว่า ค่า $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$ ขึ้นอยู่กับค่าของ x, y

จึงสามารถนิยามฟังก์ชัน $\phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

จึงสามารถนิยามฟังก์ชัน $\phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

ซึ่งทำให้ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(x,y)$ และ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y^*)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 \\
&= 0 + \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2
\end{aligned}$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 &= \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \left(\vec{F}(\vec{r}_2)\right)\cdot \vec{r}_2'(t)dt \\
&= \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \left(P(\vec{r}_2(t))\vec{i} + Q(\vec{r}_2(t))\vec{j}\right)\cdot \vec{r}_2'(t)dt \\
&= \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \left(P(x,t)\vec{i} + Q(x,t)\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i} + t'\vec{j}\right)dt
\end{aligned}$$

เพราะ $C_2 : \vec{r}_2(t) = (x,t)$ เมื่อ $y^* \le t \le y$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \left(P(x,t)\vec{i} + Q(x,t)\vec{j}\right)\cdot\left(0\vec{i} + 1\vec{j}\right)dt \\
&= \int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \left(P(x,t)\right)(0) + \left(Q(x,t)\right)(1)dt \\
&= \int_{t=y^*}^{t=y} Q(x,t)dt
\end{aligned}$$

ให้ $h(t)=Q(x,t);$ $\qquad = \int_{t=y^*}^{t=y} h(t)dt$

จึงได้ว่า $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{(x,y^*)}^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{t=y^*}^{t=y} h(t)dt\right]$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\int_{t=y^*}^{t=y} h(t)dt\right)$$ เพราะว่า $\int_{t=y^*}^{t=y} h(t)dt$ เป็นฟังก์ชันของ y

$=h(y)$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส

$=Q(x,y)$

ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)=Q(x,y)$

จึงได้ว่า $$\nabla\phi(x,y)=\nabla\left(\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)\vec{j}$$

$$=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

$$=\vec{F}(x,y)$$

จากบทพิสูจน์ข้างต้นสรุปได้ว่าในปริภูมิสองมิติ เมื่อกำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ และ $\vec{F}:S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยที่ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ เมื่อ P,Q เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสองตัวแปร และ ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S เมื่อ A เป็นจุดใน S ฟังก์ชัน $\phi:S\to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง นิยามโดย $\phi(x,y)=\int_A^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ จะได้ ϕ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน S

และ $$\nabla\int_A^{(x,y)} \vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}(x,y) \qquad \text{ทุกค่า } X(x,y)\in S$$

และ $$\nabla\phi(x,y)=\vec{F}(x,y) \qquad \text{ทุกค่า } X(x,y)\in S$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับปริภูมิสามมิติ

ให้ S เป็นเซตเปิดเชื่อมโยงได้ และ $\vec{F}:S\to R^3$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

เมื่อ P,Q และ R เป็นฟังก์ชันค่าจริงของสามตัวแปร และปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S เมื่อ A เป็นจุดใน S ฟังก์ชัน $\phi:S\to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง นิยามโดย

ตัวอย่าง

$$\phi(x,y,z)=\int_A^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

จะได้ ϕ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน S

และ $$\nabla\int_A^{(x,y,z)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}(x,y,z) \qquad \text{ทุกค่า } X(x,y,z)\in S$$

และ $$\nabla\phi(x,y,z)=\vec{F}(x,y,z) \qquad \text{ทุกค่า } X(x,y,z)\in S$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับปริภูมิ R^n

ให้ S เป็นเซตเปิดเชื่อมโยงได้ และ $\vec{F}:S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ และปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S เมื่อ A เป็นจุดใน S ฟังก์ชัน $\phi:S\to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงนิยามโดย $$\phi(X)=\int_A^X\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

จะได้ ϕ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน S

และ $$\nabla\int_A^X\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}(X) \qquad \text{ทุกค่า } X\in S$$

และ $$\nabla\phi(X)=\vec{F}(X) \qquad \text{ทุกค่า } X\in S$$

ทฤษฎีบท 5.4.2 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองสำหรับการปริพันธ์ตามเส้น

กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n ถ้า $\vec{F}:S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยมีฟังก์ชันศักดิ์ $\phi:S\to R$ มีสมบัติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi=\vec{F}$ แล้ว ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S และ

$$\int_A^B\vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A) \text{ ทุกค่า } A \text{ และ } B \text{ เป็นจุดใน } S$$

พิสูจน์ แสดงการพิสูจน์ในปริภูมิสองมิติ

ให้ A และ B เป็นจุดใน S เนื่องจาก S เป็นเซตเปิดที่เยื่อโยงได้ใน R^2

จึงได้ว่ามีส่วนโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ เป็นวิถีเรียบเชิงเดียว $a\le t\le b$ โดยที่ $\vec{r}(a)=A$ และ $\vec{r}(b)=B$

$$\begin{aligned}\int_C\nabla\phi\cdot d\vec{r}&=\int_a^b\nabla\phi(\vec{r}(t))\cdot d\vec{r}(t)\\&=\int_a^b\nabla\phi(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)dt\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \nabla\phi\big(x(t), y(t)\big)\cdot \vec{r}'\big(x(t), y(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x}\phi\big(x(t), y(t)\big)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi\big(x(t), y(t)\big)\vec{j}\right]\cdot\left[\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\big(x(t), y(t)\big)\right)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\big(x(t), y(t)\big)\right)\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\phi\big(x(t), y(t)\big)\,dt$$

ให้ $g(t) = \phi\big(x(t), y(t)\big); = \int_a^b \left(\frac{d}{dt}g(t)\right)dt$

$$= \big[g(t)\big]_{t=a}^{t=b}$$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่สอง

$$= \phi\big(x(b), y(b)\big) - \phi\big(x(a), y(a)\big)$$

$$= \phi\big(\vec{r}(b)\big) - \phi\big(\vec{r}(a)\big)$$

$$= \phi(B) - \phi(A)$$

แสดงการพิสูจน์ในปริภูมิสามมิติ ให้ A และ B เป็นจุดใน S เนื่องจาก S เป็นเซตเปิดที่เยื่อโยงได้ใน R^3 จึงได้ว่ามีส่วนโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ เป็นวิถีเรียบเชิงเดียว $a \le t \le b$ โดยที่ $\vec{r}(a) = A$ และ $\vec{r}(b) = B$

$$\int_C \nabla\phi\cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\phi\big(\vec{r}(t)\big)\cdot d\vec{r}(t)$$

$$= \int_a^b \nabla\phi\big(\vec{r}(t)\big)\cdot \vec{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \nabla\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\cdot \vec{r}'\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\vec{k}\right]\cdot\left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\phi\big(x(t), y(t), z(t)\big)\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \phi\left(x(t), y(t), z(t)\right) \right] dt$$

ให้ $g(t) = \phi\left(x(t), y(t), z(t)\right)$; $= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] dt$

$$= \left[g(t) \right]_{t=a}^{t=b} \quad \text{โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส}$$

$$= \phi\left(x(b), y(b), z(b)\right) - \phi\left(x(a), y(a), z(a)\right)$$

$$= \phi\left(\vec{r}(b)\right) - \phi\left(\vec{r}(a)\right)$$

$$= \phi(B) - \phi(A)$$

แสดงการพิสูจน์ ในปริภูมิ R^n

ให้ A และ B เป็นจุดใน S เนื่องจาก S เป็นเซตเปิดที่เยื่อโยงได้ใน R^n
จึงได้ว่ามีส่วนโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เป็นวิถีเรียบเชิงเดียว $a \le t \le b$ โดยที่ $\vec{r}(a) = A$ และ $\vec{r}(b) = B$

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\phi\left(\vec{r}(t)\right) \cdot d\vec{r}(t)$$

$$= \int_a^b \nabla\phi\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi\left(\vec{r}(t)\right) dt$$

ให้ $g(t) = \phi\left(\vec{r}(t)\right)$; $= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(t) \right) dt$

$$= \left[g(t) \right]_{t=a}^{t=b} \quad \text{โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส}$$

$$= \left[\phi\left(\vec{r}(t)\right) \right]_{t=a}^{t=b} \quad \text{เพราะว่า } g(t) = \phi\left(\vec{r}(t)\right)$$

$$= \phi\left(\vec{r}(b)\right) - \phi\left(\vec{r}(a)\right)$$

$$= \phi(B) - \phi(A)$$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของการปริพันธ์ตามเส้นบทที่หนึ่งและบทที่สองสรุป การหาค่าปริพันธ์ตามเส้น $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เมื่อ เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ ในช่วง $[a,b]$ อาจเลือกทำได้ 3 วิธี

วิธีที่ 1 ใช้การปริพันธ์ในพจน์ของตัวแปร t ตามวิถี คือ ใช้สูตร

$$\int_C \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

วิธีที่ 2 หาฟังก์ชันศักดิ์ ϕ ของ $\vec{F}$ (ในกรณีที่ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์) ใช้ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของปริพันธ์ตามเส้น

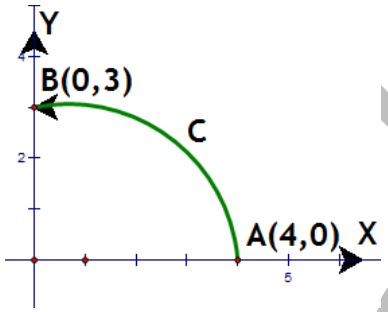
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi\left(\vec{r}(b)\right) - \phi\left(\vec{r}(a)\right)$$

วิธีที่ 3 ในกรณีที่ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถี และ หาฟังก์ชันศักดิ์ ϕ ไม่ได้ ให้เลือกเส้นโค้ง C_1 ที่มีสูตรง่ายกว่า และหาค่า $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ แทนด้วย $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ แล้วจึงสรุปว่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ มีค่าเท่ากับ $\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

ตัวอย่าง 5.4.5 จงหาค่าของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เมื่อกำหนดให้ $\vec{F}(x,y)=(y-2)\vec{i}+(x-3)\vec{j}$ และ

เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}$ เมื่อ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ



ภาพที่ 5.4.6 เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}$ เมื่อ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

วิธีที่ 1 ใช้การปริพันธ์ในพจน์ของตัวแปร t

จาก
$$\vec{F}(x,y)=(y-2)\vec{i}+(x-3)\vec{j}$$
$$\vec{F}(x(t),y(t))=((3\sin t)-2)\vec{i}+((4\cos t)-3)\vec{j}$$
$$=(3\sin t-2)\vec{i}+(4\cos t-3)\vec{j}$$
$$\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}$$
$$\vec{r}\,'(t)=-4\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}$$

พิจารณา
$$\vec{F}(x(t),y(t))\cdot\vec{r}\,'(t)=\left((3\sin t-2)\vec{i}+(4\cos t-3)\vec{j}\right)\cdot\left(-4\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}\right)$$
$$=(3\sin t-2)(-4\sin t)+(4\cos t-3)(3\cos t)$$
$$=-12\sin^2 t+8\sin t+12\cos^2 t-9\cos t$$
$$=12\left(\cos^2 t-\sin^2 t\right)+8\sin t-9\cos t$$
$$=12\cos 2t+8\sin t-9\cos t$$
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (12\cos 2t+8\sin t-9\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 12\cos 2t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos t dt$$

$$= \frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 8\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 9\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[6\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 9\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[6\sin 2(0) - 8\cos(0) - 9\sin(0)\right]$$

$$= (0+0-9) - (0-8-0) = -1$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -1$

วิธีที่ 2 เพราะว่ามีฟังก์ชัน $\phi(x,y) = xy - 2x - 3y$ ที่ทำให้

$$\nabla\phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(xy-2x-3y)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xy-2x-3y)\vec{j}$$

$$= (y-2)\vec{i} + (x-3)\vec{j}$$

$$= \vec{F}(x,y)$$

จึงได้ว่า $\vec{F}(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

ทำให้ $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

$$= \phi\left(\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \phi(\vec{r}(0))$$

จาก $$\vec{r}(t) = 4\cos t\vec{i} + 3\sin t\vec{j}$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$

$$= 4(0)\vec{i} + 3(1)\vec{j} = 3\vec{j}$$

$$\vec{r}(0) = 4\cos(0)\vec{i} + 3\sin(0)\vec{j}$$

$$= 4(1)\vec{i} + 3(0)\vec{j} = 4\vec{i}$$

$$\phi(x,y) = xy - 2x - 3y$$

$$\phi(\vec{r}(t)) = \phi(x(t), y(t))$$

$$\phi\left(\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \phi\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \phi(0,3)$$

$$= (0)(3) - 2(0) - 3(3) = -9$$

$$\phi(\vec{r}(0)) = \phi(x(0), y(0))$$

$$= \phi(4,0)$$

ตัวอย่าง

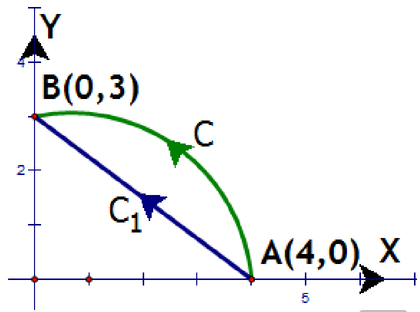
$$= (4)(0) - 2(4) - 3(0) = -8$$

จาก $$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi\left(\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \phi(\vec{r}(0))$$

$$= (-9) - (-8) = -1$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -1$

วิธีที่ 3 สมมติว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีและหาฟังก์ชันศักดิ์ ϕ ไม่ได้ เลือก C_1 กำหนดโดย $\vec{r}_1(t)$ เป็นเส้นตรง ที่มีผ่านจุด $(4,0)$ และ $(0,3)$ ดังภาพ 5.4.7



ภาพที่ 5.4.7 เส้นโค้ง C_1 กำหนดโดย $\vec{r}_1(t)$ เป็นเส้นตรง ที่มีผ่านจุด $(4,0)$ และ $(0,3)$

เพราะว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถี จากจุด $A(4,0)$ ไปยังจุด $B(0,3)$ ส่วนโค้ง C_1 กำหนดโดย $\vec{r}_1(t) = (4-4t)\vec{i} + 3t\vec{j}$

จาก $$\vec{F}(x,y) = (y-2)\vec{i} + (x-3)\vec{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) = \vec{F}((4-4t), 3t)$$

$$= ((3t)-2)\vec{i} + ((4-4t)-3)\vec{j} = (3t-2)\vec{i} + (1-4t)\vec{j}$$

จาก $$\vec{r}_1(t) = (4-4t)\vec{i} + 3t\vec{j}$$

$$\vec{r}_1'(t) = \frac{d}{dt}(4-4t)\vec{i} + \frac{d}{dt}3t\vec{j} = (-4)\vec{i} + 3\vec{j}$$

พิจารณา $$\vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t)\,dt = \left[(3t-2)\vec{i} + (1-4t)\vec{j}\right] \cdot \left[(-4)\vec{i} + 3\vec{j}\right]$$

$$= (3t-2)(-4) + (1-4t)(3)$$

$$= -12t + 8 + 3 - 12t = 11 - 24t$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1$$

$$= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1(t)) \cdot \vec{r}_1'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 11 - 24t\,dt = \left(11t - \frac{24t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(11(1)-\frac{24(1)^2}{2}\right)=-1$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=-1$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีปิด $\vec{r}$ คือ $\oint_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ หรือ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ โดยที่ทิศทางการเคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกา

ทฤษฎีบท 5.4.3 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบน S ซึ่งเป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้และเป็นเซตย่อยของ R^n จะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S
2. $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S
3. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีปิดใน S มีค่าเป็นศูนย์

พิสูจน์ จะแสดงว่า ถ้าเกิดข้อความ 1 แล้วเกิดข้อความ 2
จาก ทฤษฎีบท 5.4.1
ดังนั้น ถ้าเกิดข้อความ 1 แล้วเกิดข้อความ 2 ....(1)
จะแสดงว่า ถ้าเกิดข้อความ 2 แล้วเกิดข้อความ 1
จาก ทฤษฎีบท 5.4.2
ดังนี้ ถ้าเกิดข้อความ 2 แล้วเกิดข้อความ 1 ....(2)
จะแสดงว่า ถ้าเกิดข้อความ 2 แล้วเกิดข้อความที่ 3
สมมติ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S
ให้ เส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a,b]$ เป็นเส้นโค้งปิด
ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุด A และสิ้นสุดที่จุด B
จึงได้ว่า $A=\vec{r}(a)=\vec{r}(b)=B$
เนื่องจาก $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์
ดังนั้น มีฟังก์ชันศักดิ์ ϕ ที่ทำให้ $\nabla\phi=\vec{F}$

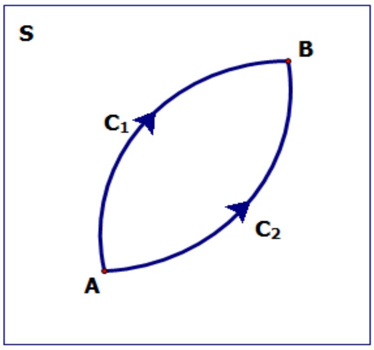
และ
$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}\\ &=\phi(B)-\phi(A)\\ &=\phi(B)-\phi(B) \text{ เพราะว่า } A=\vec{r}(a)=\vec{r}(b)=B\\ &=0\end{aligned}$$

จึงได้ ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีปิด C ใน S มีค่าเป็นศูนย์
ดังนั้น ถ้าเกิดข้อความ 2 แล้วเกิดข้อความที่ 3 ....(3)

จะแสดงว่า ถ้าเกิดข้อความ 3 แล้ว เกิดข้อความ 1

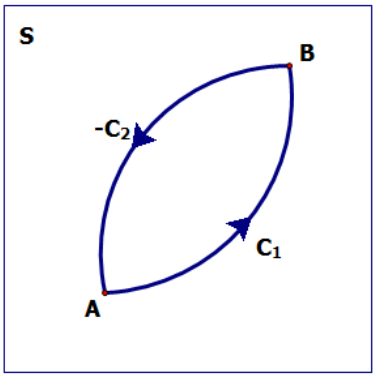
ตัวอย่าง

ให้ เส้นโค้ง C_1 กำหนดโดย $\vec{r}_1:[a,b]\to S$ และเส้นโค้ง C_2 กำหนดโดย $\vec{r}_2:[c,d]\to S$ เป็นวิถีใด ๆ ใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B ดังภาพที่ 5.4.8
จึงได้ $\vec{r}_1(a)=\vec{r}_2(c)=A$ และ $\vec{r}_1(b)=\vec{r}_2(d)=B$



ภาพที่ 5.4.8 ส่วนโค้ง C_1,C_2 มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B

ให้ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยวิถี $C_1+(-C_2)$ จึงได้ว่า C เป็นวิถีที่เริ่มต้นที่จุด $A=\vec{r}_1(a)=\vec{r}_2(c)$ ตามวิถี C_1 จนถึงจุด $B=\vec{r}_1(b)=\vec{r}_2(d)$ ต่อจากนั้นจึงเคลื่อนที่ย้อนกลับในทิศทาง C_2 จนมาสิ้นสุดที่จุด A ดังภาพที่ 5.4.9



ภาพที่ 5.4.9 ส่วนโค้ง $C=C_1+(-C_2)$

จึงได้ว่า C เป็นเส้นโค้งปิด โดยมีวิถี $\vec{r}(t)$ ที่กำหนดโดย

$$\vec{r}(t)=\begin{cases}\vec{r}_1(t) & ;a\le t\le b\\ \vec{r}_2(b+d-t) & ;b\le t\le b+d-c\end{cases}$$

ดังนั้น $C=C_1+(-C_2)$

จึงได้ว่า

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{C_1+(-C_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}_1+\int_{-C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

$$= \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

เพราะว่า C เป็นเส้นโค้งปิด

จึงได้
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$
$$\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 - \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = 0$$
$$\oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

จึงได้ว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S

ดังนั้น ถ้าเกิดข้อความ 3 แล้ว เกิดข้อความ 1 ....(4)

จาก $(1),(2),(3)$ และ (4) จึงได้ว่า ข้อความ 1, 2 และ 3 สมมูลกัน

ทฤษฎีบท 5.4.4 กำหนดให้ $\vec{F}: S \to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^2 โดยที่ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว $\dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S

โดยที่ $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$

จึงได้ว่า จะมีฟังก์ชันค่าจริง $\phi: S \to R$ ซึ่ง $\nabla\phi = \vec{F}$ บน S

พิจารณา
$$\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\vec{j}$$
$$= \vec{F}(x,y)$$
$$= P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

จึงได้
$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y) = P(x,y) \qquad ....(1)$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = Q(x,y) \qquad ....(2)$$

จาก (1);
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) \qquad ....(3)$$

จาก (2);
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) \qquad ....(4)$$

เพราะว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\right]$ และ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\right]$ ต่อเนื่องบน S

จึงได้
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\right]$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

จากทฤษฎีบท 5.4.4 สามารถใช้แนวคิดเกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงในการหาฟังก์ชันศักดิ์ ϕ ของ $\vec{F}$ ในกรณีที่ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์ ดังนี้

วิธีที่ 1 จากสมการ (1) ของทฤษฎีบท 5.4.4

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)=P(x,y)$$

$$\phi(x,y)=\int P(x,y)dx+h(y) \qquad \text{............}(5)$$

เพราะว่า $$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx+h(y)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}h(y)$$

จัดรูปสมการหาเทอม $\frac{\partial}{\partial y}h(y)$

โดยที่ $h(y)=\int\frac{\partial}{\partial y}h(y)dy+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แทนค่า $h(y)$ ในสมการ (5) จะได้ค่า $\phi(x,y)$

วิธีที่ 2 จากสมการ (2) ของทฤษฎีบท 5.3.4

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)=Q(x,y)$$

จึงได้ $$\phi(x,y)=\int Q(x,y)dy+g(x) \qquad \text{............}(6)$$

เพราะว่า $$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,y)dx+g(x)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial x}g(x)$$

จัดรูปสมการหาเทอม $\frac{\partial}{\partial x}g(x)$

โดยที่ $g(x)=\int\frac{\partial}{\partial y}g(x)dx+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แทนค่า $h(y)$ ในสมการ (6) จะได้ค่า $\phi(x,y)$

ตัวอย่าง

วิธีที่ 3

3.1 จาก $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)=P(x,y)$

จึงได้ $\qquad \phi(x,y)=\int P(x,y)dx \qquad$ ....(1)

3.2 จาก $\dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)=Q(x,y)$

จึงได้ $\qquad \phi(x,y)=\int Q(x,y)dy \qquad$ ....(2)

3.3 เลือก $\phi(x,y)$ จากสมการ (1)และ (2) โดยพิจารณา ดังนี้

ถ้ามีพจน์ซ้ำหันให้เลือกมาเพียงพจน์เดียว

ถ้าไม่มีพจน์ซ้ำให้นำมาทั้งหมด

3.4 ตรวจสอบความถูกต้องโดยพิจารณา

$$\nabla\phi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\vec{j}=\vec{F}(x,y)$$

ตัวอย่าง 5.4.6 ให้ $\vec{F}(x,y)=(3x^2y+2xy)\vec{i}+(x^3+x^2+2y)\vec{j}$ และเส้นโค้ง C ที่กำหนด

โดย $\vec{r}(t)=t^{\frac{2}{3}}\vec{i}+\left(1+t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{2}{3}}\right)\vec{j}$ เมื่อ $1\le t\le 8$ จงหา $\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จากส่วนโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=t^{\frac{2}{3}}\vec{i}+\left(1+t^{\frac{1}{3}}+t^{\frac{2}{3}}\right)\vec{j}$ เมื่อ $1\le t\le 8$

พิจารณา $t=1;\qquad \vec{r}(1)=(1)^{\frac{2}{3}}\vec{i}+\left(1+(1)^{\frac{1}{3}}+(1)^{\frac{2}{3}}\right)\vec{j}$

$$=1\vec{i}+3\vec{j}$$

จึงได้มีจุดเริ่มต้นที่ $A(1,3)$

และ $t=8;\qquad \vec{r}(8)=(8)^{\frac{2}{3}}\vec{i}+\left(1+(8)^{\frac{1}{3}}+(8)^{\frac{2}{3}}\right)\vec{j}=4\vec{i}+7\vec{j}$

จึงได้ว่ามีจุดสิ้นสุดที่ $B(4,7)$

จาก $\vec{F}(x,y)=(3x^2y+2xy)\vec{i}+(x^3+x^2+2y)\vec{j}$

จึงได้ $P(x,y)=3x^2y+2xy$

และ $Q(x,y)=x^3+x^2+2y$

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y+2xy)=3x^2+2x$$

และ $$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x^2+2y)=3x^2+2x$$

ดังนั้น $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

หา $\phi(x,y)$

จาก $$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)=P(x,y)=3x^2y+2xy$$

จึงได้ $$\phi(x,y)=\int 3x^2y+2xydx$$
$$=\frac{3x^3y}{3}+\frac{2x^2y}{2}+h(y)$$
$$=x^3y+x^2y+h(y) \qquad \text{............}(1)$$

จาก $$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)=Q(x,y)$$
$$=x^3+x^2+2y \qquad \text{............}(2)$$

จากสมการ (1); $$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[x^3y+x^2y+h(y)\right]$$
$$=x^3+x^2+h'(y) \qquad \text{............}(3)$$

ให้ สมการ$(2)=$ สมการ(3);
$$x^3+x^2+2y=x^3+x^2+h'(y)$$
$$h'(y)=2y$$
$$h(y)=\int 2ydy$$
$$=\frac{2y^2}{2}+c$$
$$=y^2+c$$

แทนค่า $h(y)=y^2+c$ แทนค่า ในสมการ (1)
$$\phi(x,y)=x^3y+x^2y+y^2+c$$

เลือก $$\phi(x,y)=x^3y+x^2y+y^2$$

พิจารณา $$\nabla\phi(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y+x^2y+y^2\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y+x^2y+y^2\right)\vec{j}$$
$$=\left(3x^2y+2xy\right)\vec{i}+\left(x^3+x^2+2y\right)\vec{j}$$
$$=\vec{F}(x,y)$$

จึงได้ว่า $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เป็นอิสระจากวิถี
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)$$
$$=\phi(4,7)-\phi(1,3)$$
$$=\left[(4)^3(7)+(4)^2(7)+(7)^2\right]-\left[(1)^3(3)+(1)^2(3)+(3)^2\right]$$
$$=[448+112+49]-[3+3+9]$$

ตัวอย่าง

$$= 594$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 594$

หาค่า $\phi(x, y)$ แบบที่ 3

$$\phi(x, y) = \int P(x, y) dx$$
$$= \int (3x^2 y + 2xy) dx = x^3 y + x^2 y$$
$$\phi(x, y) = \int Q(x, y) dx$$
$$= \int (x^3 + x^2 + 2y) dy \qquad = x^3 y + x^2 y + y^2$$

เพราะฉะนั้น เลือก $\phi(x, y) = x^3 y + x^2 y + y^2$

จะได้ $$\nabla\phi(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y)\vec{j}$$
$$= (3x^2 y + 2xy)\vec{i} + (x^3 + x^2 + 2y)\vec{j}$$

ทฤษฎีบท 5.4.5 กำหนดให้ $\vec{F} : S \to R^3$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^3 โดยที่ $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x, y, z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}P(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}R(x, y, z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}Q(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}R(x, y, z)$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์ บน S

โดยที่ $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

จะมีฟังก์ชันค่าจริง $\phi : S \to R$ ซึ่ง $\nabla\phi = \vec{F}$ บน S

$$\nabla\phi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\phi(x, y, z)\vec{k}$$
$$= \vec{F}(x, y, z)$$
$$= P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

จึงได้ว่า $$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y, z) = P(x, y, z) \qquad \text{...........}(1)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y, z) = Q(x, y, z) \qquad \text{...........}(2)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x, y, z) = R(x, y, z) \qquad \text{...........}(3)$$

จากสมการ (1) $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z) \qquad \text{...........}(4)$$

และ $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z) \qquad \text{...........}(5)$$

จากสมการ (2) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z) \qquad \text{...........}(6)$$

และ $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z) \qquad \text{...........}(7)$$

จากสมการ (3) $$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z) \qquad \text{...........}(8)$$

และ $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z) \qquad \text{...........}(9)$$

จากสมการ (4) และสมการ (6) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\right]$$

จึงได้ $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$$

จากสมการ (5) และสมการ (8) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\right]$$

จึงได้ $$\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)$$

จากสมการ (7) และสมการ (9) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\right]$$

จึงได้ $$\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)$$

จึงสรุปได้ว่า ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)$$

และ $$\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 5.4.5 จะพบว่า สำหรับ $\vec{F}=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}$ ถ้า $D_i f_j \neq D_j f_i$ สำหรับบางค่า i และ j แล้ว $\vec{F}$ ไม่เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.4.7 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=(3x^2+2xy+2z)\vec{i}+(x^3+2y+4z)\vec{j}+(x+y+2z^3)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันนิยามบน R^3 จงพิจารณาว่า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บนเซตย่อยของ R^3 หรือไม่

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตเปิดใด ๆ ใน R^3 และให้

$\vec{F}(x,y,z)=(3x^2+2xy+2z)\vec{i}+(x^3+2y+4z)\vec{j}+(x+y+2z^3)\vec{k}$

จึงได้ว่า $P(x,y,z)=3x^2+2xy+2z$ และ $Q(x,y,z)=x^3+2y+4z$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2+2xy+2z)=2x \qquad ....(1)$$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+2y+4z)=3x^2 \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1) และ สมการ (2); $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)\neq\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$

จึงได้ว่า $\vec{F}$ ไม่เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

การหาฟังก์ชันศักดิ์ของฟังก์ชัน $\vec{F}$ ใน R^3

จากเงื่อนไข $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)$$

และ $$\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)$$

การหา $\phi(x,y,z)$ ในกรณีที่ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S

ให้ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ และ $\phi(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$

จึงได้ว่า $$\nabla\phi=\vec{F}$$

จึงได้ว่า $$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)=P(x,y,z) \qquad ....(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)=Q(x,y,z) \qquad ....(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)=R(x,y,z) \qquad ....(3)$$

วิธีที่ 1 มีขั้นตอนการหา $\phi(x,y,z)$ ดังนี้

1. หา $\phi(x,y,z)$ จากสมการ (1) หรือ สมการ (2) หรือ สมการ (3) โดยการปริพันธ์

สมมติหา $\phi(x,y,z)$ จากสมการ (1)

เนื่องจากการหา $\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)$ จะคิดว่า y และ z เป็นค่าคงตัว

จึงได้ $$\phi(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx+g(y,z) \qquad ....(4)$$

เมื่อ $g(y,z)$ เป็นค่าคงตัว ในพจน์ของตัวแปร y และ z

2. เพราะว่า $\phi(x,y,z)$ ได้มาจากการปริพันธ์เทียบกับ x จึงสามารถหาอนุพันธ์ของ $\int P(x,y,z)dx+g(y,z)$ เทียบกับ y หรือ z สมมติเลือกหาอนุพันธ์เทียบกับ y

จึงได้ $$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y,z)dx+g(y,z)\right]$$

จากสมการ (2);
$$\begin{aligned}Q(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y,z)dx+g(y,z)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]\end{aligned}$$

จัดรูปสมการเพื่อหา $\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]$

3. เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]$ ถือว่า z เป็นค่าคงตัว

จึงได้ว่า การปริพันธ์ $\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]$ เทียบกับ y ค่าคงตัวที่ได้จะเป็นฟังก์ชันของ z

นั่นคือ $g(y,z)=\int\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]dy+h(z)$ แทนค่าในสมการ (4)

$$\phi(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx+\int\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]dy+h(z) \qquad ....(5)$$

4. หา $\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial z}\left[\int P(x,y,z)dx+\int\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]dy+h(z)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial z}\int P(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial z}\left[\int\frac{\partial}{\partial y}g(y,z)dy\right]+\frac{\partial}{\partial z}h(z)\end{aligned}$$

จาก $\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)=R(x,y,z)$

จึงได้ว่า $R(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}\int P(x,y,z)dx+\frac{\partial}{\partial z}\left[\int\frac{\partial}{\partial y}g(y,z)dy\right]+\frac{\partial}{\partial z}h(z)$

จัดรูปเพื่อหา $\frac{\partial}{\partial z}h(z)$

เนื่องจาก $h(z)=\int h(z)dz+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแทนค่าในสมการ (5)

จึงได้ $\phi(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx+\int\frac{\partial}{\partial y}\left[g(y,z)\right]dy+\int h(z)dz+c$

ตัวอย่าง

วิธีที่ 2 มีขั้นตอนการหา $\phi(x,y,z)$ ดังนี้

1. จาก $\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)=P(x,y,z)$

$$\phi(x,y,z)=\int P(x,y,z)dx \qquad \text{.............}(1)$$

2. จาก $\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)=Q(x,y,z)$

$$\phi(x,y,z)=\int Q(x,y,z)dy \qquad \text{.............}(2)$$

3. จาก $\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)=R(x,y,z)$

$$\phi(x,y,z)=\int R(x,y,z)dy \qquad \text{.............}(3)$$

4. เลือก $\phi(x,y,z)$ จากสมการ (1) สมการ (2) และสมการ (3) โดยพิจารณา

ถ้ามีพจน์ที่ซ้ำนำมาเพียงพจน์เดียว

ถ้าไม่มีพจน์ซ้ำให้นำมาทั้งหมด

5. ตรวจสอบความถูกต้องโดยพิจารณา

$$\nabla\phi(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\vec{k}=\vec{F}(x,y,z)$$

ตัวอย่าง 5.4.8 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=(3yz-2y-5z)\vec{i}+(3xz-2x-3z)\vec{j}+(3xy-5x-3y)\vec{k}$ และเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย $\vec{r}(t)=(1+t)\vec{i}+(2+t^2)\vec{j}+(6+t^2)\vec{k}$ เมื่อ $0\le t\le 1$ จงหา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จาก $\vec{F}(x,y,z)=(3yz-2y-5z)\vec{i}+(3xz-2x-3z)\vec{j}+(3xy-5x-3y)\vec{k}$

จึงได้ว่า $P(x,y,z)=(3yz-2y-5z)$

$Q(x,y,z)=3xz-2x-3z$

และ $R(x,y,z)=3xy-5x-3y$

พิจารณา

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(3yz-2y-5z)=3z-2 \qquad \text{...........}(1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(3xz-2x-3z)=3z-2 \qquad \text{...........}(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(3yz-2y-5z)=3y-5 \qquad \text{...........}(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(3xy-5x-3y)=3y-5 \qquad \text{...........}(4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(3xy-5x-3y)=3x-3 \qquad \text{...........}(5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(3xz-2x-3z)=3x-3 \qquad ....(6)$$

จากสมการ (1) และสมการ (2); $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$

จากสมการ (3) และสมการ (4); $\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)$

จากสมการ (5) และสมการ (6); $\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)$

จากทฤษฎีบท จึงได้ว่า $\vec{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

หาฟังก์ชันศักดิ์ $\phi(x,y,z)$

จาก $\vec{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

จึงได้ว่า
$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)=P(x,y,z)$$
$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=\int P(x,y,z)dx+h(y,z)\\&=\int(3yz-2y-5z)dx+h(y,z)\\&=3xyz-2xy-5xz+h(y,z) \quad ....(7)\end{aligned}$$

จากสมการ (7);
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial y}\big(3xyz-2xy-5xz+h(y,z)\big)\\&=3xz-2x+\frac{\partial}{\partial y}h(y,z)\end{aligned}$$

เนื่องจาก
$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)=Q(x,y,z)$$
$$3xz-2x+\frac{\partial}{\partial y}h(y,z)=3xz-2x-3z$$
$$\frac{\partial}{\partial y}h(y,z)=-3z$$
$$h(y,z)=\int-3zdy+g(z)=-3yz+g(z)$$

แทนค่า $h(y,z)=-3yz+g(z)$ ในสมการ(7)

จากสมการ(7)
$$\begin{aligned}\phi(x,y,z)&=3xyz-2xy-5xz+h(y,z)\\&=3xyz-2xy-5xz-3yz+g(z) \quad ....(8)\end{aligned}$$

จากสมการ (8)
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial z}\left[3xyz-2xy-5xz-3yz+g(z)\right]\\&=3xy-5x-3y+\frac{\partial}{\partial z}g(z)\end{aligned}$$

เนื่องจาก
$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)=R(x,y,z)$$

$$3xy-5x-3y+\frac{\partial}{\partial z}g(z)=3xy-5x-3y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}g(z)=0$$

$g(z)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แทนค่าในสมการ (8)

จากสมการ (8) $\qquad \phi(x,y,z)=3xyz-2xy-5xz-3yz+g(z)$

จึงได้ฟังก์ชันศักดิ์ $\qquad \phi(x,y,z)=3xyz-2xy-5xz-3yz+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}(3xyz-2xy-5xz-3yz+c)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}(3xyz-2xy-5xz-3yz+c)\vec{j}+\\&\quad\frac{\partial}{\partial z}(3xyz-2xy-5xz-3yz+c)\vec{k}\\&=(3yz-2y-5z)\vec{i}+(3xz-2x-3y)\vec{j}+(3xy-5x-3y)\vec{k}\\&=\vec{F}(x,y,z)\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\vec{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียต์และปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}(x,y,z)$ เป็นอิสระจากวิถี

พิจารณาเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)=(1+t)\vec{i}+(2+t^2)\vec{j}+(6+t^2)\vec{k}$ เมื่อ $0\le t\le 1$

เมื่อ $t=0$; $\vec{r}(0)=(1+0)\vec{i}+\left(2+(0)^2\right)\vec{j}+\left(6+(0)^2\right)\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$

จึงได้จุดเริ่มต้นคือ $(1,2,6)$

เมื่อ $t=1$; $\vec{r}(0)=(1+1)\vec{i}+\left(2+(1)^2\right)\vec{j}+\left(6+(1)^2\right)\vec{k}=2\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$

จึงได้จุดสิ้นสุดคือ $(2,3,7)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}&=\phi(2,3,7)-\phi(1,2,6)\\&=[3(2)(3)(7)-2(2)(3)-5(2)(7)-3(3)(7)+c]-\\&\quad[3(1)(2)(6)-2(1)(2)-5(1)(6)-3(2)(6)+c]\\&=(-19+c)-(-34+c)=15\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=15$

จากทฤษฎีบท 5.4.5 สำหรับ $\vec{F}:S\to R^3$ ที่เป็นอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^3 โดยที่

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1,x_2,x_3)\vec{i}+f_2(x_1,x_2,x_3)\vec{j}+f_3(x_1,x_2,x_3)\vec{k}$$

ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว

$$D_2f_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=D_1f_2$$

$$D_3f_1=\frac{\partial f_1}{\partial x_3}=\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=D_1f_3$$

$$D_3 f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = D_2 f_3$$

จึงได้ว่า $D_i f_j(x_1, x_2, x_3) = D_j f_i(x_1, x_2, x_3)$ ทุกค่า $i, j = 1, 2, 3$ และทุกค่า $(x_1, x_2, x_3) \in S$

ทฤษฎีบท 5.4.6 กำหนดให้ $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n) : S \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^n ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว $D_i f_j(X) = D_j f_i(X)$ ทุกค่า $i, j = 1, 2, \ldots, n$ และ $X \in S$

พิสูจน์ ให้ $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n)$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S

จึงมีฟังก์ชันค่าจริง $\phi : S \to R$ ซึ่ง $\nabla\phi = \vec{F}$ บน S

จึงได้ว่า $\quad D_i\phi = f_i \quad$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x_j ทั้งสองข้าง

จะได้ $\quad D_j D_i \phi = D_j f_i$

นั่นคือ $\quad D_{ij}\phi = D_j f_i$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $D_{ji}\phi = D_i f_j$

เพราะว่า $D_{ij}\phi$ และ $D_{ji}\phi$ ต่อเนื่องบน S

จึงได้ว่า $\quad D_{ij}\phi = D_{ji}\phi$ บน S

นั่นคือ $\quad D_i f_j(X) = D_j f_i(X)$ ทุกค่า $i, j = 1, 2, \ldots, n$ และ $X \in S$

การหาฟังก์ชันศักย์ของฟังก์ชัน $\vec{F}$ ใน R^n

ในกรณีที่ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

พิจารณา $\quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(f_1 \frac{dx_1}{dt} + f_2 \frac{dx_2}{dt} + \ldots + f_2 \frac{dx_n}{dt} \right)$ เมื่อ $C : \vec{r}(t); a \le t \le b$

สมมติ ϕ เป็นฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$

จึงได้ว่า $\nabla\phi = \vec{F}$ ซึ่งจะได้ว่า $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = f_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

$$f_1 \frac{dx_1}{dt} + f_2 \frac{dx_2}{dt} + \ldots + f_n \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

$$= \frac{d\phi}{dt}$$

นั่นคือ $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n = d\phi$

ค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน ϕ คือ $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n$

และ $\int_C f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n dx_n = \phi(b) - \phi(a)$

ตัวอย่าง

หมายเหตุ

1.สำหรับฟังก์ชัน $\vec{F}:S\to R^n$ โดยที่ $\vec{F}=(f_1,f_2,...,f_n)$ กล่าวว่า $f_1dx_1+f_2dx_2+...+f_ndx_n$ เป็นค่าเชิงอนุพันธ์แม่นตรง ถ้ามีฟังก์ชัน $\phi:S\to R$ ซึ่ง $d\phi=f_1dx_1+f_2dx_2+...+f_ndx_n$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S และฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ คือ $\phi+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2. จากทฤษฎีบท 5.4.6 จะได้ว่า สำหรับฟังก์ชัน $\vec{F}=(f_1,f_2,...,f_n)$ ถ้า $D_if_j\neq D_jf_i$ สำหรับบางค่า i และ j แล้ว $\vec{F}$ จะไม่เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S

3. บทกลับของทฤษฎีบท 5.4.4 ทฤษฎีบท 5.4.5 และทฤษฎีบท 5.4.6 ไม่เป็นจริง

ทฤษฎีบท 5.4.7 ให้ $\vec{F}:S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S เมื่อ $S=(a,b)\times(c,d)$ และ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ถ้า $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ แล้ว $\vec{F}$ จะมีฟังก์ชันศักดิ์บน S

พิสูจน์ ให้ $(x_0,y_0)\in S$ ให้ $\phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt\right]+0\\
&=P(x,y) \text{ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสบทที่หนึ่ง}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt\right]+Q(x_0,y)
\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส

$$=\left[\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}P(t,y)dt\right]+Q(x_0,y)$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} Q(t,y)dt + Q(x_0,y) \quad \text{เพราะ} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$= Q(x,y) - Q(x_0,y) + Q(x_0,y)$$
$$= Q(x,y)$$

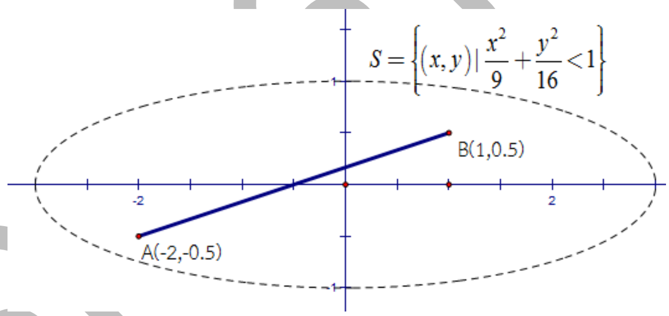
จึงได้ว่า $\nabla \phi = \vec{F}$
ดังนั้น $\vec{F}$ มีฟังก์ชันศักดิ์บน S

ทฤษฎีบท 5.4.8 ให้ $\vec{F} = (f_1, f_2, ..., f_n) : S \to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S เมื่อ $S = (a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times...\times(a_n,b_n)$ และ $D_i f_j(X) = D_j f_i(X)$ ทุก $X \in S$ และทุก $i, j = 1,2,...,n$ แล้ว $\vec{F}$ จะมีฟังก์ชันศักย์บน S

นิยาม 5.4.4 เซต S ใน R^n ที่มีสมบัติว่า สองจุด A, B ใด ๆ ใน S ส่วนของเส้นตรง AB ต้องอยู่ใน S เรียกเซต S ว่าเซตนูน (convex set)

ตัวอย่าง 5.4.9 จงพิจารณาว่า $S = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} < 1\right\}$ เป็นเซตนูนหรือไม่

วิธีทำ พิจารณากราฟ $S = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} < 1\right\}$

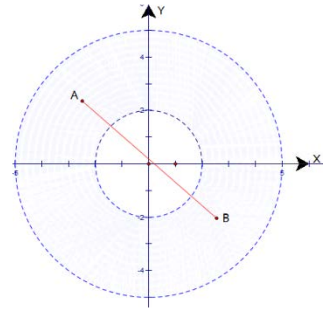


ภาพที่ 5.4.10 กราฟ $S = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} < 1\right\}$

จากภาพที่ 5.4.10 พบว่าจุด A และ B อยู่ในเซต S จะได้ว่าส่วนของเส้นตรง AB อยู่ใน เซต S ดังนั้น เซต S เป็นเซตนูน

ตัวอย่าง 5.4.10 จงพิจารณาว่า $S=\{(x,y)\,|\,4<x^2+y^2<25\}$ เป็นเซตนูนหรือไม่

วิธีทำ พิจารณากราฟ $S=\{(x,y)\,|\,4<x^2+y^2<25\}$



ภาพที่ 5.4.11 กราฟ $S=\{(x,y)\,|\,4<x^2+y^2<25\}$

จากภาพที่ 5.4.11 พบว่าจุด A และ B อยู่ในเซต S แต่เส้นตรง AB ไม่อยู่ในเซต S ดังนั้น เซต S ไม่เป็นเซตนูน

ทฤษฎีบท 5.4.9 ถ้า $\vec{F}:S\to R^3$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตนูน S แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S
2. $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S
3. $Curl\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$ บน S

ตัวอย่าง 5.4.11 ให้ $\vec{F}(x,y,z)=(2y+6z+2)\vec{i}+(2x+3z+3)\vec{j}+(3y+6x+4)\vec{k}$ และสำหรับส่วนโค้ง C ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t)=4\cos t\vec{i}+4\sin t\vec{j}+8t\vec{k}$ บนช่วง $0\le t\le\pi$ จงหา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

วิธีทำ จาก $\vec{F}(x,y,z)=(2y+6z+2)\vec{i}+(2x+3z+3)\vec{j}+(3y+6x+4)\vec{k}$

จึงได้ว่า
$$P(x,y,z)=2y+6z+2$$
$$Q(x,y,z)=2x+3z+3$$
$$R(x,y,z)=3y+6x+4$$

พิจารณา $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y+6z+2 & 2x+3z+3 & 3y+6x+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+3z+3 & 3y+6x+4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y+6z+2 & 3y+6x+4 \end{vmatrix} \vec{j} +$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 2y+6z+2 & 2x+3z+3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3y+6x+4) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+3z+3)\right]\vec{i} -$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(3y+6x+4) - \frac{\partial}{\partial z}(2y+6z+2)\right]\vec{j} +$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x+3z+3) - \frac{\partial}{\partial y}(2y+6z+2)\right]\vec{k}$$

$$= (3-3)\vec{i} - (6-6)\vec{j} + (2-2)\vec{k}$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

โดยทฤษฎีบท จึงได้ว่า

$\vec{F}(x,y,z) = (2y+6z+2)\vec{i} + (2x+3z+3)\vec{j} + (3y+6x+4)\vec{k}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์

หาฟังก์ชันศักดิ์ $\phi(x,y,z)$

จาก $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z) = P(x,y,z)$

$$\phi(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx + h(y,z)$$

$$= \int (2y+6z+2)dx + h(y,z)$$

$$= 2xy + 6xz + 2x + h(y,z) \qquad \text{...........(1)}$$

จากสมการ $\dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[2xy+6xz+2x+h(y,z)\right] = 2x + \dfrac{\partial}{\partial y}h(y,z)$

จาก $\dfrac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = Q(x,y,z)$

$$2x + \frac{\partial}{\partial y}h(y,z) = 2x + 3z + 3$$

$$h(y,z) = \int 3z + 3dy + g(z)$$

$= 3yz + 3y + g(z)$ แทนค่าในสมการ (1)

ตัวอย่าง

จากสมการ (1); $\phi(x,y,z) = 2xy + 6xz + 2x + h(y,z)$

$$= 2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + g(z) \quad ....(2)$$

จากสมการ (2); $\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + g(z)\right]$

$$= 6x + 3y + \frac{\partial}{\partial z} g(z)$$

จาก $\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = R(x,y,z)$

$$6x + 3y + \frac{\partial}{\partial z} g(z) = 3y + 6x + 4$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(z) = 4$$

$g(z) = \int 4dz = 4z + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แทนค่า $g(z) = 4z + c$ ในสมการ (2)

จาก สมการ (2); $\phi(x,y,z) = 2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + g(z)$

$$= 2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + 4z + c$$

เลือก $\phi(x,y,z) = 2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + 4z$ เป็นฟังก์ชันศักดิ์

จึงได้ว่า ปริพันธ์จากเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน R^3

พิจารณาเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดโดย $\vec{r}(t) = 4\cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j} + 8t\vec{k}$ บนช่วง $0 \le t \le \pi$

เมื่อ $t = 0$; $\vec{r}(0) = 4\cos(0)\vec{i} + 4\sin(0)\vec{j} + 8(0)\vec{k}$

$$= 4(1)\vec{i} + 4(0)\vec{j} + (0)\vec{k} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

จึงได้จุดเริ่มต้นคือ $(4,0,0)$

เมื่อ $t = \pi$; $\vec{r}(\pi) = 4\cos(\pi)\vec{i} + 4\sin(\pi)\vec{j} + 8(\pi)\vec{k}$

$$= 4(-1)\vec{i} + 4(0)\vec{j} + 8\pi\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 0\vec{j} + 8\pi\vec{k}$$

จึงได้จุดสิ้นสุดคือ $(-4,0,8\pi)$

พิจารณา $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(-4,0,8\pi) - \phi(4,0,0)$

จาก $\phi(x,y,z) = 2xy + 6xz + 2x + 3yz + 3y + 4z$

$$\phi(-4,0,8\pi) = 2(-4)(0) + 6(-4)(8\pi) + 2(-4) + 3(0)(8\pi) + 3(0) + 4(8\pi)$$

$$= 6(-4)(8\pi) + 2(-4) + 4(8\pi)$$

$$= -192\pi - 8 + 32\pi$$

$$= -160\pi - 8$$

$$\phi(4,0,0) = 2(4)(0) + 6(4)(0) + 2(4) + 3(0)(0) + 3(0) + 4(0) = 8$$

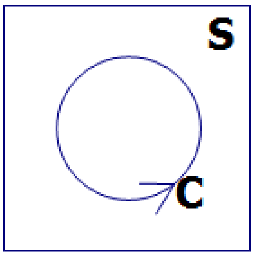
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(-4,0,8\pi)-\phi(4,0,0)$$
$$=(-160\pi-8)-(8)$$
$$=-160\pi-16$$

ดังนั้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -160\pi-16$

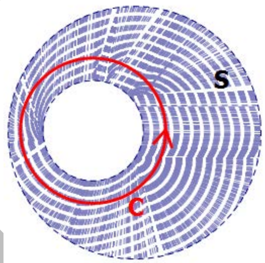
5.5 ทฤษฎีบทของกรีน

นิยาม 5.5.1 กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^2 และ S เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว (simply connected region) ก็ต่อเมื่อบริเวณภายในของทุกเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน S เป็นเซตย่อยของ S

ตัวอย่าง 5.5.1 จงพิจารณาเซต S ต่อไปนี้ว่าเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวหรือไม่



จากภาพพบว่า บริเวณภายในของทุกเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ในเซต S เป็นเซตย่อยของ S ดังนั้น เซต S เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

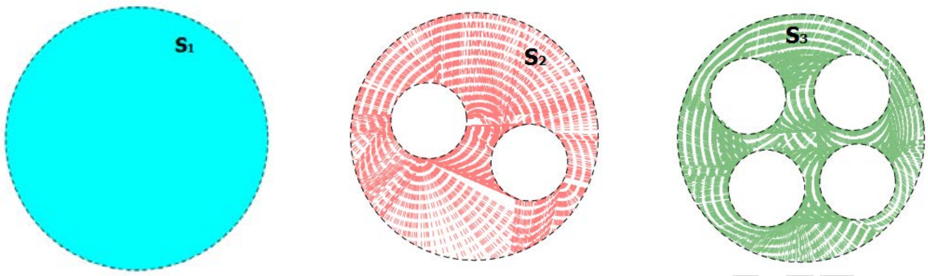


จากภาพพบว่า มีเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ในเซต S ที่บริเวณภายในของเส้นโค้ง C ไม่เป็นเซตย่อยของ S ดังนั้น เซต S ไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

หมายเหตุ ถ้า S เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวแล้วภายใน S จะไม่มีช่องโหว่

นิยาม 5.5.2 กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดเชื่อมโยงได้ใน R^2 จะได้ว่า S เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง (multiply connected region) ก็ต่อเมื่อ มีเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน S ที่บริเวณภายในเส้นโค้งปิดนั้นไม่เป็นเซตย่อยของ S

ตัวอย่าง 5.5.2 จงพิจารณาเซต S ที่กำหนดให้ เซตใดเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว หรือเป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง



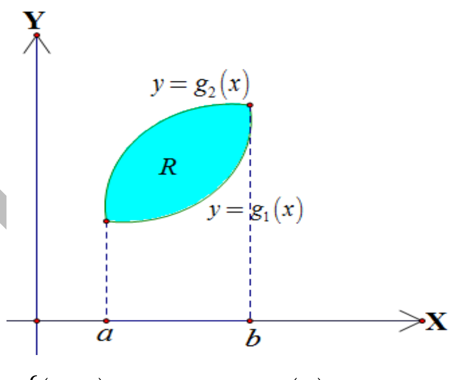
จากภาพ จึงได้ว่า S_1 เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว และ S_2 และ S_3 เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

ทฤษฎีบท 5.5.1 ทฤษฎีบทของกรีน(Green's theorem)สำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

ให้ D เป็นเซตเปิดใน R^2 และ C เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ และเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน D สำหรับ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R จะได้ $\oint_C Pdx+Qdy=\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณซึ่งผลผนวกของ C และบริเวณภายใน C โดยที่ปริพันธ์ตามเส้นบน C กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

พิสูจน์ ให้ บริเวณ R กำหนดเงื่อนไขได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1 บริเวณ $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b; g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ ดังภาพ 5.5.1

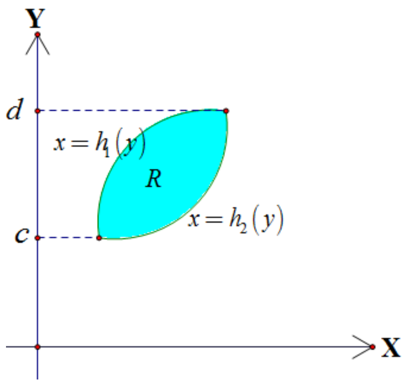


ภาพที่ 5.5.1 บริเวณ $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b; g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$

เมื่อ g_1, g_2 ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และอนุพันธ์ของ g_1, g_2 ต่อเนื่องบน (a,b)

ตัวอย่าง

แบบที่ 2 บริเวณ $R=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d; h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$ ดังภาพ 5.5.2



ภาพที่ 5.5.2 บริเวณ $R=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d; h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$

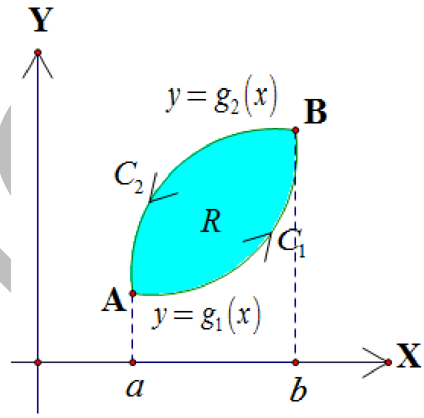
เมื่อ h_1,h_2 ต่อเนื่องบน $[c,d]$ และอนุพันธ์ของ h_1,h_2 ต่อเนื่องบน (c,d) การหาความสัมพันธ์ของ $\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y}dA$ และ $\oint\limits_C P(x,y)dx$

โดยพิจารณา R ตามรูปแบบที่ 1

เมื่อ $C=C_1+C_2$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งกำหนดโดย

C_1 เป็นเส้นโค้ง $y=g_1(x)$ และ $a\le x\le b$ จากจุด A ไปยังจุด B

C_2 เป็นเส้นโค้ง $y=g_2(x)$ และ $a\le x\le b$ จากจุด B ไปยังจุด A ดังภาพที่ 5.53



ภาพที่ 5.5.3 เส้นโค้ง C_1 จากจุด A ไปยังจุด B และเส้นโค้ง C_2 จากจุด B ไปยังจุด A

$$\oint\limits_C P(x,y)dx=\int\limits_{C_1} P(x,y)dx+\int\limits_{C_2} P(x,y)dx$$

$$=\int_a^b P(x,g_1(x))dx+\int_b^a P(x,g_2(x))dx$$

$$=\int_a^b P(x,g_1(x))dx-\int_a^b P(x,g_2(x))dx \qquad \text{............}(1)$$

พิจารณา $\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y} dA$ เมื่อ $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b; g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$

$$\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dydx$$

$$= \int_a^b \left[P(x,y)\right]_{y=g_2(x)}^{y=g_1(x)} dx$$

$$= \int_a^b \left[P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\right] dx$$

$$= -\int_a^b P(x,g_1(x))dx + \int_a^b P(x,g_2(x))dx \qquad \text{............(2)}$$

จากสมการ (1) และสมการ(2)

$$\oint_C P(x,y)dx = -\iint\limits_R \frac{\partial P}{\partial y} dA \qquad \text{............(3)}$$

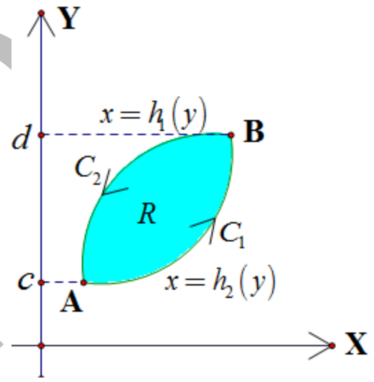
หาความสัมพันธ์ของค่า $\iint\limits_R \frac{\partial Q}{\partial x} dA$ และ $\oint_C Q(x,y)dy$

โดยพิจารณา R ตามแบบที่ 2

เมื่อ $C = C_1 + C_2$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งกำหนดโดย

C_1 เป็นเส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และ $c \le y \le d$ จากจุด A ไปยังจุด B

C_2 เป็นเส้นโค้ง $x = h_2(y)$ และ $c \le y \le d$ จากจุด B ไปยังจุด A ดังภาพที่ 5.5.4



ภาพที่ 5.5.4 เส้นโค้ง C_1 จากจุด A ไปยังจุด B และเส้นโค้ง C_2 จากจุด B ไปยังจุด A

$$\oint_C Q(x,y)dy = \int_{C_1} Q(x,y)dy + \int_{C_2} Q(x,y)dy$$

$$= \int_c^d Q(h_2(y),y)dx + \int_d^c Q(h_1(y),y)dy$$

$$= \int_c^d Q(h_2(y),y)dy - \int_c^d Q(h_1(y),y)dy \qquad \text{............(4)}$$

พิจารณา $\iint_R \frac{\partial P}{\partial x}dA$ เมื่อ $R=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d;h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy \\
&= \int_c^d \left[Q(x,y)\right]_{x=h_2(y)}^{x=h_1(y)} dy \\
&= \int_c^d \left[Q(h_2(y),y)-Q(h_1(y),y)\right]dy \\
&= \int_c^d Q(h_2(y),y)dy - \int_c^d Q(h_1(y),y)dy \qquad ....(5)
\end{aligned}$$

จากสมการ (4) และสมการ (5) $\oint_C Q(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}dA$

........(6)

จากสมการ (3) และสมการ (6)

$$\oint_C P(x,y)dx + \oint_C Q(x,y)dy = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}dA + \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}dA$$

$$\begin{aligned}
\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}dA - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}dA \\
&= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทของกรีน

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปของบริเวณ R ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ แล้ว $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

จึงได้ว่า $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = 0$

นั่นคือ $\oint_C Pdx + Qdy = 0$

ดังนั้น ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ แล้ว ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ บนวิถีปิดมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.5.2 กำหนดให้ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S ซึ่งเป็นเซตปิดที่เชื่อมโยงเชิงเดียวใน R^2 จะได้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์ ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ บน S

ตัวอย่าง 5.5.3 จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหาค่าปริพันธ์ $\oint_C \left(x^2 - 4y^2 + 4\right)dx - 8xydy$ เมื่อ C เป็นวงรีซึ่งกำหนดโดย $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ให้ $P(x,y) = x^2 - 4y^2 + 4$ และ $Q(x,y) = -8xy$

พิจารณา $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 4y^2 + 4\right) = -8y$$

และ $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-8xy) = -8y$$

จึงได้ว่า $P(x,y) = x^2 - 4y^2 + 4$ และ $Q(x,y) = -8xy$ มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R

ให้ R เป็นบริเวณภายในวงรี $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ รวมเส้นโค้ง C โดยทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\begin{aligned}\oint_C \left(x^2 - 4y^2 + 4\right)dx - 8xydy &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \\ &= \iint_R \left(-8y - (-8y)\right)dA \\ &= \iint_R 0dA = 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C \left(x^2 - 4y^2 + 4\right)dx - 8xydy = 0$

ตัวอย่าง 5.5.4 จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนหาค่าปริพันธ์ $\oint_C \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy$ เมื่อ C เป็นวงรีซึ่งกำหนดโดย $x^2 + 4y^2 = 16$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ให้ $P(x,y) = x^2 - y^2$ และ $Q(x,y) = -2xy$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right) = -2y$$

และ $$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) = -2y$$

จึงได้ว่า $P(x,y) = x^2 - y^2$ และ $Q(x,y) = -2xy$ มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R

ให้ R เป็นบริเวณภายในวงรี $x^2 + 4y^2 = 16$ รวมเส้นโค้ง C โดยทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\oint_C \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$
$$= \iint_R \left[-2y - (-2y)\right]dxdy$$
$$= \iint_R 0dxdy = 0$$

ดังนั้น $\oint_C \left(x^2 - y^2\right)dx - 2xydy = 0$

ตัวอย่าง 5.5.5 อะตอมเคลื่อนที่ไปบนวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยแรง $\vec{F}(x,y) = \left(e^x + y^3\right)\vec{i} + \left(\cos y + x^3\right)\vec{j}$ ใช้ทฤษฎีบทของกรีนหางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอะตอมนี้

วิธีทำ ให้ W แทนงานที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอะตอมไปบนวงกลม C ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาด้วยแรง $\vec{F}(x,y) = \left(e^x + y^3\right)\vec{i} + \left(\cos y + x^3\right)\vec{j}$

จะได้
$$W = \oint_C \left(e^x + y^3\right)dx + \left(\cos y + x^3\right)dy \qquad \text{............(1)}$$

เมื่อ C เป็นวงกลมที่กำหนดโดย $x^2 + y^2 = 4$ และปริพันธ์ตามเส้นการทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ให้ R เป็นบริเวณภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ ร่วมเส้นโค้ง C

จากสมการ (1); ให้ $P(x,y) = e^x + y^3$ และ $Q(x,y) = \cos y + x^3$

พิจารณา
$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + y^3\right) = 3y^2$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y + x^3\right) = 3x^2$$

โดยทฤษฎีบทของกรีน จะได้ว่า
$$W = \oint_C \left(e^x + y^3\right)dx + \left(\cos y + x^3\right)dy$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_R \left(3x^2 - 3y^2\right)dxdy$$
$$= 3\iint_R \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

เปลี่ยนตัวแปรเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วด้วยการแทนค่า

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ จะได้ $0 \le r \le 2$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$

จะได้
$$W = 3\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(r^2\right)rdrd\theta = 3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2}d\theta = 3\int_0^{2\pi}4d\theta$$
$$= 3(4\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$
$$= 24\pi$$

ดังนั้น งานที่ได้จากการเคลื่อนที่ของอะตอมคือ 24π

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.5.3 ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใน R^2 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา R เป็นบริเวณใน C ด้วยจะได้

1. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\oint_C (-y)dx$
2. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\oint_C xdy$
3. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + xdy$

พิสูจน์ เนื่องจากพื้นที่ของบริเวณ R คือ $\iint_R dxdy$

และจากทฤษฎีบทของกรีน $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ เป็นปริพันธ์ตามเส้นกระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

1. ให้ $P(x,y) = -y$ และ $Q(x,y) = 0$

จึงได้ว่า $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R

และ $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$ และ $\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = 0$

จะได้
$$\oint_C (-y)\,dx = \iint_R [0-(-1)]\,dxdy$$
$$= \iint_R dxdy$$

ดังนั้น พื้นที่ของ $R = \oint_C (-y)\,dx$ เมื่อการหาปริพันธ์กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

2. ให้ $P(x,y) = 0$ และ $Q(x,y) = x$

จึงได้ว่า $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R

และ $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 0$ และ $\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = 1$

จะได้
$$\oint_C xdy = \iint_R [1-0]\,dxdy$$
$$= \iint_R dxdy$$

ดังนั้น พื้นที่ของ $R = \oint_C xdy$ เมื่อการหาปริพันธ์กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง

3. พื้นที่ของ $R = \frac{1}{2}$(พื้นที่ของ R + พื้นที่ของ R)

จากข้อ 1 และ 2 ; พื้นที่ของ $R = \frac{1}{2}$(พื้นที่ของ R + พื้นที่ของ R)

$$= \frac{1}{2}\left[\oint_C (-y)\,dx + \oint_C x\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + x\,dy$$

ดังนั้น พื้นที่ของ $R = \frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + x\,dy$ เมื่อการหาปริพันธ์กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 5.5.6 จงคำนวณหาพื้นที่วงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

วิธีทำ ให้ C เป็นวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

กำหนด $\vec{r}$ เป็นวิถีกำหนด C โดยที่ $\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + b\sin t\vec{j}$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

พิจารณา $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$ และ $\frac{dy}{dt} = b\cos t$

แบบที่ 1 พื้นที่วงรี $= \oint_C (-y)\,dx$

$$= \int_0^{2\pi} (-b\sin t)(-a\sin t)\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \pi ab$$

ดังนั้น พื้นที่วงรี คือ πab ตารางหน่วย

แบบที่ 2 พื้นที่วงรี $= \oint_C x\,dy$

$$= \int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \pi ab$$

ดังนั้น พื้นที่วงรี คือ πab ตารางหน่วย

แบบที่ 3 พื้นที่วงรี $=\frac{1}{2}\oint_C (-y)dx + xdy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin t)(-a\sin t)dt + (a\cos t)(b\cos t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} 1dt = \frac{1}{2}ab[t]_{t=0}^{t=2\pi} = \pi ab$$

ดังนั้น พื้นที่วงรี คือ πab ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 5.5.7 จงหางานที่เกิดจากการเคลื่อนอนุภาคด้วยแรง $\vec{F}(x,y) = (y+3x)\vec{i} + (2y-x)\vec{j}$ ไปตามเส้นโค้งรูปวงรี $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา โดยใช้ทฤษฎีบทของกรีน

วิธีทำ ให้ W แทนงานที่เกิดจากการเคลื่อนอนุภาคด้วยแรง $\vec{F}(x,y) = (y+3x)\vec{i} + (2y-x)\vec{j}$ ไปตาม เส้นโค้งรูปวงรี $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

จึงได้ $$W = \oint_C (y+3x)dx + (2y-x)dy$$

เมื่อ C เป็นวงรี $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ และการหาปริพันธ์ตามเส้นกระทำตามทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ให้ $P(x,y) = y+3x$ และ $Q(x,y) = 2y-x$

พิจารณา $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y+3x) = 1$ และ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y-x) = -1$

$$W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \iint_R [1-(-1)]\,dA$$

$$= 2\iint_R dA = 2\,(\text{พื้นที่ของวงรี } x^2 + \frac{y^2}{4} = 1)$$

พื้นที่วงรี หาได้จาก πab จาก $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ได้ $a=1$ และ $b=2$

จึงได้ พื้นที่วงรี $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ คือ $\pi(1)(2) = 2\pi$

ตัวอย่าง

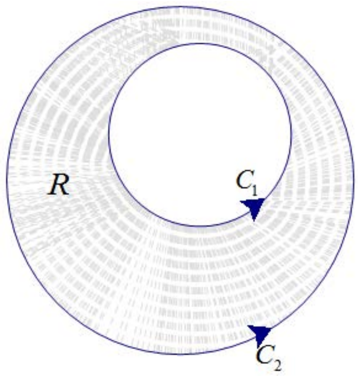
จาก
$$W = 2(\text{พื้นที่ของวงรี } x^2+\frac{y^2}{4}=1)$$
$$= 2(2\pi) = 4\pi$$

ดังนั้น งานที่เกิดจากการเคลื่อนอนุภาค คือ 4π

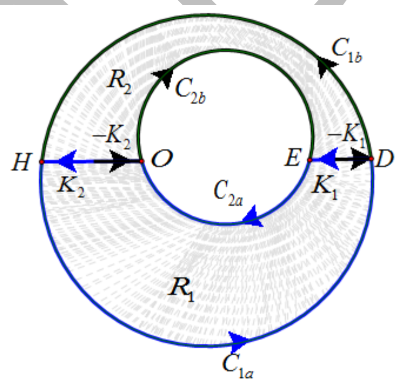
ทฤษฎีบท 5.5.4 ให้ C_1, C_2 เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวและเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ และ $C_1 \cap C_2 = \phi$ และบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C_2 เป็นเซตย่อยของบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C_1 ซึ่ง R เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ภายใน C_2 ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R $(R \subseteq S)$ จะได้ว่า

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

พิสูจน์



ภาพที่ 5.5.5 เส้นโค้ง C_1, C_2 และบริเวณ R



ภาพที่ 5.5.6 บริเวณ R_1 และ R_2

จากภาพที่ 5.5.6 ให้ K_1 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด D ไปยังจุด E

K_2 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด O ไปยังจุด H

C_{1a} เป็นส่วนของเส้นโค้ง C_1 ไปยังจุด H ไปยังจุด D

C_{1b} เป็นส่วนของเส้นโค้ง C_1 จากจุด D ไปยังจุด H

C_{2a} เป็นส่วนของเส้นโค้ง C_2 จากจุด E ไปยังจุด O

ตัวอย่าง

C_{2b} เป็นส่วนของเส้นโค้ง C_2 จากจุด O ไปยังจุด E

ให้ $C_1^* = K_1 + C_{2a} + K_2 + C_{1a}$

และ $C_2^* = -K_1 + C_{1b} + (-K_2) + C_{2b}$

จึงได้ว่า C_1^* และ C_2^* เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

R_1 เป็นบริเวณภายในของ C_1^* และรวมด้วยจุดบนเส้นโค้ง C_1^*

R_2 เป็นบริเวณภายในของ C_2^* และรวมด้วยจุดบนเส้นโค้ง C_2^*

โดยทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 5.5.4 ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ บน R แล้ว

จะได้
$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

เมื่อการหาปริพันธ์ตามเส้นกระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

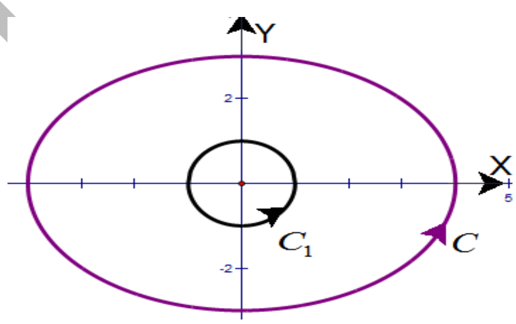
ตัวอย่าง 5.5.8 จงหาค่า $\oint_C \frac{x}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}dy$ เมื่อ C เป็นวงรี $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

วิธีทำ ให้ $P(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$ และ $Q(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}$

เพราะว่า $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^3}$ และ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^3}$

และ P และ Q ไม่นิยามที่จุด $(0,0)$

เลือก C_1 เป็นเส้นโค้งปิดรูปวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาดังภาพที่ 5.5.7



ภาพที่ 5.5.7 ส่วนโค้ง $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ และส่วนโค้ง $C_1: x^2 + y^2 = 1$

จากภาพที่ 5.5.7 จะพบว่า C_1 กำหนดโดย $\vec{r}_1(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ เมื่อ $0\le t\le 2\pi$ ให้ R เป็นบริเวณที่ประกอบด้วย C และบริเวณภายในของ C ซึ่งไม่อยู่ภายใน C_1 เพราะฉะนั้น $(0,0)$ ไม่อยู่ใน R

เนื่องจาก P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซต R โดยทฤษฎีบทจะได้

$$\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\oint_C Pdx+Qdy-\oint_{C_1} Pdx+Qdy$$

เพราะว่า
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

จึงได้ว่า
$$\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0$$

ซึ่งทำให้
$$\begin{aligned}\oint_C Pdx+Qdy&=\oint_{C_1} Pdx+Qdy\\&=\oint_{C_1} Pdx+\oint_{C_1} Qdy\\&=\oint_{C_1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx+\oint_{C_1}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\end{aligned}$$

จาก (x,y) อยู่บนเส้นโค้ง $x^2+y^2=1;$
$$\begin{aligned}&=\oint_{C_1}\frac{x}{(1)^2}dx+\oint_{C_1}\frac{y}{(1)^2}dx\\&=\int_{C_1} xdx+\int_{C_1} ydy\end{aligned}$$

ให้ $x=\cos t$ และ $y=\sin\theta;$
$$\begin{aligned}&=\int_0^{2\pi}\cos td(\cos t)+\int_0^{2\pi}\sin td(\sin t)\\&=\left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi}+\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi}\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(2\pi)-\cos(0)\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(2\pi)-\sin(0)\right]\\&=\frac{1}{2}[1-1]+\frac{1}{2}[0-0]\\&=0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\oint_C\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=0$

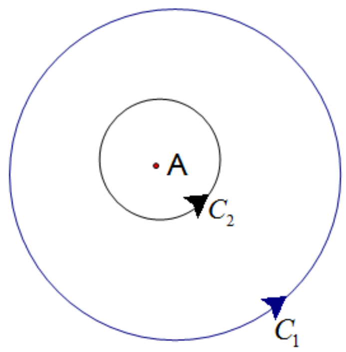
ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.5.5 ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R เป็นบริเวณซึ่งครอบคลุม บริเวณภายในของ C_1 และบริเวณภายในของ C_2 ฟังก์ชัน P และ Q มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตปิด S ซึ่งครอบคลุม R ยกเว้นที่จุด A ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ แล้ว $\oint_{C_1} Pdx+Qdy=\oint_{C_2} Pdx+Qdy$

พิสูจน์ ให้ C_2 เล็กกว่า C_1 แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 C_2 อยู่ภายในบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_1

พิจารณาภาพที่ 5.5.8



ภาพที่ 5.5.8 C_2 อยู่ภายในบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_1

ให้ R เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ใน C_2

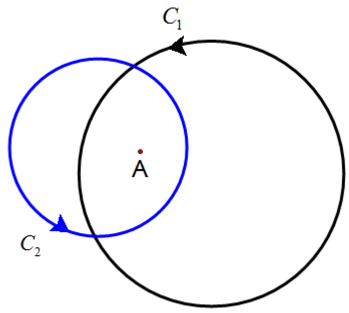
จากทฤษฎีบท 5.5.4 จะได้ $$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\oint_{C_1} Pdx+Qdy-\oint_{C_2} Pdx+Qdy$$

เพราะว่า $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

จึงได้ว่า $$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0$$

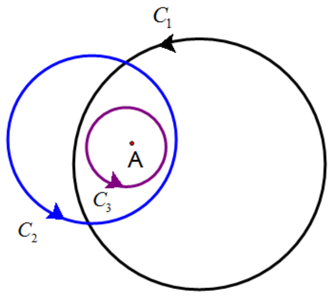
ดังนั้น $$\oint_{C_1} Pdx+Qdy=\oint_{C_2} Pdx+Qdy$$

กรณีที่ 2 C_2 มีส่วนตัดกับ C_1 ดังภาพที่ 5.5.9

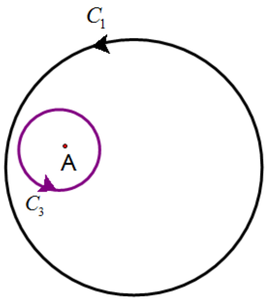


ภาพที่ 5.5.9 C_2 มีส่วนตัดกับ C_1

ให้ C_3 เป็นเส้นโค้งปิดที่ล้อมรอบจุด A และอยู่ทั้งในบริเวณภายในของ C_1 และ C_2 ดังภาพที่ 5.5.10



ภาพที่ 5.5.10 เส้นโค้งปิด C_3 ที่ล้อมรอบจุด A



ภาพที่ 5.5.11 C_3 อยู่ภายในบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_1

จากภาพที่ 5.5.11 ให้ R_1 เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ภายใน C_3

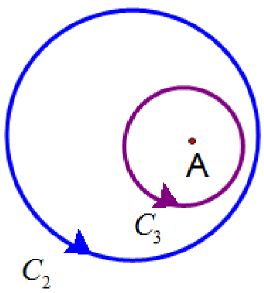
จากทฤษฎีบท 5.5.4 จะได้ $\iint\limits_{R_1}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\oint\limits_{C_1}Pdx+Qdy-\oint\limits_{C_3}Pdx+Qdy$

เพราะว่า
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

จึงได้
$$\iint\limits_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0$$

$$\oint\limits_{C_1}Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_3}Pdx+Qdy \qquad \text{............(1)}$$

ให้ R_2 เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_2 และบริเวณภายในของ C_2 ซึ่งไม่อยู่ภายใน C_3 ดังภาพที่ 5.5.12



ภาพที่ 5.5.12 C_3 อยู่ภายในบริเวณที่ปิดล้อมด้วย C_2

จากทฤษฎีบท 5.5.4 จะได้ $\iint\limits_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\oint\limits_{C_2} Pdx+Qdy-\oint\limits_{C_3} Pdx+Qdy$

เพราะว่า $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}$$

จึงได้ $$\iint\limits_{R_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0$$

$$\oint\limits_{C_2} Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_3} Pdx+Qdy \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1) และ สมการ(2); จึงได้ $\oint\limits_{C_1} Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_2} Pdx+Qdy$

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จึงได้ $\oint\limits_{C_1} Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_2} Pdx+Qdy$

ทฤษฎีบท 5.5.6 ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ P,Q เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ค่าของ $\oint\limits_{C} Pdx+Qdy$ มีได้เพียง 2 ค่าเท่านั้นคือ 0 หรือ ค่าคงตัว k เมื่อ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครบคลุม R ยกเว้นที่จุด A

พิสูจน์ ให้ R เป็นบริเวณซึ่งครอบคลุมบริเวณภายในของเส้นโค้งปิด C และจุดบน C

กรณีที่ 1 จุด A ไม่อยู่ในบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C

เพราะว่า $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

นั่นคือ $$\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}$$

เนื่องจาก C เป็นเส้นโค้งปิด ดังนั้น $\oint\limits_{C} Pdx+Qdy=0$

กรณีที่ 2 จุด A อยู่ในบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C เพราะว่า เส้นโค้ง C_1 และ C_2 ใด ๆ ที่เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ

จากทฤษฎีบท 5.5.5 จะได้ $\oint\limits_{C_1} Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_2} Pdx+Qdy$

ให้ k เป็นค่าตงตัว และมีค่าเท่ากับ $\oint\limits_{C} Pdx+Qdy$

เพราะว่า C เป็นเส้นโค้งที่มีจุด A อยู่ในบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C

นั่นคือ $\oint\limits_{C} Pdx+Qdy=\oint\limits_{C_1} Pdx+Qdy=k$

ดังนั้น ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ แล้ว $\oint\limits_{C} Pdx+Qdy$ เพียง 2 ค่าเท่านั้นคือ 0 หรือ k

ทฤษฎีบท 5.5.7 ทฤษฎีบทของกรีนสำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

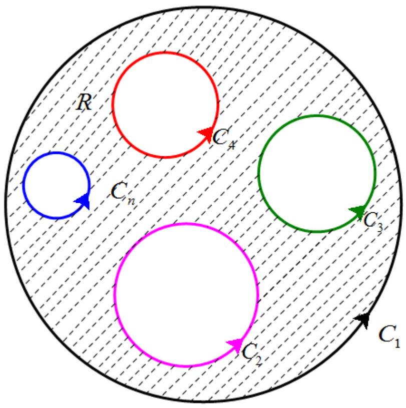
กำหนดให้ $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและมีสมบัติดังนี้

1. $C_i \cap C_j = \phi$ ถ้า $i \neq j$
2. C_i อยู่ในบริเวณภายใน C_1 ทุก $i = 2, 3, \ldots, n$
3. C_i อยู่ในบริเวณภายนอกของ C_j ทุก $i > 1, j > 1$ ถ้า $i \neq j$

ให้ R เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ใน $C_2, C_3, \ldots, C_n$ ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R จะได้

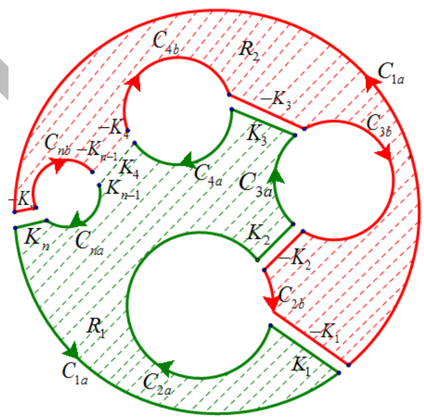
$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy - \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} P\,dx + Q\,dy$$

พิสูจน์ ให้ $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังภาพที่ 5.5.13



ภาพที่ 5.5.13 เส้นโค้งปิดเชิงเดียว $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$

กำหนดเส้นโค้งต่างๆ ดังภาพที่ 5.5.14



ภาพที่ 5.5.14 บริเวณ R_1 และบริเวณ R_2

จากภาพที่ 5.5.14 ให้

$$C_1^* = K_1 + C_{2a} + K_2 + C_{3a} + K_3 + C_{4a} + K_4 + ... + K_{n-1} + C_{na} + K_n + C_{1n}$$

$$C_2^* = -K_1 + C_{1a} + (-K_n) + C_{nb} + (-K_{n-1}) + ... + (-K_4) + C_{4b} + (-K_3) + C_{3b} + (-K_2) + C_{2b}$$

จึงได้ว่า C_1^* และ C_2^* เป็นส่วนโค้งปิดเรียบเชิงเดียว ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ให้ R_1 เป็นบริเวณภายใน C_1^* และรวมจุดเป็นเส้นโค้ง C_1^* ด้วย

และ R_2 เป็นบริเวณภายใน C_2^* และรวมจุดเป็นเส้นโค้ง C_2^* ด้วย

โดยทฤษฎีบทของกรีนจะได้

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_2} Pdx + Qdy - ... - \oint_{C_n} Pdx + Qdy$$

$$= \iint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} Pdx + Qdy$$

5.6 สมการเวกเตอร์ของผิว

นิยาม 5.6.1 ให้ฟังก์ชัน $\vec{r} : T \to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 โดย $\vec{r}(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}$ เรียกสมการเวกเตอร์ของพื้นผิว และมีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ

$$x = X(u,v)$$

$$y = Y(u,v)$$

$$z = Z(u,v)$$

เมื่อ (u,v) เป็นสมาชิกของ T

นิยาม 5.6.2 กราฟของ $\vec{r}$ ในปริภูมิสามมิติ เรียกพื้นผิวของสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{r}(T)$

ตัวอย่าง 5.6.1 กำหนด $\vec{r}(u,v) = k\sin u\cos v\vec{i} + k\sin u\sin v\vec{j} + k\cos u\vec{k}$ เป็นสมการเวกเตอร์ของพื้นผิว เมื่อ $(u,v) \in T$ โดยที่ $T = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \pi \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\}$ จงพิจารณาว่า $\vec{r}$ เป็นพื้นผิวของรูปทรงใด

วิธีทำ จาก $\vec{r}(u,v) = k\sin u\cos v\vec{i} + k\sin u\sin v\vec{j} + k\cos u\vec{k}$

เมื่อ $(u,v) \in T$ โดยที่ $T = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \pi \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\}$

ให้ $x = k\sin u\cos v, y = k\sin u\sin v, z = k\cos u$

พิจารณา

$$x^2 + y^2 + z^2 = (k\sin u\cos v)^2 + (k\sin u\sin v)^2 + (k\cos u)^2$$

$$= k^2\sin^2 u\cos^2 v + k^2\sin^2 u\sin^2 v + k^2\cos^2 u$$

ตัวอย่าง

$$= k^2 \sin^2 u \left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) + k^2 \cos^2 u$$
$$= k^2 \sin^2 u (1) + k^2 \cos^2 u$$
$$= k^2 \left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) = k^2 (1) = k^2$$

ดังนั้น พื้นผิว $\vec{r}$ เป็นพื้นผิวทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0,0)$ รัศมี k หน่วย

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนด $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u\vec{k}$ เป็นสมการเวกเตอร์ของพื้นผิว เมื่อ $(u,v) \in T$ โดยที่ $T = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 4 \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\}$ จงพิจารณาว่า $\vec{r}$ เป็นพื้นผิวของรูปทรงใด

วิธีทำ จาก $\vec{r}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u\vec{k}$

เมื่อ $(u,v) \in T$ โดยที่ $T = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 4 \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\}$

ให้ $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u$

พิจารณา
$$x^2 + y^2 = (u\cos v)^2 + (u\sin v)^2$$
$$= u^2\cos^2 v + u^2\sin^2 v$$
$$= u^2\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) = u^2 = z^2$$

ดังนั้น พื้นผิว $\vec{r}$ เป็นพื้นผิวรูปกรวย

หมายเหตุ สรุปพื้นผิวของรูปทรงต่างๆ ดังนี้

1. ทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น
$$\vec{r}(u,v) = k\sin u\cos \vec{i} + k\sin u\sin v\vec{j} + k\cos u\vec{k}$$
เมื่อ $T = \{(u,v) \mid 0 \le u \le \pi \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\}$

2. พื้นผิวครึ่งทรงกลมเหนือระนาบ XY มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น
$$\vec{r}(u,v) = k\sin u\cos v\vec{i} + k\sin u\sin v\vec{j} + k\cos u\vec{k}$$
เมื่อ $T = \left\{(u,v) \mid 0 \le u \le \frac{\pi}{2} \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\right\}$

3. พื้นผิวทรงกลมใต้ระนาบ XY มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น
$$\vec{r}(u,v) = k\sin u\cos v\vec{i} + k\sin u\sin v\vec{j} + k\cos u\vec{k}$$
เมื่อ $T = \left\{(u,v) \mid \frac{\pi}{2} \le u \le \pi \text{ และ } 0 \le v \le 2\pi\right\}$

4. รูปแบบอื่นๆ ของพื้นผิวครึ่งทรงกลมเหนือระนาบ XY มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น
$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{k^2 - x^2 - y^2}\vec{k} \quad \text{เมื่อ } (x,y) \in T$$
โดยที่ $T = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le k^2 \text{ เมื่อ } k > 0\}$

5. รูปแบบอื่นๆ ของพื้นที่ผิวครึ่งทรงกลมใต้ระนาบ XY มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น
$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} - \sqrt{k^2 - x^2 - y^2}\vec{k} \quad \text{เมื่อ } (x,y) \in T$$

โดยที่ $T=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le k^2 \text{ เมื่อ } k>0\}$

5. พาราโบลอยด์ $z=x^2+y^2$ เมื่อ $0\le z\le k$ มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น

$\vec{r}(u,v)=u\cos v\vec{i}+u\sin v\vec{j}+u^2\vec{k}$ เมื่อ $(u,v)\in T$

โดยที่ $T=\{(u,v)\,|\,0\le u\le\sqrt{k} \text{ และ } 0\le v\le 2\pi\}$

7. พาราโบลอยด์ $z^2=x^2+y^2$ เมื่อ $0\le z\le k$ มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น

$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$ เมื่อ $(x,y)\in T$

โดยที่ $T=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le k\}$

8. ทรงกระบอก $x^2+y^2=k^2$ เมื่อ $0\le z\le h$ มีสมการเวกเตอร์ของพื้นผิวเป็น

$\vec{r}(u,v)=k\cos u\vec{i}+k\sin u\vec{j}+v\vec{k}$ เมื่อ $(u,v)\in T$

โดยที่ $T=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 2\pi \text{ และ } 0\le v\le h\}$

5.7 การหาพื้นที่ของผิวโค้ง

นิยาม 5.7.1 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ

ภาพฉายของพื้นผิว S บนระนาบ XY

หมายถึงเซต $S_{XY}=\{(x,y,0)\,|\,\text{มี } z \text{ ที่ทำให้ } (x,y,z)\in S\}$

ภาพฉายของพื้นผิว S บนระนาบ YZ

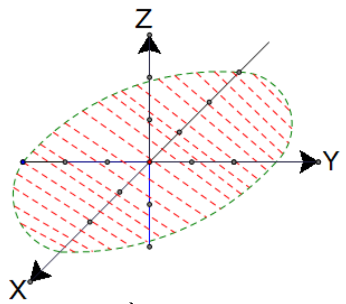
หมายถึงเซต $S_{YZ}=\{(0,y,z)\,|\,\text{มี } x \text{ ที่ทำให้ } (x,y,z)\in S\}$

ภาพฉายของพื้นผิว S บนระนาบ XZ

หมายถึงเซต $S_{XZ}=\{(x,0,z)\,|\,\text{มี } y \text{ ที่ทำให้ } (x,y,z)\in S\}$

ตัวอย่าง 5.7.1 ให้ $S=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=z \text{ และ } 0\le z\le 9\}$ จงพิจารณา S_{XY}

วิธีทำ $S_{XY}=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$ คือ จุดภายในวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และมีรัศมี 3 หน่วย บนระนาบ XY ดังภาพที่ 5.7.1



ภาพที่ 5.7.1 $S_{XY}=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$

พื้นผิว S ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นสับเซตของ R^2 โดยกำหนด $\vec{r}(u,v)=X(u,v)\vec{i}+Y(u,v)\vec{j}+Z(u,v)\vec{k}$

ตัวอย่าง

สิ่งที่ควรทราบ

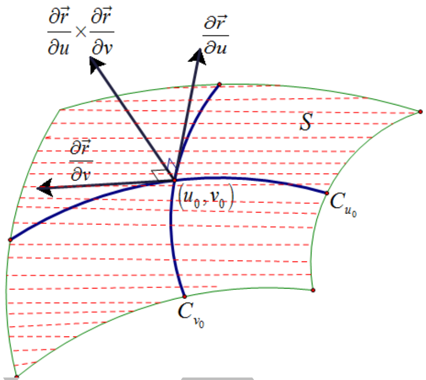
1. เมื่อ $v=v_0$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า $\vec{r}(u,v_0)$ คือเส้นโค้ง $C_{v_0}:\vec{r}(u,v_0)$ บนพื้นผิว S และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v_0)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง $C_{v_0}:\vec{r}(u,v_0)$

2. เมื่อ $u=u_0$ เป็นค่าตงตัว จะได้ว่า $\vec{r}(u_0,v)$ คือเส้นโค้ง $C_{u_0}:\vec{r}(u_0,v)$ บนพื้นผิว S และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง $C_{u_0}:\vec{r}(u_0,v)$

3. $\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)$ เรียกว่า เวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิวและ $\vec{N}=\frac{\vec{n}_{\vec{r}}}{|\vec{n}_{\vec{r}}|}$ เรียกว่า เวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว

4. $\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ เรียกว่าเวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิวที่ (u_0,v_0)

5. ภาพที่ใช้แสดงความหมายของจุด $\vec{r}(u_0,v_0)$ ซึ่ง $\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$ เส้นโค้ง $C_{v_0}:\vec{r}(u,v_0)$ บนพื้นผิว S $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v_0)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสเส้นโค้ง $C_{v_0}:\vec{r}(u,v_0)$ แสดงดังภาพที่ 5.7.2



ภาพที่ 5.7.2 $\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)$

นิยาม 5.7.2 พื้นผิว S ที่กำหนดโดยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 $\vec{r}(u,v)=X(u,v)\vec{i}+Y(u,v)\vec{j}+Z(u,v)\vec{k}$ เมื่อ $\vec{r}(u_0,v_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว ถ้า $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ต่อเนื่องที่จุด (u_0,v_0) และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\neq\vec{0}$ แล้ว $\vec{r}(u_0,v_0)$ เรียกจุดปกติ ถ้า $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด (u_0,v_0) หรือ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด (u_0,v_0) และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)=\vec{0}$ แล้ว $\vec{r}(u_0,v_0)$ เรียกจุดเอกฐาน

ตัวอย่าง 5.7.2 ให้ S เป็นผิวรูปครึ่งทรงกลม กำหนดโดย $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\sqrt{9-u^2-v^2}\vec{k}$ เมื่อ $T=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le 9\}$ จงหาจุดเอกฐานและจุดปกติของผิว S

วิธีทำ จาก $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\sqrt{9-u^2-v^2}\vec{k}$

พิจารณา
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left(u\vec{i}+v\vec{j}+\sqrt{9-u^2-v^2}\vec{k}\right)=\vec{i}-\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\vec{k}$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(u\vec{i}+v\vec{j}+\sqrt{9-u^2-v^2}\vec{k}\right)=\vec{j}-\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\vec{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}0 & -\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\\ 1 & -\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\\ 0 & -\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\left[0-\left(-\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\right)\right]\vec{i}-\left[\left(-\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\right)-0\right]\vec{j}+(1-0)\vec{k}$$
$$=\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\vec{i}+\frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\vec{j}+\vec{k}$$

เพราะว่าทุกจุดบนขอบของครึ่งทรงกลมมีค่า $u^2+v^2=9$ จึงได้ว่า จุดบนขอบของครึ่งทรงกลมเป็นจุดเอกฐานส่วนจุดอื่นๆ บนพื้นผิวครึ่งวงกลมจะเป็นจุดปกติ

นิยาม 5.7.3 พื้นผิว S ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 ถ้า $\vec{r}(u,v)$ เป็นจุดปกติทุก (u,v) ใน T แล้วพื้นผิว S เป็นพื้นผิวเรียบ ถ้า พื้นผิว S ไม่เป็นพื้นผิวเรียบแต่ S ประกอบด้วยพื้นผิวเรียบแล้ว พื้นผิว S เป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ

ข้อสังเกต

1. พื้นผิว S ในปริภูมิสามมิติ อาจได้มาจากฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}_1$ ที่มีโดเมน T_1 และ $S=\vec{r}_1(T_1)$ และ $\vec{r}_2$ ที่มีโดนเมน T_2 และ $S=\vec{r}_2(T_2)$ โดยที่ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ ต่างกัน เพราะฉะนั้นเป็นไปได้ที่จุด P บนพื้นผิว S

ถ้าพิจารณาโดยใช้ $\vec{r}_1(u,v)$ ที่มีโดเมน T_1 แล้ว จะได้ว่าจุด P เป็นจุดปกติ แต่ ถ้าพิจารณาโดยใช้ $\vec{r}_2(u,v)$ ที่มีโดเมน T_2 แล้ว จะได้ว่าจุด P เป็นจุดเอกฐาน

ตัวอย่าง

2. ถ้า $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ และ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เพราะฉะนั้น ระนาบสัมผัสจะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องดังนั้น พื้นผิวเรียบจะไม่มีการหักมุม

3. สำหรับฟังก์ชัน $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 เมื่อ L_{v_0} เป็นส่วนเส้นตรง $v=v_0$ ในโดเมน T บนระนาบ UV จะได้ว่า $\vec{r}\left(L_{v_0}\right)$ เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว $\vec{r}\left(T\right)$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\left(u,v_0\right)$ คือความเร็วของการเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง $\vec{r}\left(L_{v_0}\right)$

การเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง $\vec{r}\left(L_{v_0}\right)$ ในช่วงเวลา Δu มีค่าประมาณ $=$ ความเร็ว $\times$ เวลา

$$=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|\left(\nabla u\right)$$

เมื่อ L_{u_0} เป็นส่วนของเส้นตรง $u=u_0$ ในโดเมน T บนระนาบ UV

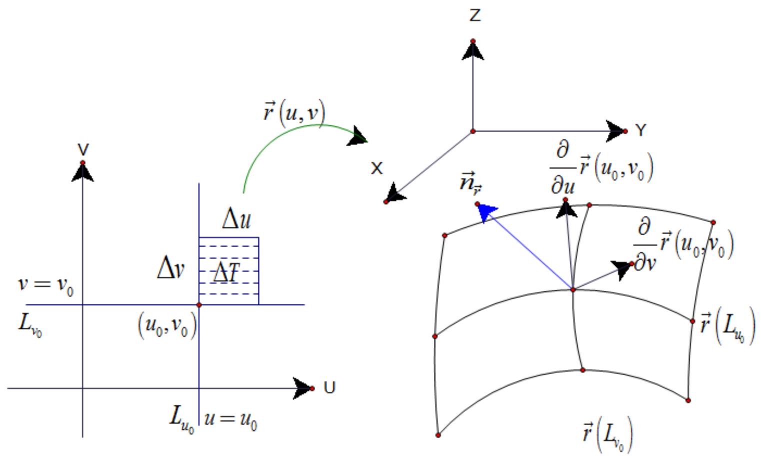
จะได้ว่า $\vec{r}\left(L_{u_0}\right)$ เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว $\vec{r}\left(T\right)$

$\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(u_0,v\right)$ คือ ความเร็วของการเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง $\vec{r}\left(L_{u_0}\right)$

ทฤษฎีบท 5.7.1 ฟังก์ชัน $\vec{r}\left(u,v\right):T\to R^2$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์ $\left(\Delta u\right)\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\left(u_0,v_0\right)$ และ $\left(\Delta v\right)\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(u_0,v_0\right)$ คือ $\left|\vec{n}_{\vec{r}}\left(u_0,v_0\right)\right|\left(\Delta u\right)\left(\Delta v\right)$

พิสูจน์ ให้ $\vec{r}\left(L_{u_0}\right)$ เป็นเส้นโค้งบนพื้นผิว $\vec{r}\left(T\right)$

การเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง $\vec{r}\left(L_{u_0}\right)$ ในช่วงเวลา Δv มีค่าประมาณ$=$ความเร็ว$\times$ เวลา $=\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\left(\nabla v\right)$



ภาพที่ 5.7.3 การเคลื่อนที่บนเส้นโค้ง

จากภาพที่ 5.7.3 บริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า ΔT ที่มีพื้นที่ $(\Delta u)(\Delta v)$ เมื่อส่งค่าไปยังพื้นผิว $\vec{r}(t)$ จะส่งไปยังบริเวณพื้นผิวมีค่าประมาณเท่ากับ $=$ พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์

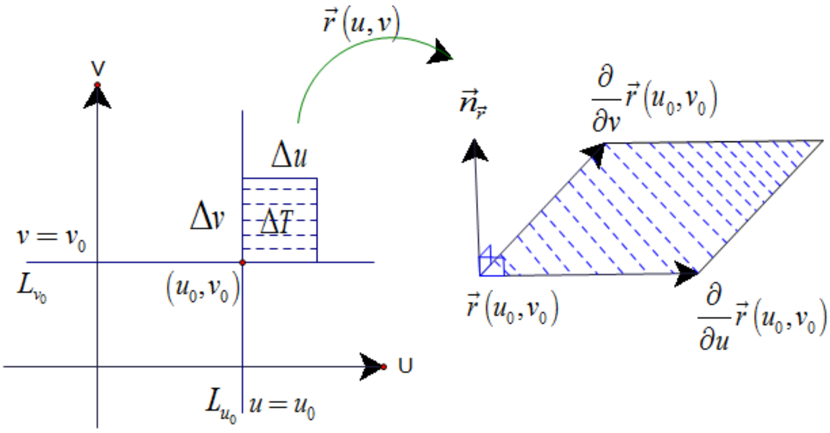
$(\Delta u)\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_0,v_0)$ และ $(\Delta v)\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u_0,v_0)$

$$= \left|(\Delta u)\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_0,v_0)\times(\Delta v)\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u_0,v_0)\right|$$

$$= \left|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_0,v_0)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u_0,v_0)\right|(\Delta u)(\Delta v)$$

$$= \left|\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)\right|(\Delta u)(\Delta v)$$

ดังนั้น บริเวณสี่เหลี่ยมพื้นผ้า ΔT บนโดเมน T บนระนาบ UV จะส่งด้วย $\vec{r}(u,v)$ ไปยังพื้นผิว $\vec{r}(T)$ ในปริภูมิสามมิติจะมีพื้นที่ประมาณเท่ากับ $\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)\right|(\Delta u)(\Delta v)$



ภาพที่ 5.7.4 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็น $(\Delta u)\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_0,v_0)$ และ $(\Delta v)\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u_0,v_0)$

ทฤษฎีบท 5.7.2 สำหรับพื้นผิวเรียบ S กำหนดโดย $\vec{r}: T \to R^3$ เมื่อ $T=[a,b]\times[c,d]$ เป็นเซตย่อยของระนาบ UV

$$\text{พื้นที่ผิวของ } S = \iint_T \left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right| du dv \quad \text{เมื่อ } \vec{n}_{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

พิสูจน์ ให้ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}: T \to R^3$ เมื่อ $T=[a,b]\times[c,d]$ เป็นเซตย่อยของระนาบ UV

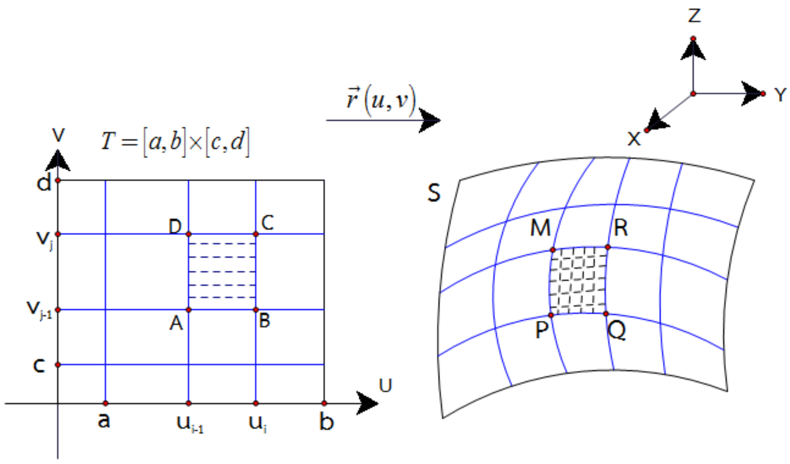
ให้ $P_U = \{u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},u_i,\ldots,u_m\}$ เป็นผลแบ่งกันของช่วง $[a,b]$

นั่นคือ P_U แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},u_i,\ldots,u_m$

โดยที่ $a=u_0<u_1<u_2<\ldots<u_{i-1}<u_i<\ldots<u_m=b$

และ $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ ทุกค่า $i=1,2,3,\ldots,m$

ให้ $P_V=\{v_0,v_1,v_2,...,v_{j-1},v_j,...,v_n\}$ เป็นผลแบ่งกันของช่วง $[c,d]$
นั่นคือ P_V แบ่งช่วง $[c,d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $v_0,v_1,v_2,...,v_{j-1},v_j,...,v_n$
โดยที่ $c=v_0<v_1<v_2<...<v_{j-1}<v_j<...<v_n=d$
และ $\Delta v_j=v_j-v_{j-1}$ ทุกค่า $j=1,2,3,...,n$



ภาพที่ 5.7.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ $T=[a,b]\times[c,d]$

สำหรับค่า $i=1,2,...,m$ และ $j=1,2,...,n$

ให้ $\quad T_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$

$\quad S_{ij}=$ พื้นที่ของพื้นผิว $\vec{r}(T_{ij})$

สี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ คือบริเวณ $[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$ บนระนาบ UV

ให้ $\quad \vec{r}(AB)=$ เส้นโค้ง PQ บนพื้นผิว S

$\vec{r}(BC)=$ เส้นโค้ง QR บนพื้นผิว S

$\vec{r}(CD)=$ เส้นโค้ง RM บนพื้นผิว S

$\vec{r}(DA)=$ เส้นโค้ง MP บนพื้นผิว S

ดังนั้น $\vec{r}(ABCD)=$ พื้นที่ผิว $PQRM$ บนพื้นผิว S

ให้
$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(B)-\vec{r}(A)$$
$$=\frac{\vec{r}(B)-\vec{r}(A)}{(u_i-u_{i-1})}(u_i-u_{i-1})$$

เพราะว่า $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ต้องมี u_{ij}^* เป็นสมาชิกของ $[u_{i-1},u_i]$

ที่ทำให้
$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_{ij}^*)=\frac{\vec{r}(B)-\vec{r}(A)}{u_i-u_{i-1}}$$

จึงได้ว่า
$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_{ij}^*)(u_i-u_{i-1})$$

ให้ $$\overrightarrow{PM}=\vec{r}(D)-\vec{r}(A)=\frac{\vec{r}(D)-\vec{r}(A)}{\left(v_j-v_{j-1}\right)}\left(v_j-v_{j-1}\right)$$

เพราะว่า $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ต้องมี v_{ij}^* เป็นสมาชิกของ $\left[v_{j-1},v_j\right]$

ที่ทำให้ $$\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(v_{ij}^*\right)=\frac{\vec{r}(D)-\vec{r}(A)}{v_j-v_{j-1}}$$

จึงได้ว่า $$\overrightarrow{PM}=\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(v_{ij}^*\right)\left(v_j-v_{j-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
S_{ij}&=\text{พื้นที่พื้นผิว } PQRM\\
&\approx\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PM}\right|\\
&=\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\left(u_i-u_{i-1}\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\left(v_j-v_{j-1}\right)\right|\\
&=\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(u_i-u_{i-1}\right)\left(v_j-v_{j-1}\right)\\
&=\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)
\end{aligned}$$

พื้นที่ของพื้นผิว $$\begin{aligned}S&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)\end{aligned}$$

เมื่อ m,n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด คือ $m\to\infty$ และ $n\to\infty$

และ Δu_i มีค่าเข้าใกล้ 0 ทุกค่า $i=1,2,\ldots,m$

และ Δv_j มีค่าเข้าใกล้ 0 ทุกค่า $j=1,2,\ldots,n$

จะได้ว่า พื้นที่ของพื้นผิว $S=\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)$

เนื่องจาก S เป็นพื้นผิวเรียบ

จึงได้ $\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)$ ต่อเนื่องบน T

และ $\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)$ ปริพันธ์ได้บนโดเมน T

ดังนั้น พื้นที่ของพื้นผิว $S=\iint\limits_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|dudv$ เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$

ตัวอย่าง 5.7.3 กำหนดให้เป็นพื้นผิวโดย มี $\vec{r}(u,v)$ ฟังก์ชันเวกเตอร์ของพื้นผิวโดย $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(2u+3v+24)\vec{k}$ และ $(u,v)\in[0,3]\times[0,4]$ จงหาพื้นที่ของ S

วิธีทำ จาก $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+(2u+3v+24)\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)&=\frac{\partial}{\partial u}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+(2u+3v+24)\vec{k}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial u}\left(u\vec{i}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(v\vec{j}\right)+\frac{\partial}{\partial u}(2u+3v+24)\vec{k}\\&=\vec{i}+2\vec{k}\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)&=\frac{\partial}{\partial v}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+(2u+3v+24)\vec{k}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial v}\left(u\vec{i}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(v\vec{j}\right)+\frac{\partial}{\partial v}(2u+3v+24)\vec{k}\\&=\vec{j}+3\vec{k}\end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned}\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)&=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\\&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&2\\0&1&3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}\\&=(0-2)\vec{i}-(3-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}\\&=-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|&=\left|-2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right|\\&=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(1)^2}\\&=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}\end{aligned}$$

จาก
$$\begin{aligned}S&=\iint_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|dudv\\&=\int_0^4\int_0^3\sqrt{14}dudv=\int_0^4\sqrt{14}u\Big|_{u=0}^{u=3}dv\\&=\int_0^4 3\sqrt{14}dv=3\sqrt{14}v\Big|_{v=0}^{v=4}\\&=12\sqrt{14}\end{aligned}$$

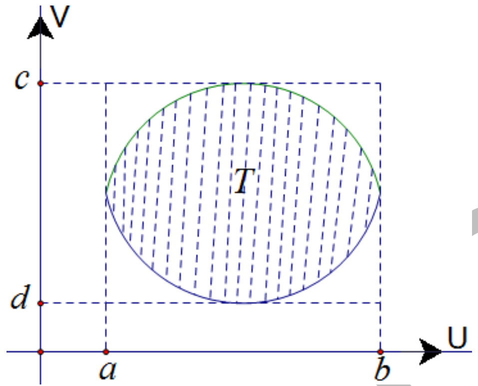
ดังนั้น พื้นที่ของผิว S คือ $12\sqrt{14}$

ตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 5.7.3 สำหรับพื้นผิวเรียบ S กำหนดโดย $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตที่มีขอบเขตซึ่งเป็นเซตย่อยของระนาบ UV พื้นที่ผิวของ $S=\iint\limits_T \left|\vec{n}_{\vec{r}}\left(u,v\right)\right|dudv$

เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial v}$

พิสูจน์ ให้ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตที่มีขอบเขตดังภาพที่ 5.7.6



ภาพที่ 5.7.6 แสดงขอบเขตของเซต T

เนื่องจาก T เป็นเซตที่มีขอบเขต จึงได้ว่าต้องมี a,b,c,d เป็นจำนวนจริง
ที่ทำให้ $T\in[a,b]\times[c,d]$ ดังภาพที่ 5.7.6

ให้ $P_U=\{u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},u_i,\ldots,u_m\}$ เป็นผลแบ่งกันของช่วง $[a,b]$
นั่นคือ P_U แบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $u_0,u_1,u_2,\ldots,u_{i-1},u_i,\ldots,u_m$
โดยที่ $a=u_0<u_1<u_2<\ldots<u_{i-1}<u_i<\ldots<u_m=b$
และ $\Delta u_i=u_i-u_{i-1}$ ทุกค่า $i=1,2,3,\ldots,m$
ให้ $P_V=\{v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{j-1},v_j,\ldots,v_n\}$ เป็นผลแบ่งกันของช่วง $[c,d]$
นั่นคือ P_V แบ่งช่วง $[c,d]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $v_0,v_1,v_2,\ldots,v_{j-1},v_j,\ldots,v_n$
โดยที่ $c=v_0<v_1<v_2<\ldots<v_{j-1}<v_j<\ldots<v_n=d$
และ $\Delta v_j=v_j-v_{j-1}$ ทุกค่า $j=1,2,3,\ldots,n$

สำหรับค่า $i=1,2,\ldots,m$ และ $j=1,2,\ldots,n$
ให้ $T_{ij}=[u_{i-1},u_i]\times[v_{j-1},v_j]$
จึงได้ว่า $T_{ij}\cap T\neq\phi$ หรือ $T_{ij}\cap T=\phi$

$S_{ij}=$ พื้นที่ของพื้นผิว $\vec{r}\left(T_{ij}\right)$ เมื่อ $T_{ij}\cap T\neq\phi$

ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 5.7.2

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= \text{พื้นที่พื้นผิว } \vec{r}\left(T_{ij}\right) \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\left(u_i-u_{i-1}\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\left(v_j-v_{j-1}\right)\right| \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(u_i-u_{i-1}\right)\left(v_j-v_{j-1}\right) \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{พื้นที่ของพื้นผิว } S &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)
\end{aligned}$$

เมื่อ m,n มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขีดจำกัด คือ $m\to\infty$ และ $n\to\infty$

และ Δu_i มีค่าเข้าใกล้ 0 ทุกค่า $i=1,2,\ldots,m$

และ Δv_j มีค่าเข้าใกล้ 0 ทุกค่า $j=1,2,\ldots,n$

จะได้ว่า พื้นที่ของพื้นผิว $S=\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)\right|\left(\Delta u_i\right)\left(\Delta v_j\right)$

เนื่องจาก S เป็นพื้นผิวเรียบ

จึงได้ $\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)$ ต่อเนื่องบน T

และ $\frac{\partial}{\partial u}\left(u_{ij}^*\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\left(v_{ij}^*\right)$ ปริพันธ์ได้บนโดเมน T

ดังนั้น พื้นที่ของพื้นผิว $S=\iint\limits_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}\left(u,v\right)\right|dudv$ เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$

ตัวอย่าง 5.7.4 จงหาพื้นที่ของพื้นผิวของระนาบ $3x+2y+z=6$ เฉพาะส่วนที่อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=9$

วิธีทำ ให้ S เป็นพื้นที่ของพื้นผิวที่ต้องการ ซึ่งกำหนดโดยสมการเวกเตอร์

$$\vec{r}\left(u,v\right)=u\vec{i}+v\vec{j}+\left(6-3u-2v\right)\vec{k} \quad \text{เมื่อ } \left(u,v\right)\in T$$

โดยที่ $T=\left\{\left(u,v\right)\mid u^2+v^2\le 9\right\}$

พิจารณา $\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\left(u,v\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+\left(6-3u-2v\right)\vec{k}\right]=\vec{i}-3\vec{k}$

และ $\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(u,v\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+\left(6-3u-2v\right)\vec{k}\right]=\vec{j}-2\vec{k}$

จาก $\vec{n}_{\vec{r}}\left(u,v\right)=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\left(u,v\right)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\left(u,v\right)$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

และ $$\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|=\left|3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right|=\sqrt{(3)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{14}$$

จาก $T=\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\le 9\}$ เปลี่ยนเป็นพิกัดเชิงขั้ว

โดยให้ $u=r\cos\theta$ และ $v=r\sin\theta$

จึงได้ $T=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 3\}$

จาก พื้นที่ของพื้นผิว $$S=\iint_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|dudv$$

$$=\iint_T\sqrt{14}dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^3\sqrt{14}rdrd\theta=\sqrt{14}\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\bigg|_{r=0}^{r=3}d\theta$$

$$=\sqrt{14}\int_0^{2\pi}4d\theta=4\sqrt{14}\left[\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right]$$

$$=8\sqrt{14}\pi$$

ดังนั้น พื้นที่ของพื้นผิว S คือ $8\sqrt{14}\pi$ ตารางหน่วย

ตัวอย่าง 5.7.5 ให้สมการเวกเตอร์ของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=a^2$ เป็น $\vec{r}(u,v)=a\sin u\cos v\vec{i}+a\sin u\sin v\vec{j}+a\cos u\vec{k}$ เมื่อ $(u,v)\in T$ โดยที่ $T=\{(u,v)\,|\,0\le u\le\pi$ และ $0\le v\le 2\pi\}$ จงหาพื้นที่ผิงของทรงกลม

วิธีทำ จาก $\vec{r}(u,v)=a\sin u\cos v\vec{i}+a\sin u\sin v\vec{j}+a\cos u\vec{k}$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left[a\sin u\cos v\vec{i}+a\sin u\sin v\vec{j}+a\cos u\vec{k}\right]$$

$$=a\cos u\cos v\vec{i}+a\cos u\sin v\vec{j}-a\sin u\vec{k}$$

และ $$\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}\left[a\sin u\cos v\vec{i}+a\sin u\sin v\vec{j}+a\cos u\vec{k}\right]$$

$$=-a\sin u\sin v\vec{i}+a\sin u\cos v\vec{j}$$

$$\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$$

ตัวอย่าง

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos u\sin v & -a\sin u \\ a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a\cos u\cos v & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a\cos u\cos v & a\cos u\sin v \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \left(0 + a^2\sin^2 u\cos v\right)\vec{i} - \left(0 - a^2\sin^2 u\sin v\right)\vec{j} + \left(a^2\cos u\sin u\cos^2 v + a^2\sin u\cos u\sin^2 v\right)\vec{k}$$

$$= a^2\sin^2 u\cos v\vec{i} + a^2\sin^2 u\sin v\vec{j} + a^2\cos u\sin u\vec{k}$$

พิจารณา $\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right| = \sqrt{\left(a^2\sin^2 u\cos v\right)^2 + \left(a^2\sin^2 u\sin v\right)^2 + \left(a^2\cos u\sin u\right)^2}$

$$= \sqrt{a^4\sin^4 u\cos^2 v + a^4\sin^4 u\sin^2 v + a^4\cos^2 u\sin^2 u}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2 u\left(\sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u\right)}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2 u\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right)}$$

$$= \sqrt{a^4\sin^2 u}$$

$$= a^2\sqrt{\sin^2 u}$$

$$= a^2\left|\sin u\right|$$

พื้นที่ผิวของทรงกลม $= \iint\limits_T \left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right| du dv$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\left|\sin u\right| du dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin u\, du dv$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} \left(-\cos u\right)\Big|_{u=0}^{u=\pi} dv$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} (1+1)\, dv$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi} dv$$

$$= 2a^2\left[v\right]_{v=0}^{v=2\pi}$$

$$= 4a^2\pi$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของทรงกลมตัน คือ $4a^2\pi$

5.8 ปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

นิยาม 5.8.1 ให้ S เป็นพื้นผิวสองหน้า ซึ่งกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(T)$ และ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ที่นิยามบนพื้นผิว S และ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน S เรียก $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ ว่าปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บน S เมื่อ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว S

ในการหาค่า $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$

กรณีที่ 1 เมื่อ $\vec{N}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$ จึงได้ว่า $\vec{N}=\dfrac{\vec{n}_{\vec{r}}}{|\vec{n}_{\vec{r}}|}$

จึงได้

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint\limits_{\vec{r}(T)} \vec{F}\cdot\frac{\vec{n}_{\vec{r}}}{|\vec{n}_{\vec{r}}|}dS$$

$$=\iint\limits_T \vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot\frac{\vec{n}(u,v)}{|\vec{n}(u,v)|}|\vec{n}(u,v)|dudv$$

ดังนั้น $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint\limits_T \vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot\dfrac{\vec{n}(u,v)}{|\vec{n}(u,v)|}|\vec{n}(u,v)|dudv$

กรณีที่ 2 เมื่อ $\vec{N}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

ดังนั้น $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS=-\iint\limits_T \vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot\dfrac{\vec{n}(u,v)}{|\vec{n}(u,v)|}|\vec{n}(u,v)|dudv$

จากกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 จะพบว่าในการหาค่าของปริพันธ์ตามพื้นผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บนพื้นผิว S ต้องระบุทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{N}$ ว่ามีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$ หรือตรงข้าม

หมายเหตุ

1. จุดทุกจุดบนพื้นผิว S มีเวกเตอร์ตำแหน่ง คือ $\vec{r}(u,v)$ โดยที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ดังนั้น เวกเตอร์ $\vec{r}$ มีทิศทางพุ่งออกจากจุดกำเนิดเสมอ
2. ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{N}$ หรือ $\vec{n}_{\vec{r}}$ หมายถึง ทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดบนพื้นผิว S

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.8.1 จงหาค่าปริพันธ์ตามพื้นผิว $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ เมื่อ S กำหนดโดย

$\vec{r}(u,v)=\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}$ เมื่อ $0\le u\le 2\pi$ และ $0\le v\le 1$

ให้ $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

วิธีทำ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของ S ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

จาก $\vec{r}(u,v)=\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}$

พิจารณา
$$\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left[\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}\right]$$
$$=-\sin u\vec{i}+\cos u\vec{j}$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}\left[\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}\right]=\vec{k}$$

จาก
$$\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\cos u & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-\sin u & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-\sin u & \cos u\\ 0 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}$$
$$\vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)=\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}$$

เนื่องจาก $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iint\limits_T \vec{F}\left(\vec{r}(u,v)\right)\cdot\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\,dudv$$
$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}+v\vec{k}\right)\cdot\left(\cos u\vec{i}+\sin u\vec{j}\right)dudv$$
$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}(\cos u)(\cos u)+(\sin u)(\sin u)+(v)(0)\,dudv$$
$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos^2 u+\sin^2 u\,dudv$$
$$=\int_0^1\int_0^{2\pi}1dudv=\int_0^1 u\Big|_{u=0}^{u=2\pi}dv$$
$$=\int_0^1 2\pi dv=(2\pi)v\Big|_{v=0}^{v=1}=2\pi$$

ดังนั้น ปริพันธ์ตามพื้นผิวคือ 2π

5.9 ทฤษฎีบทของสโตกส์

ทฤษฎีบทของสโตกส์เป็นการกล่าวถึงความสัมพันธ์ของปริพันธ์บนผิวโค้งกับปริพันธ์บนเส้นขอบ เป็นเช่นเดียวกับทฤษฎีบทของกรีน แต่ขยายจากการปริพันธ์บนระนาบเป็นปริพันธ์บนผิวโค้ง

ทฤษฎีบท 5.9.1 (ทฤษฎีบทของสโตกส์ Stokes's Theorem) กำหนดให้ T เป็นอาณาบริเวณแบบเชื่อมโยงเชิงเดียวในระนาบ UV และ Γ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ และล้อมรอบบริเวณ T มีเซตเปิด D ซึ่ง $T\cup\Gamma\subseteq D$ ให้ $\vec{r}:D\to R^3$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองต่อเนื่องและ $\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\neq 0$ บน T ถ้า S คือพื้นผิว $\vec{r}(T)$ และ C คือ เส้นโค้ง $\vec{r}(\Gamma)$ สำหรับ P,Q และ R เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบน S จะได้ว่า

$$\oint_C (Pdx+Qdy+Rdz)$$

$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right].....(1)$$

โดยที่การปริพันธ์บน C กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาของ Γ ภายใต้การส่งค่าของ $\vec{r}$

ถ้า $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ และ $\vec{N}_{\vec{r}}=\dfrac{\vec{n}_{\vec{r}}}{|\vec{n}_{\vec{r}}|}$ สามารถเขียนสมการ (1) ได้อีกรูปแบบคือ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}_{\vec{r}}dS$

เมื่อ $\vec{\alpha}(t)=\vec{r}\left(\vec{\beta}(t)\right)$ โดยที่ $\vec{\beta}$ นิยาม Γ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะได้

ถ้า S เป็นพื้นผิวในระนาบ XY และเวกเตอร์ $\vec{N}_{\vec{r}}=\vec{k}$

แล้ว $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

ตัวอย่าง 5.9.1 จงหาค่าของปริพันธ์ตามพื้นผิว $\iint_C Curl\vec{F}\cdot\vec{N}dS$ เมื่อ $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{j}$ และ S เป็นส่วนของพื้นผิวพาราโบลอยด์ $z=1-x^2-y^2, z\geq 0$ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยซึ่งมีส่วนประกอบที่สามเป็นบวก

วิธีทำ ให้พื้นผิว S โดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\left(1-u^2-v^2\right)\vec{k}$ เมื่อ $(u,v)\in T$ เมื่อ $T=\left\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\leq 1\right\}$

พิจารณา $$\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+\left(1-u^2-v^2\right)\vec{k}\right]=\vec{i}-2u\vec{k}$$

และ $$\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}\left[u\vec{i}+v\vec{j}+\left(1-u^2-v^2\right)\vec{k}\right]=\vec{j}-2v\vec{k}$$

จาก $$\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\times\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -2u\\ 0 & 1 & -2v\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & -2u\\ 1 & -2v\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2u\\ 0 & -2v\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2u\vec{i}+2v\vec{j}+\vec{k}$$

จึงได้ $\vec{N}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{n}_{\vec{r}}$ และ $\vec{N}=\dfrac{\vec{n}_{\vec{r}}}{\left|\vec{n}_{\vec{r}}\right|}$

จากทฤษฎีบทของสโตกส์ $\displaystyle\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}_{\vec{r}}\,dS=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$

หาค่าโดยการปริพันธ์ตามพื้นผิว ให้เส้นโค้ง Γ ล้อมบริเวณ T

กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{\beta}$ ดังนี้

$\vec{\beta}(t)=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}$ เมื่อ $t\in[0,2\pi]$

ให้ $$\vec{\alpha}(t)=\vec{r}\left(\vec{\beta}(t)\right)$$

$$=\vec{r}(\cos t,\sin t)$$

$$=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+\left(1-\cos^2 t-\sin^2 t\right)\vec{k}$$

$$=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}\quad\text{ทุกค่า } t\in[0,2\pi]$$

จะได้เส้นโค้ง เป็นขอบของพื้นผิวพาราโบลอยด์ กำหนดโดยฟังก์ชัน $\vec{\alpha}$ และมีทิศทางสืบเนื่องจากทิศทางทวนเข็มนาฬิกาของ $\vec{\beta}$

จาก $$\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$$

ได้ $$\vec{F}\left(\vec{\alpha}(t)\right)=\vec{F}(\cos t,\sin t,0)$$

$$=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{k}$$

จึงได้ $$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\int_0^{2\pi}\vec{F}\left(\vec{\alpha}(t)\right)\cdot\vec{\alpha}'(t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sin t\vec{i}+\cos t\vec{k}\right)\cdot\left(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}\right)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}-\sin^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos 2t-1}{2}\right)dt$$

ตัวอย่าง

$$=\left[\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{2}t\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$=-\pi$$

จาก $$\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}_{\vec{r}}dS=\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$$

ดังนั้น $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}dS=-\pi$

ตัวอย่าง 5.9.2 จงหาค่าของปริพันธ์ตามผิว $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}dS$ เมื่อกำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ และ S เป็นพื้นผิวครึ่งทรงกลม $x^2+y^2+z^2=9$ เมื่อ $z\geq 0$ ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของ S ซึ่ง $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$

วิธีทำ จาก $S: x^2+y^2+z^2=9$ เมื่อ $z\geq 0$

จัดรูป $$z^2=9-x^2-y^2, z\geq 0$$

$$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

ให้ S เป็นส่วนโค้งกำหนดโดย $\vec{r}(u,v)$

จึงได้ $\vec{r}(u,v)=u\vec{i}+v\vec{j}+\sqrt{9-u^2-v^2}\vec{k}$ สำหรับ $(u,v)\in T$

และ $T=\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\leq 9\}$

ใช้การปริพันธ์ตามเส้น ให้ Γ เป็นขอบเขตของ $T=\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\leq 9\}$

$\Gamma:\vec{\beta}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}$ เมื่อ $t\in[0,2\pi]$

จะได้ $\vec{\beta}$ มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ให้ C เป็นภาพฉายของ Γ ภายใต้การส่ง ดังนี้

$$C:\vec{\alpha}(t)=\vec{r}\left(\vec{\beta}(t)\right)$$

$$=\vec{r}(3\cos t,3\sin t)$$

$$=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+\sqrt{9-(3\cos t)^2-(3\sin t)^2}$$

$$=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j} \text{ เมื่อ } t\in[0,2\pi]$$

และ $$\vec{F}(\vec{\alpha}(t))=\vec{F}(3\cos t,3\sin t,0)$$

$$=3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{k}$$

และ $$\alpha'(t)=-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}$$

พิจารณา $$\vec{F}(\vec{\alpha}(t))\cdot\vec{\alpha}'(t)=\left(3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{k}\right)\cdot\left(-3\sin t\vec{i}+3\cos t\vec{j}\right)$$

$$=(3\sin t)(-3\sin t)=-9\sin^2 t$$

จาก
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\vec{\alpha}(t)\right)\cdot\vec{\alpha}'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(-9\sin^2 t\right)dt$$
$$= -9\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= -\frac{9}{2}\left[\int_0^{2\pi} 1dt - \int_0^{2\pi}\cos 2tdt\right]$$
$$= -\frac{9}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)_{t=0}^{t=2\pi}$$
$$= -\frac{9}{4}\left[2t-\sin 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$
$$= -9\pi$$

จาก $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}dS = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}$

ดังนั้น $\iint_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}dS = -9\pi$

5.10 ทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนส์ (Divergence Theorem)

ทฤษฎีบท 5.10.1 กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ ซึ่งปิดล้อมรูปทรงสามมิติ T และ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว S ซึ่งมีทิศทางพุ่งออกจาก T ให้

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งมีความต่อเนื่องและอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(x,y,z)\in T$ จะได้ $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_T div\vec{F}dxdydz$ หรือ

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

พิสูจน์ ให้ T แทนด้วย $f_1(x,y)\le z\le f_2(x,y)$ โดยที่ (x,y) อยู่บน R_{XY} ซึ่งเป็นภาพฉายของ S บนระนาบ XY

ให้ $z_1 = f_1(x,y)$ แทนด้วย S_1

$z_2 = f_2(x,y)$ แทนด้วย S_2

ให้ S_3 คือพื้นผิวทรงกระบอกซึ่งนิยามด้วยขอบของ R_{XY}

ให้ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยสำหรับทุกๆ พื้นผิว

พิจารณา

$$\iint_S Rdxdy = \iint_{S_1} Rdxdy + \iint_{S_2} Rdxdy + \iint_{S_3} Rdxdy$$

สำหรับพื้นผิว S_3 เพราะว่า $\vec{k}$ ตั้งได้ฉากกับ $\vec{N}$

ดังนั้น $\iint_{S_3} Rdxdy = \iint_{S_3} R\vec{k}\cdot\vec{N}dS = 0$

ดังนั้น $\iint_S Rdxdy = \iint_{S_1} Rdxdy + \iint_{S_2} Rdxdy$

เพราะว่าเวกเตอร์ $\vec{N}$ ของ S_2 มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ปกติของ S_1 ดังนั้น

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,f_2(x,y))dxdy - \iint_{S_2} R(x,y,f_1(x,y))dxdy$$

แต่
$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}dzdxdy = \iint_{R_{XY}}\left[\int_{z=h(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz\right]dxdy$$
$$= \iint_{R_{XY}} R(x,y,f_2(x,y))dxdy - \iint_{R_{XY}} R(x,y,f_1(x,y))dxdy$$
$$= \iint_S R(x,y,z)dxdy$$

ดังนั้น $\iint_S Rdxdy = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}dxdy$ ....(1)

ในการพิสูจน์ทำนองเดียวกันจึงได้ว่า

$$\iint_S Qdxdz = \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}dxdz \qquad \text{............(2)}$$

และ

$$\iint_S Pdydz = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}dydz \qquad \text{............(3)}$$

นำสมการ $(1)+$ สมการ $(2)+$ สมการ (3)

$$\iint_S Rdxdy + \iint_S Qdxdz + \iint_S Pdydz = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}dxdy + \iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y}dxdz + \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}dydz$$

ดังนั้น $\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x}dydz + \frac{\partial R}{\partial z}dxdy + \frac{\partial Q}{\partial y}dxdz$

ตัวอย่าง 5.10.1 กำหนดให้ $\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ และ S เป็นทรงกลมหนึ่งหน่วย จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนส์ หาค่า $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$

วิธีทำ พิจารณา
$$div\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}3x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z$$
$$= 3+1+1 = 5$$

ตัวอย่าง

จาก
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_T div\vec{F}dxdydz$$
$$= \iiint_T 5dxdydz$$
$$= 5\times \text{ ปริมาตรของทรงกลมหนึ่งหน่วย}$$
$$= 5\left(\frac{4}{3}\pi(1)^3\right) = \frac{20\pi}{3}$$

ดังนั้น $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \frac{20\pi}{3}$

ตัวอย่าง 5.10.2 จงหาปริพันธ์ตามผิว $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ เมื่อ S เป็นพื้นผิวห้าหน้าของรูปปริซึม ซึ่งประกอบด้วยระนาบ $y=0$ ระนาบ $y=x$ ระนาบ $x=1$ ระนาบ $z=0$ และระนาบ $z=1$ให้ $\vec{F}(x,y,z)=2x\vec{i}+3y\vec{j}+z\vec{k}$ และ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยซึ่งพุ่งออกจากรูปปริซึม

วิธีทำ ให้ V เป็นปริมาตรของปริซึม และให้ภาพฉายของ V อยู่บนระนาบ XY
$V=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1, \forall (x,y)\in T\}$
เมื่อ $T=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$ เพราะว่า $\vec{F}(x,y,z)=2x\vec{i}+3y\vec{j}+z\vec{k}$

พิจารณา
$$div\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}2x + \frac{\partial}{\partial y}3y + \frac{\partial}{\partial z}z$$
$$= 2+3+1 = 6$$

โดยทฤษฎีบทไดเวอร์เจนส์
$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_T div\vec{F}dxdydz$$
$$= \int_0^1\int_0^x\int_0^1 6dzdydx = \int_0^1\int_0^x 6z\Big|_{z=0}^{z=1} dydx$$
$$= \int_0^1\int_0^x 6dydx = \int_0^1 6y\Big|_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 6xdx = 6\left(\frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{x=1} = 3$$

ดังนั้น $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = 3$

5.11 สรุป

บทนี้เป็นการศึกษาถึง ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ งาน การปริพันธ์ตามเส้นและวิถีอิสระจากวิถี ทฤษฎีบทของกรีน สมการเวกเตอร์ของผิว การหาพื้นที่ของผิวโค้ง ปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ทฤษฎีบทของสโตกส์ และ ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนส์ โดนลายละเอียดสรุปได้ดังนี้

ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง

ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a \le t \le b$ สำหรับ $a,b \in R$ ซึ่ง $\vec{r}(t)$ เป็นวิถีเรียบหรือ วิถีเรียบเป็นช่วง ๆ s เป็นฟังก์ชันความยาวของส่วนโค้งกำหนดโดย $s(t)=\int_a^t \left|\vec{r}'(u)\right| du$ เมื่อ $t \in [a,b]$ ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีโดเมนครอบคลุมทุกจุดบนเส้นโค้ง C ให้ $\{t_i \mid i=0,1,2,...,n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ โดยที่ $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ เลือก $t_i^* \in [t_{i-1},t_i]$ ถ้า $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left(s\left(t_i\right)-s\left(t_{i-1}\right)\right)$ มีค่าแล้ว ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง f บน C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\int_C f$ หรือ $\int_C fds$ หรือ $\int_{\vec{r}} f$ หรือ $\int_{\vec{r}} fds$ กำหนดโดย $\int_C fds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\vec{r}\left(t_i^*\right)\right)\left(s\left(t_i\right)-s\left(t_{i-1}\right)\right)$ เมื่อลิมิตมีค่า

เส้นโค้ง C มีสมการ $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ หรือเขียนในรูปฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $a \le t \le b$ ถ้า $x'(t), y'(t)$ และ $z'(t)$ เป็นฟังก์ชันในช่วงดังกล่าว ปริพันธ์ตามเส้นจะหาค่าได้โดย

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\left|\vec{r}'(t)\right|dt$$

สมบัติของปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าจริง

เส้นโค้ง C ซึ่งเชื่อมจุด P และ Q ประกอบด้วยเส้นโค้ง $C_1, C_2, ..., C_n$ ต่อกันโดยที่แต่ละเส้นโค้งย่อยเป็นเส้นโค้งเรียบ แล้วกำหนดปริพันธ์ตามเส้นโค้ง C จาก P ถึงจุด Q โดย $\int_C f(x,y,z)ds = \int_{C_1} f(x,y,z)ds + \int_{C_2} f(x,y,z)ds + ... + \int_{C_n} f(x,y,z)ds$

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนครอบคลุมทุกจุดบนเส้นโค้ง $C:\vec{r}(t)$ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $\int_{-C} fds = \int_C fds$

ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีความโค้งบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $u:[c,d]\to[a,b]$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงซึ่งมีอนุพันธ์และ $u' \ne 0$ บนช่วง $[c,d]$ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่กำหนดโดย $\vec{r}_2(t)=\vec{r}_1(u(t))$ บนช่วง $[c,d]$ จะได้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกัน ให้ C_1 เป็นเส้นโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_1$ และ C_2 เป็นเส้นโค้งกำหนดโดย $\vec{r}_2$ ถ้า $u'(t)>0$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว กราฟของ C_1 และ C_2 มีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $u'(t)<0$ บนช่วง $[c,d]$ แล้ว กราฟของ C_1 และ C_2 มีทิศทางตรงข้ามกัน

ให้ $\vec{r}_1$ เป็นวิถีเชิงเดียวและเป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีเชิงเดียวและเป็นวิถีที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c,d]$ และ $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกันแล้ว $\int_{\vec{r}_1} fds = \int_{\vec{r}_2} fds$

ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บนเส้นโค้ง C หรือปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถี $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $t\in[a,b]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ หรือ $\int_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ หรือ $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เมื่อ $A=\vec{r}(a)$ และ $B=\vec{r}(b)$ โดย

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot \vec{r}'(t)dt$$

งาน

งานที่ได้จากแรง $\vec{F}$ ในการเคลื่อนวัตถุจากจุด $\vec{r}(a)$ ไปยังจุด $\vec{r}(b)$ ตามเส้นโค้ง C กำหนดโดย $\vec{r}(t)$ เมื่อ $a\le t\le b$ และ C เป็นวิถีเรียบหรือวิถีเรียบเป็นช่วง ๆ และ $\vec{r}$ เป็นวิถีเชิงเดียวกำหนดโดย งาน $=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$\text{งาน} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot \vec{r}'(t)dt$$

สมบัติของ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ให้ $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ เป็นวิถีที่สมมูลกัน

ถ้า $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศทางเดียวกันแล้ว $\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

ถ้า $\vec{r}_1$ และ $\vec{r}_2$ มีทิศตรงข้ามกันแล้ว $\int_{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = -\int_{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2$

ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสองมิติ โดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ เมื่อ $x(t)$, $y(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $[a,b]$ และ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{i}$ เมื่อ $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว $\int_C \vec{F}\cdot ds = \int_C Pdx+Qdy$

เมื่อ $\int_C Pdx = \int_a^b P\left(x(t),y(t)\right)\dfrac{dx(t)}{dt}dt$ และ $\int_C Qdy = \int_a^b Q\left(x(t),y(t)\right)\dfrac{dy(t)}{dt}dt$

ให้ C เป็นส่วนโค้งในปริภูมิสามมิติ กำหนดโดย $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ เมื่อ $x(t),y(t)$ และ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $[a,b]$ และ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ เมื่อ $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ และ $R(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว $\int_C \vec{F}\cdot ds = \int_C Pdx+Qdy+Rdz$ เมื่อ

$$\int_C Pdx = \int_a^b P\left(x(t), y(t), z(t)\right)\frac{dx(t)}{dt}dt,$$

$$\int_C Qdy = \int_a^b Q\left(x(t), y(t), z(t)\right)\frac{dy(t)}{dt}dt$$

และ $$\int_C Rdz = \int_a^b R\left(x(t), y(t), z(t)\right)\frac{dz(t)}{dt}dt$$

ให้ $\vec{r} = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)$ เมื่อ x_i เป็นฟังก์ชันค่าจริง บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $\vec{i} = 1,2,3,...,n$ และ $\vec{F} = \left(f_1, f_2, f_3, ..., f_n\right)$ เมื่อ f_i เป็นฟังก์ชันค่าจริงนิยามบนเส้นโค้ง C โดยที่ $\vec{i} = 1,2,3,...,n$ จะได้ $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C f_1dx_1 + \int_C f_2dx_2 + \int_C f_3dx_3 + ... + \int_C f_ndx_n$

การปริพันธ์ตามเส้นและวิถีอิสระจากวิถี

ให้ S เป็นเซตเปิดใน R^n เรากล่าวว่า S เป็น เซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจุดสองจุด A,B ใน S จะมีวิถีใน S ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B

ให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n ซึ่ง $\vec{F}: S \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน S

1. จุด A และ B เป็นจุดอยู่ใน S ถ้า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีใดก็ตามที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด A และจุดสิ้นสุดที่จุด B มีค่าคงตัวแล้วเรียกว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีจากจุด A ถึงจุด B

2. ถ้าทุกคู่ของจุด A,B ใน S ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีจากจุด A ถึงจุด B แล้ว เรียกว่า ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S

ให้ S เป็นเซตเปิดใน R^n และ $\vec{F}: S \to R^n$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ต่อเนื่องบน S ฟังก์ชันศักดิ์ของ $\vec{F}$ คือ ฟังก์ชันค่าจริง $\phi: S \to R$ ซึ่งมีสมบัติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi = \vec{F}$ เรียกฟังก์ชัน $\vec{F}$ ที่มีฟังก์ชันศักดิ์ว่า ฟังก์ชันเกรเดียนต์

ทฤษฎีบทหลักมูลสำหรับการปริพันธ์ตามเส้น บทที่หนึ่ง

กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n และ $\vec{F}: S \to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ถ้าปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S โดยที่ A เป็นจุดใด ๆ ใน S และ เป็นฟังก์ชันค่าจริง โดย $\phi(X) = \int_A^X \vec{F}\cdot d\vec{r}$ จะได้ ϕ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi(X) = \vec{F}(X)$ ทุก $X \in S$ ดังนั้น $\nabla\int_A^X \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}(X)$ ทุก $X \in S$

ทฤษฎีบทหลักมูลสำหรับการปริพันธ์ตามเส้นบทที่สอง

กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^n ถ้า $\vec{F}: S \to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยมีฟังก์ชันศักดิ์ $\phi: S \to R$ มีสมบัติว่า ϕ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน S และ $\nabla\phi = \vec{F}$ แล้ว ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S และ $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$ ทุกค่า A และ B เป็นจุดใน S

สมบัติการปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$

กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบน S ซึ่งเป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้และเป็นเซตย่อยของ R^n จะได้ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S
2. $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S
3. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ บนวิถีปิดใน S มีค่าเป็นศูนย์

กำหนดให้ $\vec{F}:S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^2 โดยที่ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$

กำหนดให้ $\vec{F}:S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^3 โดยที่ $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}P(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}Q(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}R(x,y,z)$$

กำหนดให้ $\vec{F}(f_1,f_2,f_3,\dots,f_n):S\to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ S ใน R^n ถ้า $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์ บน S แล้ว $D_i f_j(X)=D_j f_i(X)$ ทุกค่า $i,j=1,2,\dots,n$ และ $X\in S$

ให้ $\vec{F}:S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S เมื่อ $S=(a,b)\times(c,d)$ และ $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ถ้า $\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$ แล้ว $\vec{F}$ จะมีฟังก์ชันศักดิ์บน S

ให้ $\vec{F}=(f_1,f_2,\dots,f_n):S\to R^2$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S เมื่อ $S=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\dots\times(a_n,b_n)$ และ $D_i f_j(X)=D_j f_i(X)$ ทุก $X\in S$ และทุก $i,j=1,2,\dots,n$ แล้ว $\vec{F}$ จะมีฟังก์ชันศักดิ์บน S

เซต S ใน R ที่มีสมบัติว่า สองจุด A,B ใด ๆ ใน S ส่วนของเส้นตรง AB ต้องอยู่ใน S เรียกเซต S ว่าเซตนูน

ถ้า $\vec{F}:S\to R^3$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตนูน S แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. ปริพันธ์ตามเส้นของ $\vec{F}$ เป็นอิสระจากวิถีใน S
2. $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์บน S
3. $Curl\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$ บน S

ทฤษฎีบทของกรีน

กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดที่เชื่อมโยงได้ใน R^2 และ S เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว ก็ต่อเมื่อบริเวณภายในของทุกเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน S เป็นเซตย่อยของ S

กำหนดให้ S เป็นเซตเปิดเชื่อมโยงได้ใน R^2 จะได้ว่า S เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง ก็ต่อเมื่อ มีเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน S ที่บริเวณภายในเส้นโค้งปิดนั้นไม่เป็นเซตย่อยของ S

ทฤษฎีบทของกรีนสำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว

ให้ D เป็นเซตเปิดใน R^2 และ C เป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ และเป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใน D สำหรับ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน R จะได้ $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณซึ่งผลผนวกของ C และบริเวณภายใน C โดยที่ปริพันธ์ตามเส้นบน C กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

กำหนดให้ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบน S ซึ่งเป็นเซตปิดที่เชื่อมโยงเชิงเดียวใน R^2 จะได้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์ ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ บน S

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใน R^2 ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา R เป็นบริเวณใน C ด้วย จะได้

1. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\oint_C (-y)dx$
2. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\oint_C xdy$
3. พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}\oint_C (-y)\,dx + xdy$

ให้ C_1, C_2 เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวและเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ และ $C_1 \cap C_2 = \phi$ และบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C_2 เป็นเซตย่อยของบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C_1 ซึ่ง R เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ภายใน C_2 ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R ($R \subseteq S$) จะได้ว่า

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} Pdx + Qdy - \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R เป็นบริเวณซึ่งครอบคลุม บริเวณภายในของ C_1 และ บริเวณภายในของ C_2 ฟังก์ชัน P และ Q มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตปิด S ซึ่งครอบคลุม R ยกเว้นที่จุด A ถ้า $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ แล้ว $\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นเส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ P,Q เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ค่าของ $\oint_C Pdx+Qdy$ มีได้เพียง 2 ค่าเท่านั้นคือ 0 หรือ ค่าคงตัว k เมื่อ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครบคลุม R ยกเว้นที่จุด A

ทฤษฎีบทของกรีนสำหรับบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง

กำหนดให้ $C_1,C_2,C_3,...,C_n$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและมีสมบัติดังนี้

1. $C_i \cap C_j=\phi$ ถ้า $i\neq j$
2. C_i อยู่ในบริเวณภายใน C_1 ทุก $i=2,3,...,n$
3. C_i อยู่ในบริเวณภายนอกของ C_j ทุก $i>1, j>1$ ถ้า $i\neq j$

ให้ R เป็นบริเวณซึ่งประกอบด้วย C_1 และบริเวณภายในของ C_1 ซึ่งไม่อยู่ใน $C_2,C_3,...,C_n$ ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งครอบคลุม R จะได้ $\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\oint_{C_1} Pdx+Qdy-\sum_{k=2}^{n}\oint_{C_k} Pdx+Qdy$

สมการเวกเตอร์ของผิว

ให้ฟังก์ชัน $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 โดย

$\vec{r}(u,v)=X(u,v)\vec{i}+Y(u,v)\vec{j}+Z(u,v)\vec{k}$ เรียกสมการเวกเตอร์ของพื้นผิว และมีสมการอิงตัวแปรเสริมคือ $x=X(u,v),\ y=Y(u,v),\ z=Z(u,v)$ เมื่อ (u,v) เป็นสมาชิกของ T

กราฟ $\vec{r}$ ในปริภูมิสามมิติ เรียกพื้นผิวของสมการเวกเตอร์ $\vec{r}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\vec{r}(T)$

การหาพื้นที่ของผิวโค้ง

พื้นผิว S ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 ถ้า $\vec{r}(u,v)$ เป็นจุดปกติทุก (u,v) ใน T แล้วพื้นผิว S เป็นพื้นผิวเรียบ ถ้า พื้นผิว S ไม่เป็นพื้นผิวเรียบแต่ S ประกอบด้วยพื้นผิวเรียบแล้ว พื้นผิว S เป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วนๆ

ฟังก์ชัน $\vec{r}(u,v):T\to R^2$ เมื่อ T เป็นเซตย่อยของ R^2 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประชิดเป็นเวกเตอร์ $(\Delta u)\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u_0,v_0)$ และ $(\Delta v)\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u_0,v_0)$ คือ $\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u_0,v_0)\right|(\Delta u)(\Delta v)$

สำหรับพื้นผิวเรียบ S กำหนดโดย $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ $T=[a,b]\times[c,d]$ เป็นเซตย่อยของระนาบ UV พื้นที่ผิวของ $S=\iint_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|dudv$ เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$

สำหรับพื้นผิวเรียบ S กำหนดโดย $\vec{r}:T\to R^3$ เมื่อ T เป็นเซตที่มีขอบเขตซึ่งเป็นเซตย่อยของระนาบ UV พื้นที่ผิวของ $S=\iint_T\left|\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\right|dudv$ เมื่อ $\vec{n}_{\vec{r}}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$

ปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ให้ S เป็นพื้นผิวสองหน้า ซึ่งกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{r}(T)$ และ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ที่นิยามบนพื้นผิว S และ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน S เรียก $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ ว่าปริพันธ์ตามผิวของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\vec{F}$ บน S เมื่อ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว S

ทฤษฎีบทของสโตกส์

กำหนดให้ T เป็นอาณาบริเวณแบบเชื่อมโยงเชิงเดียวในระนาบ UV และ Γ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเรียบเป็นช่วง ๆ และล้อมรอบบริเวณ T มีเซตเปิด D ซึ่ง $T\cup\Gamma\subseteq D$ ให้ $\vec{r}:D\to R^3$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองต่อเนื่องและ $\vec{n}_{\vec{r}}(u,v)\neq 0$ บน T ถ้า S คือพื้นผิว $\vec{r}(T)$ และ C คือ เส้นโค้ง $\vec{r}(\Gamma)$ สำหรับ P,Q และ R เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องบน S จะได้ว่า

$$\oint\limits_C (Pdx+Qdy+Rdz)=\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right]$$

โดยที่การปริพันธ์บน C กระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาของ Γ ภายใต้การส่งค่าของ $\vec{r}$

ถ้า $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ และ $\vec{N}_{\vec{r}}=\dfrac{\vec{n}_{\vec{r}}}{|\vec{n}_{\vec{r}}|}$ สามารถเขียนสมการ (1) ได้อีกรูปแบบคือ $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\iint\limits_S Curl\vec{F}\cdot\vec{N}_{\vec{r}}dS$ เมื่อ $\vec{\alpha}(t)=\vec{r}\left(\vec{\beta}(t)\right)$ โดยที่ $\vec{\beta}$ นิยาม Γ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะได้ ถ้า S เป็นพื้นผิวในระนาบ XY และเวกเตอร์ $\vec{N}_{\vec{r}}=\vec{k}$

แล้ว $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{\alpha}=\iint\limits_S\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนส์

กำหนดให้ S เป็นพื้นผิวเรียบเป็นส่วยๆ ซึ่งปิดล้อมรูปทรงสามมิติ T และ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหน่วยของพื้นผิว S ซึ่งมีทิศทางพุ่งออกจาก T ให้

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งมีความต่อเนื่องและอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องที่จุด $(x,y,z)\in T$ จะได้ $\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS=\iiint\limits_T div\vec{F}dxdydz$ หรือ

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

แบบฝึกหัด 5

1. จงหาค่าปริพันธ์ตามเส้นต่อไปนี้

   1.1 $\int_C y^2dx + xdy$ ตามเส้นโค้ง $C: y^2 = 4x$ จากจุด $(0,0)$ ถึง $(1,2)$

   1.2 $\int_C x + 2ydS$ ตามเส้นโค้ง $C: \vec{r}(t) = (1+12t)\vec{i} + (2+5t)\vec{j}$ บนช่วง $[0,2]$

   1.3 $\int_C x^2 + ydS$ ตามเส้นโค้ง C เป็นสวนของวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$ และรัศมี 2 ในจตุภาคที่หนึ่งจากจุด $(0,2)$ ถึง $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

   1.4 $\int_C x + 2y + 3zdS$ ตามเส้นโค้ง $C: \vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j}$ บนช่วง $[0,1]$

   1.5 $\int_C xy + yz + zxdS$ ตามเส้นโค้ง $C: \vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t\vec{j} + (2-2t)\vec{k}$ บนช่วง $[0,1]$

   1.6 $\int_C 2xdS$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วย $C_1: \vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ บนช่วง $[0,1]$ และ $C_2: \vec{r}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$ บนช่วง $[1,2]$

   1.7 $\int_{C_1+C_2} 2x - \sqrt{y} + 3z^2dS$ ตามเส้นโค้ง $C_1: \vec{r}_1(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$ บนช่วง $[0,1]$ และ C_2 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(1,1,0)$ ไปยัง $(1,1,1)$

   1.8 $\int_{C_1+C_2+C_3} x^2 + y^2 + z^2dS$ ตามเส้นโค้ง $C_1: \vec{r}_1(t) = t\vec{k}$ บนช่วง $[0,1]$ และ C_2 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(1,1,0)$ ไปยัง $(1,1,1)$ และ C_3 เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุด $(0,1,1)$ ไปยัง $(1,1,1)$

2. จงหาปริพันธ์ตามเส้น $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ เมื่อกำหนด $\vec{F}$ และ $\vec{r}$ ต่อไปนี้

   2.1 $\vec{F}(x,y) = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$ เมื่อ $C: \vec{r}(t) = t\vec{i} + 5t\vec{j}$ เมื่อ $0 \le t \le 1$

   2.2 $\vec{F}(x,y) = 5xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ เมื่อ $C: \vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ เมื่อ $0 \le t \le 2$

   2.3 $\vec{F}(x,y) = 15xy^2\vec{i} + (6x+y)\vec{j}$

   เมื่อ C เป็นเส้นโค้งพาราโบลา $(y-1)^2 = x$ จากจุด $(0,1)$ ไปยังจุด $(1,2)$ เมื่อ $0 \le t \le 2$

   2.4 $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

   เมื่อ $C: \vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

   2.5 $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + z\vec{k}$

   เมื่อ $C: \vec{r}(t) = 4\cos t\vec{i} + 4\sin t\vec{j} + 3t\vec{k}$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

3. จงหางานของการเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง C ด้วยแรง $\vec{F}$ ต่อไปนี้

3.1 $\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$

เมื่อ C เป็นส่วนของเส้นตรงจากจุดเริ่มต้น $(0,1,1)$ และจุดสิ้นสุด $(8,11,13)$

3.2 $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z\vec{k}$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $y=4x^2, z=x$

3.3 $\vec{F}(x,y,z)=(-x+y+z)\vec{i}+(x-y+z)\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้งวงรี $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1, z=1$ จากจุด $(4,0,1)$ ไปยังจุด $(0,3,1)$ ในจตุภาคที่หนึ่ง

3.4 $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+x\vec{j}+2z\vec{k}$

เมื่อ $C:\vec{r}(t)=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+\vec{k}$ ในช่วง $0\le t\le 2\pi$

3.5 $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+x\vec{j}+2z\vec{k}$

เมื่อ $C:\vec{r}(t)=a\cos t\vec{i}+b\sin t\vec{j}+\vec{k}$ ในช่วง $0\le t\le 2\pi$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริง

4. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $\vec{F}$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเกรเดียนต์หรือไม่

4.1 $\vec{F}(x,y)=(2x+2y)\vec{i}+(3y^2+2x)\vec{j}$

4.2 $\vec{F}(x,y)=[xy\cos(xy)+\sin(xy)]\vec{i}+x^2\cos(xy)\vec{j}$

4.3 $\vec{F}(x,y,z)=(y+xyz)\vec{i}+(x+y+z)\vec{j}+x^2y\vec{k}$

4.4 $\vec{F}(x,y,z)=(2xz+y^3)\vec{i}+(3xy^2+2yz^2)\vec{j}+(x^2+2y^2z)\vec{k}$

4.5 $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(y^2+2xz)\vec{k}$

5. จงหาฟังก์ชันศักย์ของฟังก์ชันเกรเดียนต์ $\vec{F}$ ต่อไปนี้

5.1 $\vec{F}(x,y)=(1+xy^2)e^{xy^2}\vec{i}+(2x^2ye^{xy^2})\vec{j}$

5.2 $\vec{F}(x,y)=2\cos(2x+3y)\vec{i}+3\cos(2x+3y)\vec{j}$

5.3 $\vec{F}(x,y,z)=(2xy^3z^4+2y)\vec{i}+(3x^2y^2z^4+2x+3z)\vec{j}+(4x^2y^3z^3+3y)\vec{k}$

5.4 $\vec{F}(x,y,z)=(2x+yz)\vec{i}+(2y+xz)\vec{j}+xy\vec{k}$

5.5 $\vec{F}(x,y,z)=(2x+4y+5z)\vec{i}+(4x+2y+6z)\vec{j}+(5x+6y+2z)\vec{k}$

6. จงแสดงว่าปริพันธ์ตามเส้นที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเป็นอิสระจากวิถี และหาค่าปริพันธ์

6.1 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)} [\cos x-\sin(x+y)]dx-\sin(x+y)dy$

6.2 $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(2,4,3)} (2x+4yz)dx+4xzdy+4xydz$

6.3 $\displaystyle\int_{(0,1,4)}^{(4,0,8)} \sin y dx + x\cos y dy + dz$

6.4 $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(4,2,3)} \left(2x + z^2\right)dx + 3y^2z^2dy + \left(2zy^3 + 2xz\right)dz$

6.5 $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(1,4,2)} 3yzdx + 3xzdy + 3xydz$

7. จงหาค่าปริพันธ์ตามเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

7.1 $\displaystyle\int_C (2x-4)dx + (2y+3)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้ง $xy = 4$ จากจุด $(4,1)$ ไปยังจุด $(2,2)$

7.2 $\displaystyle\oint_C \left(x^2+4\right)dx + \left(y^2-4\right)dy$ เมื่อ C เป็นวงรี $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

7.3 $\displaystyle\int_C \left(2xz + y^2\right)dx + \left(2xy + z^2\right)dy + \left(2yz + x^2\right)dz$

เมื่อ $C:\vec{r}(t) = (1+t)\vec{i} + t^2\vec{j} + \left(2+t^2\right)\vec{k}$ จากจุด $(1,0,2)$ ไปจุด $(3,4,6)$

7.4 $\displaystyle\int_C 2ydx + (2x+6yz)dy + 3y^2dz$ เมื่อ C เป็นรอยตัดของระนาบ $x + 2y = 6$ และ $x + z = 3$ จากจุด $(0,3,3)$ ไปจุด $(4,1,-1)$

7.5 $\displaystyle\int_C \left[y\cos(x\pi) - xy\pi\sin(x\pi)\right]dx + x\cos(x\pi)dy$ เมื่อ C เป็นรอยตัดของ $x = y^2 - 2, z = 4$ จากจุด $(-2,0,4)$ ไปจุด $(2,2,4)$

8. จงใช้ทฤษฎีบทของกรีนคำนวณค่าปริพันธ์ตามเส้นโค้งที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

8.1 $\displaystyle\oint_C \left(y^2 + x^4\right)dx + \left(x^2 + y^4\right)dy$

เมื่อ C เป็นครึ่งวงกลม $x^2 + y^2 = 9$ และ $y \ge 0$

8.2 $\displaystyle\oint_C (\sin x + xy)dx + \left(e^y + x + x^2\right)dy$

เมื่อ C เป็นสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดต่อไปนี้เป็นจุดยอด $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$

8.3 $\displaystyle\oint_C \left(e^x + y^2 + 3y\right)dx + \left(\ln y + x^3 + 2x\right)dy$

เมื่อ C เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดต่อไปนี้เป็นจุดยอด $(0,-4),(4,0),(0,4)$

8.3 $\displaystyle\oint_C \left(4x^2\right)dx + \left(x^2 + 2y^2\right)dy$

เมื่อ C เป็นวงกลม $(x-2)^2 + y^2 = 4$

8.5 $\oint_C \left(xy^3+e^x\right)dx+\left(x^2+2y\right)dy$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิด ที่ประกอบด้วย $x^2-y^2=1$ และเส้นตรง $x=2$

9. จงหาพื้นที่ผิวโค้งที่เกิดจากการตัดกันระหว่างพาราโบลอยด์ $x^2+y^2-z=0$ และระนาบ $z=2$

10. จงหาพื้นที่ผิวโค้ง $x^2-2y-2z=0$ ที่อยู่เหนือสามเหลี่ยมที่ล้อมด้วยเส้นตรง $x=2, y=0$ และ $y=3x$ ในระนาบ XY

11. จงหาพื้นที่ผิวโค้ง $x^2-2\ln x+\sqrt{15}y-z=0$ ที่อยู่เหนือบริเวณสี่เหลี่ยม $1\le x\le 2$ และ $0\le y\le 1$ ในระนาบ XY

12. จงหาพื้นที่ผิวส่วนหนึ่งของกรวยกลม $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ซึ่งอยู่เหนือบริเวณระหว่างวงกลม $x^2+y^2=1$ และวงรี $9x^2+4y^2=36$ ในระนาบ XY

13. จงหาพื้นที่ผิวโค้ง ในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งตัดจากทรงกระบอก $y=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ โดยระนาบ $x=1$ และ $y=\frac{16}{3}$

14. จงหาค่าปริพันธ์ตามผิว $\iint_S fdS$ เมื่อกำหนด f และ S ต่อไปนี้

14.1 $f\left(x,y\right)=x^2+y^2$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ และด้านล่างด้วยระนาบ $z=0$

14.2 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=x+1$ และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=1$

14.3 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=4-x^2-y^2$ เมื่อ $0\le x^2+y^2\le 4$

14.4 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=x+y$ เมื่อ $0\le x\le 1$ และ $0\le y\le 1$

14.5 $f\left(x,y,z\right)=xy$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=\sqrt{4-x^2}$ เมื่อ $0\le x\le 2$ และ $0\le y\le 1$

15. จงหาค่าปริพันธ์ตามผิว $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ เมื่อกำหนด $\vec{F}$ และ S ต่อไปนี้

15.1 $\vec{F}\left(x,y,z\right)=x\vec{i}+2y\vec{j}-3z\vec{k}$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $15x-12y+3z=6$ ซึ่งอยู่เหนือบริเวณสี่เหลี่ยม $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

15.2 $\vec{F}\left(x,y,z\right)=x\vec{i}+y\vec{j}$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ และอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=1$

15.3 $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z = y+1$ ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$

15.4 $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z = 1 - x^2 - y^2$ และ $z \geq 0$

15.5 $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

เมื่อ S เป็นพื้นผิวกำหนดโดย $z = 8x - 4y - 5$ เหนือบริเวณสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด $(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0)$

15.จงใช้ผลของทฤษฎีบทของสโตกส์คำนวณค่า $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$

15.1 $\vec{F} = z\vec{i} + 2x\vec{j} + 3y\vec{k}$ เหนือครึ่งวงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$

15.2 $\vec{F} = (x+2z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$ เหนือสามเหลี่ยมที่ล้อมด้วยระนาบ $x + 2y + z = 3$ และแกนพิกัดทั้งสาม

15.3 $\vec{F} = 2y\vec{i} - 6z\vec{j} + 3x\vec{k}$ เหนือพาราโบลอยด์ $z = 4 - x^2 - y^2$ และเหนือระนาบ XY ด้วยเวกเตอร์ตั้งฉากที่พุ่งออก

15.4 $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ เหนือผิวโค้งที่เป็นส่วนหนึ่งของระนาบ $x + y + z = 1$ ในจตุภาคที่ 1

15.5 $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ เหนือผิวโค้งครึ่งทรงกลม $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

16. จงใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจนส์คำนวณค่า $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ เมื่อ $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากที่ชี้ออกนอกผิวโค้ง

16.1 $\vec{F} = 4x\vec{i} - 3y\vec{j} + 7z\vec{k};$ S :เป็นผิวโค้งของรูปทรงลูกบาศก์ที่ล้อมด้วยระนาบพิกัดทั้งสามและระนาบ $x = 1, y = 1$ และ $z = 1$

16.2 $\vec{F} = (x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k};$ S :เป็นผิวโค้งของกระบอกที่ล้อมด้วย $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ และ $z = 1$

16.3 $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k};$ S :เป็นผิวโค้งของกระบอกที่ล้อมด้วย $x^2 + y^2 = 4^2, z = 0$ และ $z = 3$

16.4 $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + xy\vec{j} - (2xz + y)\vec{k};$ S :เป็นผิวโค้งรูปทรงห้าเหลี่ยมในจตุภาคที่ 1 ที่ล้อมด้วยระนาบ $x + y + z = 1$ และระนาบพิกัดทั้งสาม

16.5 $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k};$ S :เป็นเส้นโค้งของกรวยกลม $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $z = 1$

เอกสารอ้างอิง

จินดา อาจริยะกุล, ผู้แปล. (2539). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2547). **แคลคูลัส 3.** กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สมพงษ์ ใจดี. (2522). **เวกเตอร์และโคออร์ดิเนท.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Baipai, M. W. (1990). **Engineering Mathematics.** (2^{nd} ed). U.S.A: John Wiley.

Cumpbell, H. G. (1968). **Matrices with Application.** New York: Meredith.

Ferdinand, P. B. (2004). **Vector mechanics for engineers: dynamics.** New York : McGraw-Hill.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2^{nd} ed). U.S.A: Addison Wesley.

Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3^{rd} ed). New York: Harper & Row Publishers.

Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.

Spiegel, M. R. (1981). **Vector Analysis.** Singapore: McGraw–Hill International Book Company.

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

บรรณานุกรม

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2543). **พีชคณิตเชิงเส้นและเทคนิคการใช้ Graphing Calculator.** กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

กอบกุล สังขะมัลลิก. (2552). **พีชคณิตเชิงเส้น.** ปทุมธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์.

จินดา อาจริยะกุล, ผู้แปล. (2539). **ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์ การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนล เอ็นเตอร์ไพร์ส.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2555). **สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II Calculus III Differential Equations.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทศพร คล้ายอุดม. (2437). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

นิตย์ รื่นรมย์. (2541). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วรางคณา ร่องมะรุด. (2535). **การวิเคราะห์เวกเตอร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิรัตน์ ชาญศิริรัตนา. (2547). **แคลคูลัส 3.** กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์.** กรุงเทพฯ: วงตะวัน.

สมใจ จิตพิทักษ์. (2522). **เวกเตอร์วิเคราะห์.** สงขลา: โครงการบริการวิชาการ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สมพงษ์ ใจดี. (2522). **เวกเตอร์และโคออร์ดิเนท.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สมัย เหล่าวานิชย์. (2537). **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 3.** กรุงเทพฯ: ไทเนรมิตกิจ อินเตอร์ โปรเกรสซิฟ.

อนัญญ อภิชาตบุตร. (2549). **แคลคูลัส 2.** กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อรุณี เจริญราช. (2546). **แคลคูลัส 3.** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วิทยพัฒน์.

อำพล ธรรมเจริญ. (2551). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 3.** กรุงเทพฯ: พิทักษ์การพิมพ์

Bahder,T. B. (1995). **Mathematica for Scientists and Engineers.** U.S.A: Addison Wesley.

Baipai, M. W. (1990). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: John Wiley.

Cumpbell, H. G. (1968). **Matrices with Application.** New York: Meredith.

Ferdinand, P. B. (2004). **Vector mechanics for engineers: dynamics.** New York : McGraw-Hill.

Hsu, H. P. (1969). **Vector Analysis.** New York: Simon and Schuster.

ตัวอย่าง

James, G. (1996). **Engineering Mathematics.** (2nd ed). U.S.A: Addison Wesley.
Leithold, L. (1976). **The Calculus with Analytic Geometry.** (3nd ed). New York: Harper & Row Publishers.
Ostebee, A. and Zorn, P. (1997). **Calculus.** New York: Saunders College Publishing.
Spiegel, M. R. (1981). **Vector Analysis.** Singapore: McGraw–Hill International Book Company.

ตัวอย่าง