ระบบจำนวน

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

2560

ระบบจำนวน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์คชินทร์ โกกนุทาภรณ์
วท.ม. (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
2560

คำนำ

ตำราวิชา ระบบจำนวน เล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาตามหลักสูตรทั้งหมด 6 บท ได้แก่ บทที่ 1 ทบทวน บทที่ 2 จำนวนธรรมชาติ บทที่ 3 จำนวนเต็ม บทที่ 4 จำนวนตรรกยะ บทที่ 5 จำนวนจริง และ บทที่ 6 จำนวนเชิงซ้อน

ในการเรียบเรียงตำราเล่มนี้ ผู้เรียบเรียงมีวัตถุประสงค์เพื่อให้เป็นตำราสำหรับนักศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์ และนักศึกษาทั่วไปที่สนใจ ซึ่งการอธิบายเนื้อหา การพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ใช้ภาษาที่เข้าใจได้ง่าย เป็นไปในแนวทางที่ช่วยให้นักศึกษาสามารถศึกษาด้วยตนเองได้ สัญลักษณ์ที่ใช้ใน ตำราเล่มนี้ได้นำมาจากพจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน ปี 2553

หากท่านที่นำตำราวิชาระบบจำนวนนี้ไปใช้ และมีข้อเสนอแนะผู้เขียนยินดีรับฟังและขอขอบคุณ ในความอนุเคราะห์นั้นมา ณ โอกาสนี้ด้วย

คชินทร์ โกกนุทาภรณ์
10 มกราคม 2560

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

บทที่ 1
บททวน

การนับจำนวนต่าง ๆ มีมาตั้งแต่สมัยโบราณ มนุษย์สามารถนับจำนวนต่าง ๆ โดยมีความคิดว่าเมื่อเพิ่มสิ่งใดสิ่งหนึ่ง ก็จะได้สิ่งนั้น“มากขึ้น” และถ้าเอาสิ่งนั้นออกไปจะทำให้สิ่งนั้น“ลดลง” ซึ่งต่อมามีการใช้นิ้วมือแทนสิ่งที่ต้องการนับ เช่น หนึ่งนิ้วแทนสัตว์หนึ่งตัวหรืออาจใช้สิ่งของแทนจำนวนสิ่งที่ต้องการนับ เช่น จำนวนก้อนหินในถุง เท่ากับจำนวนแกะ ที่เอาออกจากคอก และยังพบว่า ใช้การขีดเขียนบนพื้นดิน การสลักบนต้นไม้ แทนจำนวน เมื่อสังคมมีความเจริญขึ้น มีการ ใช้สัญลักษณ์แทนจำนวน ซึ่งพบว่าในสมัยโบราณยังไม่พบการใช้สัญลักษณ์ใดแทนจำนวน “ศูนย์”

1.1 ระบบการเขียนตัวเลขแทนจำนวน

ระบบการเขียนตัวเลขแทนจำนวนอาจแบ่งได้เป็น 4 ลักษณะดังนี้

1. ระบบการรวมพวกอย่างง่าย (simple grouping system) ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 แบบ

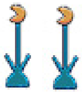
1.1 ตัวเลขอียิปต์โบราณ (egyptian hieroglyphics) เป็นตัวเลขที่ใช้ราว 3,400 ปีก่อน คริสตศักราช ซึ่งชาวอียิปต์ในลุ่มน้ำไนล์ ทำบันทึกลงบนหินและเขียนลงบนกระดาษชนิดหนึ่งที่เรียกว่า พาไพรัส สัญลักษณ์ที่ใช้เรียกว่า hieroglyphics ซึ่งใช้ฐานสิบ แต่ไม่มีค่าประจำตำแหน่งและไม่มีศูนย์ สัญลักษณ์ที่ใช้ ดังตารางที่1.1.1

ตารางที่ 1.1.1 ตัวเลขอียิปต์โบราณ

จำนวน	สัญลักษณ์	แทนด้วย
1		ขีดหรือเสา
10		เกือกม้า
100		เชือกขดเป็นวง
1,000		ดอกบัว
10,000		นิ้วชี้
100,000		กบ
1,000,000		เทพเจ้ายกมือ

ชาวอียิปต์เขียนจำนวน โดยนำสัญลักษณ์ต่าง ๆ มารวมกันโดยเขียนจำนวนน้อยไว้ด้านซ้ายดังตัวอย่าง

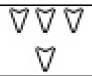
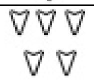
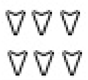
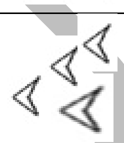
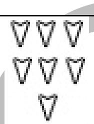
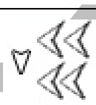
ตัวอย่าง 1.1.1

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
	$1+1$	2
	$10+10+10$	30
	$1,000+1,000$	$2,000$
	$200+20+5$	225
	$3,000+200+40+4$	$3,244$

1.2 ตัวเลขของซูเมอร์ และบาบิโลน (sumer and babylon) อักษรซูเมอร์และบาบิโลนเป็นอักษรที่จัดว่าเก่ามาก ใช้ในเมโสโปเตเมีย ตอนใต้ ตั้งแต่ราว 4,457 ปีก่อนพุทธศักราช พัฒนาจากการบันทึกบนดินเหนียวที่เริ่มมีมาตั้งแต่ 7,457 ปีก่อนพุทธศักราช มาเป็นอักษรรูปลิ่ม อักษรนี้เกิดจากแนวคิดของชาวซูเมอร์และบาบิโลน ในการเก็บรักษาแผ่นดินเหนียวที่ใช้นับผลผลิตทางเกษตรกรรมและอุตสาหกรรมไม่ให้สูญหาย และสามารถจดจำได้ว่า มีจำนวนเท่าใดและใช้นับอะไร โดยการกดรอยให้เป็นสัญลักษณ์ลงบนแผ่นดินเหนียวที่ใช้เก็บขณะยังเปียกอยู่ ต่อมาจึงเลิกใช้แผ่นดินเหนียว หันมาเขียนเครื่องหมายลงบนดินเหนียวที่ยังเปียกอยู่แทน รวมทั้งพัฒนาสัญลักษณ์ในการนับขึ้นใช้แทนการวาดภาพหรือเครื่องหมายซ้ำ ๆ กันหลายอัน การบันทึกแบบนี้พบในเมืองของชาว ซูเมอร์ เช่น อูรุก จัมคัต นาสร์ เมื่อราว 2,757 ปีก่อนพุทธศักราช การเขียนครั้งแรกเขียนจากบนลงล่าง ต่อมาเปลี่ยนเป็นจากซ้ายไปขวา (คาดว่าเมื่อราว 2,457 ปีก่อนพุทธศักราช) โดยหมุนรูปอักษรไป 90 องศาทวนเข็มนาฬิกา และรูปอักษรเริ่มเปลี่ยนจากเส้นตรงและเส้นโค้งเป็นรูปลิ่ม ต่อมา เมื่อ 2,257 ปีก่อนพุทธศักราช เริ่มมีการพัฒนาระบบการเขียนเพื่อใช้แทนหน่วยเสียง มีคำพ้องเสียงที่ใช้แทนคำที่ออกเสียงเหมือนกัน แต่มีความหมายต่างกันมาก ทั้งนี้เพราะในภาษาซูเมอร์มีคำที่เป็นคำโดดมาก ตัวอย่างเช่น อักษรที่ใช้แทนเสียง “ti” (ลูกศร) เหมือนกับที่ใช้แทนเสียง “til” (ชีวิต) เมื่อระบบการเขียนพัฒนามากขึ้น การจำแนกระหว่างอักษรที่ใช้แทนคำกับอักษรที่ใช้แทนพยางค์ทำได้ยากขึ้น มีการพัฒนาอักษรที่เป็นศัพท์กำหนด ใช้นำหน้าหรือตามหลังสัญลักษณ์ ที่แทนเสียงของคำเพื่อบอกความหมาย ระบบการนับในภาษาซูเมอร์และอักษรรูปลิ่มอื่น ๆ เป็นทั้งเลขฐาน 10 และเลขฐาน 60 โดยมีสัญลักษณ์เฉพาะของเลขแต่ละฐาน รวมทั้งการรวมกัน และการยกกำลังของตัวเลขเหล่านั้น เช่น เลข 9 ใช้สัญลักษณ์ของเลข 1 จำนวน 9 ตัว เลข 10 ใช้สัญลักษณ์ของ เลข 10 ตัวเดียว เลข 60 ใช้สัญลักษณ์ของเลข 60 และเลข 70 ใช้สัญลักษณ์ของเลข 60 กับเลข 10 เลขฐาน 60 ในปัจจุบันยังใช้เป็นหน่วยของเวลาและมุมในวงกลม ชาวเมโสโปเตเมียรุ่นหลัง ๆ ได้แก่ชาวบาบิโลเนีย ชาวอัสซีเรีย และชาวเปอร์เซีย ปรับปรุงระบบเลขของชาวซูเมอร์ มาเป็นระบบที่ขึ้นกับตำแหน่งแบบเดียวกับระบบที่ใช้อยู่ในปัจจุบัน ซึ่งลดจำนวนสัญลักษณ์ลงมาก ชาวแอกแคดได้พัฒนาอักษร ซู

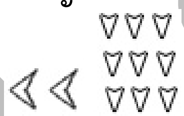
เมอร์มาใช้เขียนภาษาของตน ที่จริงแล้วภาษาซูเมอร์เลิกใช้พูดตั้งแต่ 1,257 ปีก่อนพุทธศักราช แต่ยังคงใช้เป็นภาษาเขียน เช่นเดียวกับการใช้ภาษาละตินในยุโรปยุคกลาง ทำให้มีการใช้ภาษาซูเมอร์ต่อมาจนถึงราว พ.ศ. 643 ดังตารางที่ 1.1.2

ตารางที่ 1.1.2 ตัวเลขบาบิโลเนีย

จำนวน	สัญลักษณ์	จำนวน	สัญลักษณ์
1 หรือ60		8 หรือ60^{8}	
2 หรือ60^{2}		9 หรือ60^{9}	
3 หรือ60^{3}		10 หรือ10×60	
4 หรือ60^{4}		20 หรือ10×60^{2}	
5 หรือ60^{5}		30 หรือ10×60^{3}	
6 หรือ60^{6}		40 หรือ10×60^{4}	
7 หรือ60^{7}		100 หรือ60^{100}	

ชาวบาบิโลนเป็นผู้เริ่มต้นแนวคิดเกี่ยวกับค่าประจำหลัก คือ ใช้สัญลักษณ์ตัวเดียวกับตัวแทนจำนวนที่ต่างกัน ทั้งนี้ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของตัวเลขนั้น

ตัวอย่าง 1.1.2

สัญลักษณ์	**ความหมาย**	**จำนวน**
	$20+9$ หรือ $\left(10\times60^{2}\right)+60^{9}$	29 หรือ 1.01×10^{16}
	$100+40+6$ หรือ $60^{100}+\left(10\times60^{4}\right)+60^{6}$	146 หรือ 6.53×10^{177}

1.3 ตัวเลขกรีกโบราณ (herodianic greek) เป็นตัวเลขที่เขียนแบบรวมพวกอย่างง่าย โดยใช้ระบบเลขฐาน ในสมัยต้น ๆ ชาวกรีกใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนดังตารางที่ 1.1.3

ตารางที่ 1.1.3 ตัวเลขกรีกโบราณ

จำนวน	สัญลักษณ์	จำนวน	สัญลักษณ์
1	Ι	10	Δ
2	ΙΙ	50	𐅄
3	ΙΙΙ	100	Η
4	ΙΙΙΙ	500	𐅅
5	𐅃	1,000	Χ
6	𐅃Ι	5,000	𐅆
7	𐅃ΙΙ	10,000	Μ
8	𐅃ΙΙΙ	50,000	𐅇
9	𐅃ΙΙΙΙ		

ตัวอย่าง 1.1.3

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
ΗΗΔ𐅃ΙΙ	$100+100+10+5+2$	217
ΧΗΔΔ𐅃ΙΙΙ	$1,000+100+10+10+5+3$	1,128
ΧΧΧ𐅅ΗΗΗ𐅃ΙΙ	$1,000+1,000+1,000+500+300+7$	3,807
𐅇𐅆𐅄𐅃	$50,000+5,000+500+50+5$	55,555

1.4 ตัวเลขของชาวโรมัน เป็นตัวเลขที่ยังพบอยู่ในปัจจุบัน สัญลักษณ์ที่ชาวโรมันประดิษฐ์ ดังตารางที่ 1.1.4

ตารางที่ 1.1.4 ตัวเลขโรมัน

จำนวน	สัญลักษณ์	จำนวน	สัญลักษณ์	จำนวน	สัญลักษณ์	จำนวน	สัญลักษณ์
1	I	6	VI	15	XV	90	XC
2	II	7	VII	20	XX	100	C
3	III	8	VIII	40	XL	500	D
4	IV	9	VIIII	50	L	900	CM
5	V	10	X	60	LX	1,000	M

ชาวโรมันนำสัญลักษณ์ มาเขียนเรียงกัน หลักการเขียนตัวที่มีค่าน้อยเขียนตามหลัง หมายความว่านำไปบวกกับตัวหน้า ตัวที่มีค่าน้อยเขียนข้างหน้าหมายความว่านำไปลบออกจากตัวที่ตามหลัง ตัวเลขที่มีค่าเท่ากันมาเขียนเรียงกัน หมายถึงเอาจำนวนนั้นมาบวกกัน ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 1.1.4

สัญลักษณ์	**ความหมาย**	**จำนวน**
IIV	5 – 2	3
VII	5 + 2	7
XIV	10 + (5 – 1)	14
LXIX	50+10+(10 – 1)	69
DXXX	500+10+10+10	530
DCCVII	500+100+100+7	707
MDCCC	1,000+500+100+100+100	1,800

2 ระบบการรวมพวกโดยการคูณ (multiplicative grouping system)

เป็นระบบที่เขียนโดยเลือกฐานก่อน เช่น ฐาน a จะได้เลขโดดเป็น $1,2,3,...,a-1$ จากนั้นจะมีสัญลักษณ์ที่แทน $a,a^2,a^3,...$ แล้วเขียนสัญลักษณ์เหล่านี้ผสมกันแบบคูณกัน ตัวอย่างของการเขียนตัวเลขนี้ ได้แก่ ตัวเลขจีน และญี่ปุ่น ซึ่งมี 10 ฐาน สัญลักษณ์ที่ใช้มี 12 ตัว ดังตารางที่ 1.1.5

ตารางที่ 1.1.5 ตัวเลขจีน

จำนวน	**สัญลักษณ์**	**จำนวน**	**สัญลักษณ์**	**จำนวน**	**สัญลักษณ์**
1	一	5	五	9	九
2	二	6	六	10	十
3	三	7	七	100	百
4	四	8	八	1,000	千

ตัวอย่าง 1.1.5

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
九	9	$9\times10=90$
十	10	
四	4	$4\times1=4$
	รวมเป็นจำนวน	94

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
五	5	5×1,000 = 5,000
千	1,000	
二	2	2×100 = 200
百	100	
	รวมเป็นจำนวน	5,200

1.3 ระบบไซเฟอร์ (cyphered numeral system)

เป็นระบบที่ใช้สัญลักษณ์เป็นจำนวนมากโดยเลือกฐานขึ้นมาก่อน เช่น ฐาน b โดยมีเลขโดด ได้ตัวเลข $1,2,3,...,b-1$ ได้สัญลักษณ์โดยแทนด้วย $b,2b,3b,...,(b-1)b,b^2,2b^2,3b^2,$ $4b^2,...,(b-1)b^2$ เช่น ตัวเลขแบบพราหมณ์ฮินดู แบบยิว ไอโอนิกกรีก เรียกตัวเลขในระบบนี้ว่า ตัวเลขแบบไอโอนิกกรีก ดังตารางที่ 1.1.6

ตารางที่ 1.1.6 ตัวเลขแบบไอโอนิกกรีก

จำนวน	สัญลักษณ์	คำอ่าน
1	A หรือ α	Alpha
2	B หรือ β	Beta
3	Γ หรือ γ	Gamma
4	Δ หรือ δ	Delta
5	E หรือ ε	Epsilon
6	ς	Obsolete digamma
7	Z หรือ ζ	Zeta
8	H หรือ η	Eta
9	θ หรือ ϑ	Theta
10	I หรือ ι	Iota
20	K หรือ κ	Kappa
30	Λ หรือ λ	Lambda
40	M หรือ μ	Mu

จำนวน	สัญลักษณ์	คำอ่าน
50	N หรือ ν	Nu
60	Ξ หรือ ξ	Xi
70	O หรือ o	Omcron
80	Π หรือ π	Pi
90	ς หรือ τ	Iota
100	P หรือ ρ	Rho
200	$\sum$ หรือ σ	Siggma
300	T หรือ τ	Tau
400	Υ หรือ υ	Upsilon
500	Φ หรือ ϕ หรือ φ	Psi
600	X หรือ χ	chi
700	Ψ หรือ ψ	Psi
800	Ω หรือ ω	Omega

ตัวอย่าง 1.1.6

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
$\iota\delta$	$10+4$	14
$\iota\zeta$	$10+7$	17
$\chi\mu\delta$	$600+40+4$	644
$\Omega\nu\varsigma$	$800+50+6$	856

1.4 ระบบตำแหน่ง (positional numeral system)

เป็นระบบที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ที่เรียกว่า ระบบฮินดูอารบิก(Hindu Arabic system) เป็นตัวเลขซึ่งอยู่ในระบบตำแหน่ง พบว่าแต่ละตัวมีค่าได้หลายค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่อยู่นั้น โดยทั่วไปจะเลือกฐานก่อน เช่น ฐาน b จะมีตัวเลขอยู่ b ตัว จากนั้นก็มีสัญลักษณ์แทนตัวเลข $0,1,2,...,b-1$ ส่วนจำนวนอื่น ๆ จะใช้สัญลักษณ์ b ตัวนี้ โดยเขียนในรูปผลบวกของกำลังของ b

$$N = a_n b_n + a_{n-1} b_{n-1} + ... + a_1 b_1 + a_0 \text{ โดยที่ } 0 \le a \le b_i \text{ ซึ่ง } i = 1,2,3,...,n$$

ระบบที่ใช้หลักการนี้คือ

1. แบบ summer และBabylon ซึ่งได้กล่าวมาข้างต้น ซึ่งเมื่อ ต้องการจะเขียนจำนวนที่มากกว่า 60 ใช้การเขียนในรูปแบบจำนวนที่อยู่ในรูปการคูณของจำนวนกับกำลังของ 60

2. แบบมายัน (mayan numeral system) ในสมัยก่อนที่โคลัมบัสพบซีกโลกตะวันตกนั้น ชนเผ่ามายันได้อาศัยอยู่ในอเมริกากลาง และแม็กซิโก เป็นชาติที่มีความเจริญรุ่งเรืองมาแล้ว ชาวมายันใช้ตัวเลขที่มีค่าประจำตำแหน่ง เป็นระบบเลขฐาน 20 และเป็นชาติแรกที่มีสัญลักษณ์แทนจำนวนศูนย์ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนของชาวมายัน มีดังนี้

การเขียนตัวเลขแทนจำนวนใหญ่ ๆ ของชาวมายันใช้วิธีการเดียวกันกับของจีน คือ เขียนในแนวตั้ง เรียงจากมากลงมาหาน้อย

เขียนตัวเลขหลักหน่วยไว้ตำแหน่งล่างสุด

เขียนตัวเลขหลักที่สองเหนือหลักหน่วย หลักที่สองมีค่าประจำตำแหน่งเป็น 20 เท่าของจำนวนในหลักนี้

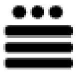
เขียนตัวเลขหลักที่สามเหนือหลักที่สอง หลักที่สามมีค่าประจำตำแหน่งเป็น 18 X 20 เท่าของจำนวนในหลักนี้

เขียนตัวเลขหลักที่สี่ ที่ห้า ที่หก,... เหนือหลักที่ต่ำกว่าไปตามลำดับ ค่าประจำตำแหน่งจะเป็น 18 X 20^2, 18 X 20^3, 18 X 20^4,... เท่าของจำนวน ในแต่ละหลักตามลำดับ สัญลักษณ์ 20 ตัว ดังตารางที่ 1.1.7

ตารางที่ 1.1.7 ตัวเลขมายัน

จำนวน	ตัวเลขมายัน	จำนวน	ตัวเลขมายัน	จำนวน	ตัวเลขมายัน	จำนวน	ตัวเลขมายัน
1	•	6	• ▬	11	• ▬ ▬	16	• ▬ ▬ ▬
2	••	7	•• ▬	12	•• ▬ ▬	17	•• ▬ ▬ ▬
3	•••	8	••• ▬	13	••• ▬ ▬	18	••• ▬ ▬ ▬
4	••••	9	•••• ▬	14	•••• ▬ ▬	19	•••• ▬ ▬ ▬
5	▬	10	▬ ▬	15	▬ ▬ ▬	0	

ตัวอย่าง 1.1.7

สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน	สัญลักษณ์	ความหมาย	จำนวน
	$7\times18\times20^2$	50,400		$9\times18\times20^2$	64,800
	$10\times18\times20$	3,600		$16\times18\times20$	5,760
	18×20	360		3×20	60
	7	7		17	17
	รวมเป็นจำนวน	54,356		รวมเป็นจำนวน	70,632

1.5 ระบบฮินดูอารบิก (hindu arabic system)

เลขระบบนี้เป็นตัวเลขที่ใช้แพร่หลายในปัจจุบัน สัญลักษณ์ที่ใช้ทั้งหมดมี 10 ตัว คือ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ใช้ระบบเลขฐานสิบ หรือเรียกอีกอย่างว่าเลขระบบทิศนิยมนำสัญลักษณ์ต่าง ๆ นี้มาเขียนในแนวราบและตำแหน่งของตัวเลขมีความสำคัญดังนี้

ตัวขวาสุดแทนหลักหน่วย มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^0
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือหนึ่งตำแหน่ง เรียกว่าหลักสิบ มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^1
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือสองตำแหน่ง เรียกว่าหลักร้อย มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^2
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือสามตำแหน่ง เรียกว่าหลักพัน มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^3
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือสี่ตำแหน่ง เรียกว่าหลักหมื่น มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^4
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือห้าตำแหน่ง เรียกว่าหลักแสน มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^5
ตำแหน่งถัดมาทางซ้ายมือหกตำแหน่ง เรียกว่าหลักล้าน มีค่าประจำตำแหน่งคือ 10^6
ต่อไปเรื่อย ๆ

ตัวอย่าง 1.1.8

สัญลักษณ์	แทนจำนวนที่มาจาก
$8,230$	$(8\times10^3)+(2\times10^2)+(3\times10^1)+(0\times10^0)$
$71,825$	$(7\times10^4)+(1\times10^3)+(8\times10^2)+(2\times10^1)+(5\times10^0)$
$234,529$	$(2\times10^5)+(3\times10^4)+(4\times10^3)+(5\times10^2)+(2\times10^1)+(9\times10^0)$
$1,623,862$	$(1\times10^6)+(6\times10^5)+(2\times10^4)+(3\times10^3)+(8\times10^2)+(6\times10^1)+(2\times10^0)$

1.2 โครงสร้างของคณิตศาสตร์

โครงสร้างของวิชาคณิตศาสตร์ มีส่วนประกอบสำคัญ 4 ประการ คือ

1. อนิยาม (undefined terms) หมายถึง คำที่ไม่ต้องให้ความหมายหรือ คำจำกัดความ แต่เมื่อกล่าวถึงต้องมีความเข้าใจตรงกัน เนื่องจากมีความหมายชัดเจนอยู่ในตัวเอง เป็นคำที่ทุกคนเข้าใจตรงกันว่าหมายถึงสิ่งใด โดยอาจจะใช้วิธีการยกตัวอย่างหรือใช้ความเข้าใจด้วยปฏิภาณ ตัวอย่างของ อนิยามในคณิตศาสตร์ เช่น จุด เส้นตรง เท่ากัน มากกว่า น้อยกว่า ค่าคงที่ เซต ระนาบ

2. นิยาม (definition or defined terms) หมายถึง คำหรือข้อความที่มีการให้ความหมายหรือคำจำกัดความไว้ชัดเจน โดยการนำอนิยามมาอธิบายหรือกำหนดคุณลักษณะของสิ่งเหล่านั้น เช่น มุมฉาก หมายถึง มุมที่มีขนาด 90 องศา หรือคำว่า “ เส้น ” ไปนิยามคำว่าเส้นตรง เส้นขนาน

3. สัจพจน์ (axioms) หรือกติกา (postulate) หรือข้อตกลงเบื้องต้น (assumption) หมายถึง ข้อความที่ตกลงหรือยอมรับว่าเป็นจริง โดยไม่ต้องพิสูจน์ มักจะแสดงความสัมพันธ์ของนิยามหรืออนิยาม ที่เป็นพื้นฐานมากจนไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ เช่น เส้นขนานย่อมไม่ตัดกันเลย

4. ทฤษฎีบท (theorems) หมายถึง ผลสรุปที่ได้จากข้อมูลชุดหนึ่ง สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ทุกกรณี การพิสูจน์ทฤษฎีจะใช้วิธีการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ โดยการนำเอานิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์แล้วไปสนับสนุนให้เป็นเหตุเป็นผล เพื่อแสดงว่าทฤษฎีเป็นจริง ความเป็นจริงในทุกกรณีของทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสมเหตุสมผล ไม่ได้หมายถึงข้อเท็จจริง แต่ความสมเหตุ สมผล อาจจะตรงกับข้อเท็จจริงทุกกรณีก็ได้ ขึ้นอยู่กับกติกาที่ใช้เป็นฐานของทฤษฎีนั้น ถ้ากติกาตรงกับข้อเท็จจริง ทฤษฎีที่พิสูจน์โดยใช้กติกานั้นอ้างอิงเป็นเหตุเป็นผลย่อมเป็นจริง ตรงกับข้อเท็จจริงด้วย เช่น เส้นตรง สองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

1.3 โครงสร้างของระบบจำนวน

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ การศึกษาระบบจำนวนเป็นสิ่งที่สำคัญ เพราะระบบจำนวนจะเป็นการศึกษาถึงสัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนต่าง ๆ ตลอดจนการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวก ลบ คูณ และหาร จำนวนต่าง ๆ ซึ่งกระบวนการนี้ เรียกว่า การดำเนินการทางพีชคณิตของระบบจำนวนและยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนในวิชาคอมพิวเตอร์ในการเขียนอัลกอริทึมอีกด้วย ก่อนที่จะศึกษาระบบจำนวนจึงต้องมาทำความเข้าใจถึงสัญลักษณ์ที่ใช้ก่อนดังต่อไปนี้

จำนวนธรรมชาติ (natural number) หรือจำนวนนับ หรือจำนวนเต็มบวก (positive integers) คือ จำนวนที่ประกอบด้วยสมาชิก 1,2,3,... ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย N (จำนวนธรรมชาติ) หรือ Z^+(จำนวนเต็มบวก) สามารถเขียนเซตจำนวนนับได้ดังนี้ $N = \{1,2,3,\ldots\}$

จำนวนเต็มศูนย์ (zero integer) หรือจำนวนศูนย์ คือ จำนวนที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียว คือ 0 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Z^0 สามารถเขียนเซตจำนวนศูนย์ได้ดังนี้ $Z^0 = \{0\}$

จำนวนเต็มลบ (negative integers) คือ จำนวนที่มีสมาชิก คือ $-1,-2,-3,\ldots$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Z^- สามารถเขียนเซตจำนวนเต็มลบได้ดังนี้ $Z^- = \{-1,-2,-3,\ldots\}$

จำนวนเต็ม (integers) คือ จำนวนที่รวมจำนวนจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มศูนย์ และจำนวนเต็มลบ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Z สามารถเขียนเซตจำนวนเต็มได้ดังนี้

$$Z = Z^{-} \cup Z^{0} \cup Z^{+}$$
$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

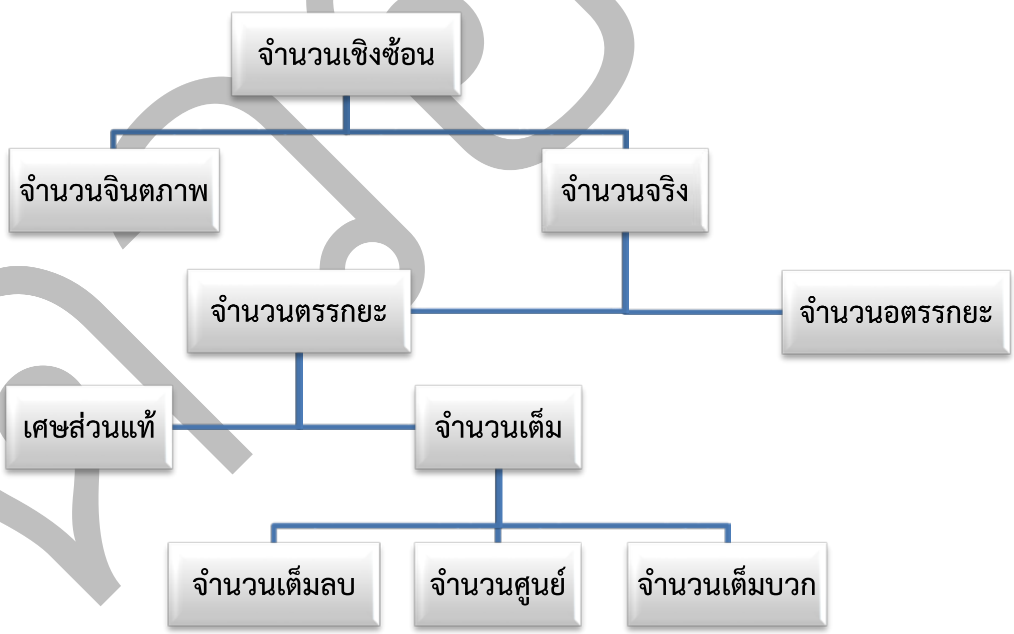
จำนวนตรรกยะ (rational number) คือ จำนวนที่สมาชิกสามารถเขียนในรูปเศษส่วน $\frac{p}{q}$ โดยที่ p และ q เป็นสมาชิกของจำนวนเต็ม และ q ไม่เท่ากับศูนย์ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Q สามารถเขียนเซตจำนวนตรรกยะได้ดังนี้

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q} \text{ ซึ่ง } p \text{ และ } q \text{ เป็นจำนวนเต็มโดยที่ } q \neq 0 \right\}$$

จำนวนอตรรกยะ (Irrational number) คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะหรือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ เช่น $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e$ เป็นต้น ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Q'

จำนวนจริง (real number) คือ จำนวนที่รวมจำนวนตรรกยะกับจำนวนอตรรกยะ ใช้สัญลักษณ์ แทนด้วย R จึงได้ว่า $R = Q \cup Q'$

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) คือ จำนวนที่รวมจำนวนจริงกับเซตของจำนวนจินตภาพ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย C ซึ่งเขียนสมาชิกของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $i=\sqrt{-1}$



ภาพที่ 1.3.1 โครงสร้างระบบจำนวน

1.4 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ ที่มีความสำคัญใช้ประกอบการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ซึ่งมีเนื้อหาดังนี้

นิยาม 1.4.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ คือ ข้อความที่ว่า

ถ้า S เป็นเซตย่อยของจำนวนธรรมชาติ ที่มีสมบัติดังนี้

1. $1 \in S$ และ
2. ถ้า $n \in S$ แล้ว $n+1 \in S$

แล้วจะสรุปได้ว่า S เป็นเซตจำนวนธรรมชาติ

จากหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าต้องการพิสูจน์ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณ “สำหรับทุก” “for all” หรือ“ $\forall$ ” ที่อยู่ในรูป $\forall n \in N\left[P(n)\right]$ เป็นจริง ต้องใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ 1 (1^{st} principle of mathematical induction)

สำหรับจำนวนนับ n ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับ n

ถ้า 1. $P(1)$ เป็นจริง

และ 2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

แล้ว $P(n)$ เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

พิสูจน์ ให้ $S = \{n \in N \mid P(n) \text{ เป็นจริง } \}$

1. กำหนดให้ $P(1)$ เป็นจริง ดังนั้น $1 \in S$
2. กำหนดให้ข้อ 2 ถ้า $P(n)$ เป็นจริง แล้ว $P(n+1)$ เป็นจริง

จึงได้ว่า ถ้า $n \in S$ แล้ว $n+1 \in S$ ด้วย

ดังนั้น โดยข้อความของหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า S คือ เซตของจำนวนธรรมชาติ ซึ่งแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n

ตัวอย่าง 1.4.1 จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$ สำหรับ $\forall n \in N$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$

1. พิจารณา $P(1)$ แทนค่า $n=1$ จะได้

$$2(1)-1=(1)^2$$

$$1=1$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $1+3+5+7+...+(2k-1)=k^2$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $1+3+5+7+...+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$

พิจารณา $1+3+5+7+...+(2k-1)+[2(k+1)-1]=k^2+[2(k+1)-1]$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงพิสูจน์ว่า $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ สำหรับ $\forall n \in N$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. พิจารณา $P(1)$ แทนค่า $n=1$ จะได้

$$(1)^2=\frac{(1)[(1)+1][2(1)+1]}{6}$$

$$1=1$$

แสดงว่า $P(1)$เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $1^2+2^2+3^2+...+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$

พิจารณา$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$$=(k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6}+(k+1)\right]$$

$$=(k+1)\left[\frac{(k+2)(2k+3)}{6}\right]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ตัวอย่าง 1.4.3 จงพิสูจน์ $n^3 - n$ หารด้วย 3 ลงตัว สำหรับ $\forall n \in N$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^3 - n$ หารด้วย 3 ลงตัว

1. พิจารณา $P(1)$ แทนค่า $n = 1$ จะได้

$1^3 - 1 = 0$ ซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $k^3 - k$ หารด้วย 3 ลงตัว

จะแสดงว่า $P(k+1)$เป็นจริง กล่าวคือ ต้องแสดงว่า $(k+1)^3 - (k+1)$ หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจาก $k^3 - k$ หารด้วย 3 ลงตัว

ดังนั้น ให้ $k^3 - k = 3a$ เมื่อ a เป็นจำนวนธรรมชาติ

เพราะว่า
$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1) \\ &= k^3 + 3k^2 + 2k \\ &= k^3 - k + 3k^2 + 3k \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= 3a + 3(k^2 + k) \\ &= 3(a + k^2 + k)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $a + k^2 + k$ เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $(k+1)^3 - (k+1)$ หารด้วย 3 ลงตัว

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $n^3 - n$ หารด้วย 3 ลงตัว

ตัวอย่าง 1.4.4 จงพิสูจน์ว่า $3^n \geq 1 + 2n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ n

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3^4 \geq 1 + 2n$

1. พิจารณา $P(1)$ แทนค่า $n = 1$ จะได้ว่า

$3^1 \geq 1 + 2(1)$

$3 \geq 3$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $3^k \geq 1 + 2k$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง กล่าวคือ จะพิสูจน์ว่า $3^{k+1} \geq 1 + 2(k+1)$

เนื่องจาก $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq 3(1 + 2k) = 3 + 6k \geq 3 + 2k = 1 + 2(k+1)$

จะได้ว่า $3^{k+1} \geq 1 + 2(k+1)$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $3^n \geq 1 + 2n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ n

ทฤษฎีบท 1.4.2 ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็ม n เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $P(a)$ เป็นจริง และ
2. สำหรับจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k \geq a$
   ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ที่ $n \geq a$

พิสูจน์ เนื่องจาก $n \geq a$ ดังนั้น $n = a, a+1, a+2, a+3, \ldots$

ถ้าให้ $m = n - a + 1$ จะได้ $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$

และจะได้ $P(n)$ ข้อความ $P(m+a-1)$

ในการพิสูจน์ว่าข้อความ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ที่ $n \geq a$

เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าข้อความ $P(m+a-1)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m

ให้ $Q(m)$ แทน $P(m+a-1)$

จะได้ว่า $Q(1)$ แทน $P(1+a-1)$ คือ $P(a)$

$Q(k)$ แทน $P(k+a-1)$

และ $Q(k+1)$ แทน $P(k+1+a-1)$

(1) $Q(1)$ เป็นจริงเพราะ $P(a)$ เป็นจริงตามกำหนดให้ข้อ (1)

(2) ถ้า $Q(k)$ เป็นจริงจะได้ $P(k+a-1)$ เป็นจริงโดยที่ $k \geq 1$

จะได้ $k+a-1 \geq a$ เมื่อ $P(k+a-1)$ เป็นจริง

จากที่กำหนดให้ ข้อ (2) จะได้ $P(k+1+a-1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $Q(k+1)$ เป็นจริง

จาก (1)และ (2) สรุปว่า $Q(m)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m

ดังนั้น $P(k+a-1)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m ที่ $m \geq 1$

แต่ $n = m + a - 1$ เมื่อ $m \geq 1$ จะได้ว่า $n \geq a$

จึงได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ที่ $n \geq a$

ตัวอย่าง 1.4.7 ถ้าให้ x เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว จงพิสูจน์ว่า $(1+x)^n > 1+nx$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 2$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(1+x)^n > 1+nx$

1. พิจารณา $P(2)$ แทนค่า $n=2$ จะได้

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \text{ เนื่องจาก } x>0 \text{ และ } x^2>0$$

จะได้ว่า $1+2x+x^2 > 1+2x$

นั่นคือ $(1+x)^2 > 1+2x$

แสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 2$ นั่นคือ $(1+x)^k > 1+xk$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง กล่าวคือจะพิสูจน์ว่า $(1+x)^{k+1} > 1+x(k+1)$

พิจารณา $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2 และ $x > 0$ และ $x^2 > 0$

จะได้ว่า $(1+x)^{k+1} > 1+x(k+1)$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $(1+x)^n > 1+nx$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n \geq 2$

ตัวอย่าง 1.4.8 จงพิสูจน์ $3^n > n^3$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq 4$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3^n > n^3$

1. พิจารณา $P(4)$ เมื่อ $n = 4$ จะได้

$3^4 > 4^3$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(4)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 4$ นั่นคือ $3^k > k^3$ เป็นจริง

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง กล่าวคือจะพิสูจน์ว่า $3^{k+1} > (k+1)^3$ เป็นจริง

จากสมบัติของจำนวนเต็ม นำ 3 คูณทั้งสองข้าง จะได้ว่า

$$3^{k+1} > k^3 + k^3 + k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

ดังนั้น $3^{k+1} > (k+1)^3$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $3^n > n^3$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ที่ $n \geq 4$

อาจจะแสดงว่า ข้อความ $P(n)$ ที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.4.3 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ 2 (2nd principle of mathematical induction)

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $P(1)$ เป็นจริง และ
2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k ที่ $k < m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $P(m)$ เป็นจริงด้วย

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ ให้ $S=\{n\in N\,|\,P(n)$ เป็นเท็จ $\}$

สมมติว่า $S\neq\phi$ โดยมีการจัดอันดับที่ดี จะมี $m\in S$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดใน S

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง ดังนั้น $m>1$

แสดงว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนจริงบวก k ที่ $k<m$

โดยสมมติฐานข้อ 2 จะได้ว่า $P(m)$ เป็นจริง ซึ่งผลที่ได้ ขัดแย้งกับ $m\in S$

ดังนั้น ที่สมมติว่า $S\neq\phi$ เป็นเท็จ แสดงว่า $S=\phi$

นั่นคือ $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

หมายเหตุ 1. โดยทั่วไปนิยมเรียกการพิสูจน์หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ 2 ว่าหลักอุปนัยอย่างเข้ม (strong mathematical induction)

2. สามารถแสดงได้ว่าการพิสูจน์ใช้ทฤษฎีบท 1.3 อาจนำไปพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็ม n ใด ๆ ที่ $n\geq a$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

หลักอุปนัยอย่างเข้ม (strong mathematical induction)

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม n และ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่ง

1. $P(a)$ เป็นจริง และ
2. ถ้า $P(a),P(a+1),P(a+2),...,P(m-1)$ เป็นจริง แล้ว $P(m)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ที่ $n\geq a$

ตัวอย่าง 1.4.9 พิจารณาลำดับ $1,3,4,7,11,18,29,47,76,...$ เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับคูลัส (lucas sequence) โดยที่ $a_1=1, a_2=3$ และ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ที่ $n\geq 3$ จงพิสูจน์ว่า $a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $a_n<\left(\frac{7}{4}\right)^n$

1. พิจารณา $P(1)$ และ $P(2)$ แทนค่า $n=1$ และ $n=2$ จะได้

ถ้า $n=1$ จะได้ $a_1=1<\left(\frac{7}{4}\right)^1$

ถ้า $n=2$ จะได้ $a_2=3<\left(\frac{7}{4}\right)^2$

แสดงว่า $P(1)$ และ $P(2)$ เป็นจริง

2. ให้ $P(k)$ เป็นจริงสำหรับทุก $k<m$ เมื่อ $m\geq 3$

ดังนั้น $a_{m-1}<\left(\frac{7}{4}\right)^{m-1}$ และ $a_{m-2}<\left(\frac{7}{4}\right)^{m-2}$

แต่ $a_m = a_{m-1} + a_{m-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2}\left(\frac{7}{4}+1\right)$

จึงได้ว่า $a_m < \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2}\left(\frac{11}{4}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{m-2}\left(\frac{7}{4}\right)^{m} < \left(\frac{7}{4}\right)^{m}$ เป็นจริง

แสดงว่า $P(m)$ เป็นจริง

ดังนั้น $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n}$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

1.5 สรุป

1. ระบบการเขียนตัวเลขแทนจำนวน สามารถแบ่งได้เป็น 4 ลักษณะคือ ระบบการรวมพวกอย่างง่าย ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 แบบ คือ ตัวเลขอียิปต์โบราณ ตัวเลขของซูเมอร์ และบาบิโลน ตัวเลขกรีกโบราณ และตัวเลขของชาวโรมัน ระบบการรวมพวกโดยการคูณ ระบบไซเฟอร์ และระบบตำแหน่ง ระบบนี้ใช้หลักการนี้คือ แบบ summer และbabylon แบบมายัน และระบบฮินดูอารบิก

2. โครงสร้างของคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท

3. โครงสร้างของระบบจำนวน

3.1 จำนวนธรรมชาติ ใช้สัญลักษณ์ N ซึ่ง $N = \{1,2,3,\ldots\}$

3.2 จำนวนเต็มศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ Z^0 ซึ่ง $Z^0 = \{0\}$

3.3 จำนวนเต็มลบ ใช้สัญลักษณ์ Z^- ซึ่ง $Z^- = \{-1,-2,-3,\ldots\}$

3.4 จำนวนเต็ม ใช้สัญลักษณ์ Z ซึ่ง $Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

3.5 จำนวนตรรกยะใช้สัญลักษณ์ Q ซึ่ง $Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}$ ซึ่ง $p,q \in Z$ และ $q \neq 0\}$

3.6 จำนวนอตรรกยะใช้สัญลักษณ์ Q' เช่น $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e$ เป็นต้น

3.7 จำนวนจริง ใช้สัญลักษณ์ R ซึ่ง $R = Q \cup Q'$

3.8 จำนวนเชิงซ้อน ใช้สัญลักษณ์ C ซึ่งสามารถเขียนในรูป $a+bi$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$

4. หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ คือข้อความที่ว่า ถ้า S เป็นเซตย่อยของจำนวนธรรมชาติที่มีสมบัติดังนี้

4.1 $1 \in S$

4.2 ถ้า $n \in S$ แล้ว $n+1 \in S$ แล้ว จะสรุปได้ว่า S เป็นเซตจำนวนธรรมชาติ

5. หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ 1

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนธรรมชาติ n ถ้า

5.1 $P(1)$ เป็นจริง และ

5.2 ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

แล้วจะสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

6. หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้พิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็ม โดย

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็ม n เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

6.1 $P(a)$ เป็นจริง และ

6.2 สำหรับจำนวนเต็ม k ซึ่ง $k \geq a$ ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ที่ $n \geq a$

7. หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ 2

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

7.1 $P(1)$ เป็นจริง และ

7.2 ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k ที่ $k < m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $P(m)$ เป็นจริงด้วย จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

8. หลักอุปนัยอย่างเข้ม

ให้ $P(n)$ เป็นข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม n และ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ซึ่ง

8.1 $P(a)$ เป็นจริง และ

8.2 ถ้า $P(a), P(a+1), P(a+2), ..., P(m-1)$ เป็นจริง แล้ว $P(m)$ เป็นจริง

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม n ที่ $n \geq a$

แบบฝึกหัด 1

1. จงเปลี่ยนตัวเลขอียิปต์โบราณที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

1.1 

1.2 

1.2 

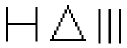
2. จงเปลี่ยนตัวเลขบาบิโลเนียที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

2.1 

2.2 

2.3 

3. จงเปลี่ยนตัวเลขกรีกโบราณที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

3.1 

3.2 

3.3 

4. จงเปลี่ยนตัวเลขโรมันที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

4.1 XXVII

4.2 CLII

4.3 CMLVII

5. จงเปลี่ยนตัวเลขไอโอนิกกรีกที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

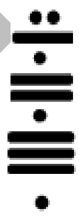
5.1 TZB

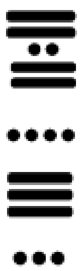
5.2 ΦΛM

5.3 ΩKθ

6. จงเปลี่ยนตัวเลขมายันที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

6.1 

6.2 

6.3 

7. จงเปลี่ยนตัวเลขจีนที่กำหนดให้เป็นเลขฮินดูอารบิก

7.1	7.2	7.3
二 百 三 十 九	二 千 十 三	二 千 五 百 五 十 六

8. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

8.1 $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

8.2 $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

8.3 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$

8.4 $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2$

8.5 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

บทที่ 2
จำนวนธรรมชาติ

บทนี้ศึกษาถึงสัจพจน์ของเปอาโน ความสัมพันธ์เท่ากับของจำนวนธรรมชาติ การบวกจำนวนธรรมชาติ ทฤษฎีบทสำหรับการบวกจำนวนธรรมชาติ กาลบจำนวนธรรมชาติ ทฤษฎีบทสำหรับการลบจำนวนธรรมชาติ การคูณจำนวนธรรมชาติ ทฤษฎีบทสำหรับการคูณจำนวนธรรมชาติ ลำดับของจำนวนธรรมชาติ และทฤษฎีบทสำหรับลำดับจำนวนธรรมชาติ

2.1 สัจพจน์ของเปอาโน

เซตของจำนวนธรรมชาติ N เป็นเซตที่สอดคล้องกับสัจพจน์ที่มีชื่อว่า สัจพจน์ของเปอาโน (Peano’s axioms) ดังต่อไปนี้

1. 1 เป็นสมาชิกของจำนวนธรรมชาติ $(1 \in N)$

2. สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ จะมีพจน์ตามหลัง (successor) เพียงตัวเดียว พจน์ตามหลังของ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย n^*

3. สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ 1 ไม่ใช่พจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ $(1 \neq n^*)$

4. สำหรับจำนวนธรรมชาติ n และ m ใด ๆ ถ้า $m \neq n$ แล้ว $m^* \neq n^*$ หรือในทางตรงข้าม ถ้า $m = n$ แล้ว $m^* = n^*$

5. หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า S เป็นเซตที่มีสมบัติ ดังนี้

   1. $1 \in S$
   2. ถ้า $n \in S$ แล้ว $n^* \in S$ จากข้อ 1 และ2 จะได้ว่า $S = N$

ตัวอย่าง 2.1.1 จำนวนธรรมชาติ คือ $1, 2, 3, \ldots$ สอดคล้องกับสัจพจน์ของ เปอาโน ทั้ง 5 ข้อ

1. โดยสัจพจน์ข้อ 1 ได้ว่า $1 \in N$
2. โดยสัจพจน์ข้อ 2 มี $1^* \in N$ โดย

   $1^* = 2$ (1 มีพจน์ตามหลังคือ 2)

   $2^* = 3$ (2 มีพจน์ตามหลังคือ 3) เป็นต้น
3. โดยสัจพจน์ข้อ 3 พบว่า 1 ไม่เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนใด
4. โดยสัจพจน์ข้อ 4 จาก $1 \neq 2$ แล้ว $1^* \neq 2^*$
5. หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สมมติเซต S เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ

แล้ว แสดงให้ได้ว่า $S = N$ โดยการพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ

1. แสดงให้ได้ว่า $1 \in S$
2. ให้ $n \in S$ แล้วต้องแสดงให้ได้ว่า $n^* \in S$

ถ้าเป็นจริงทั้ง 2 ข้อ จะสรุปได้ว่า $S = N$

2.2 ความสัมพันธ์เท่ากับ

ความสัมพันธ์เท่ากับ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของสองสิ่งที่เป็นสิ่งเดียวกัน ถ้าจำนวนธรรมชาติ m เท่ากับจำนวนธรรมชาติ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m = n$ เมื่อสองจำนวนนั้นเป็นจำนวนเดียวกันโดยที่ความสัมพันธ์เท่ากับมีสมบัติที่เรียกว่า ความสัมพันธ์สมมูล

ความสัมพันธ์สมมูล (equivalent relation) คือ ความสัมพันธ์ที่มีสมบัติดังนี้ เมื่อ m, n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

1. สมบัติสะท้อน (reflexive): $m = m$
2. สมบัติสมมาตร (symmetric); ถ้า $m = n$ แล้ว $n = m$
3. สมบัติถ่ายทอด (transitive); ถ้า $m = n$ และ $n = p$ แล้ว $m = p$

ทฤษฎีบท 2.2.1 จำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $n \neq n^*$

พิสูจน์ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S = \{n \in N \mid n \neq n^*\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $1 \neq 1^*$

จากสัจพจน์ข้อ 3 ที่ว่า 1 ไม่เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ

จึงได้ $1 \neq 1^*$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $n \neq n^*$ ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $n^* \neq (n^*)^*$

จากสัจพจน์ข้อ 4 $n \neq n^*$ แล้ว

$$n^* \neq (n^*)^*$$

ดังนั้น $n^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $n \neq n^*$

2.3 การบวกจำนวนธรรมชาติ

นิยาม 2.3.1 จำนวนธรรมชาติ m ผลบวกของ m กับ 1 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m+1$ โดย

$$m + 1 = m^*$$

และสำหรับจำนวนธรรมชาติ n ผลบวกของ m กับ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m+n$ ที่สมบัติว่า $(m+n)^* = m + n^*$

ตัวอย่าง 2.3.1 จากนิยาม

$$1+1 = 1^*$$
$$2+1 = 2^*$$
$$3+1 = 3^*$$
$$4+1 = 4^*$$ เป็นต้น

และ $(1+2)^* = 3^* = 4$ หรือ $(1+2)^* = 1+2^* = 1+3 = 4$

$(7+9)^* = 16^* = 17$ หรือ $(7+9)^* = 7+9^* = 7+10 = 17$

ทฤษฎีบท 2.3.1 จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์ จำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S = \{ n \in N \mid m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ $\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m+1 \in S$

    พิจารณา $m+1 = m^*$

    เนื่องจาก m^* เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ m

    นั่นคือ m^* เป็นจำนวนธรรมชาติ

    จึงได้ $m+1$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $m+n^*$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

    เนื่องจาก $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

    จึงได้ $(m+n)^*$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

    จากนิยาม $(m+n)^* = m+n^*$

    จึงได้ $m+n^*$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ดังนั้น $n^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

นั่นคือ ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎีบท 2.3.2 จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง

$S = \{ n \in N \mid m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว $\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m+1$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

    จากนิยาม $m+1 = m^*$

    เนื่องจาก m^* เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ m

    โดยสัจพจน์ข้อ 2 m^* มีเพียงจำนวนเดียว

    จึงได้ $m+1$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $m+n^*$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

    เนื่องจาก $m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

    จึงได้ $(m+n)^*$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

จากนิยาม $(m+n)^* = m+n^*$

จึงได้ $m+n^*$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $n^* \in S$ โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ทฤษฎีบท 2.3.3 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน จำนวนธรรมชาติ m, n และ p ใด ๆ ถ้า $m = n$ แล้ว $m+p = n+p$

พิสูจน์ จาก $m = n$ มีความหมายว่า m และ n เป็นจำนวนเดียวกัน

โดยทฤษฎีบท 2.3.1 และ2.3.2 สำหรับ p ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

$m+p$ จึงเป็นจำนวนเดียวกับ $n+p$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m, n และ p ใด ๆ ถ้า $m = n$ แล้ว $m+p = n+p$

ทฤษฎีบท 2.3.4 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวกให้ m, n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ

$$(m+n)+p = m+(n+p)$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง

$$S = \{p \in N \mid (m+n)+p = m+(n+p)\}$$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $(m+n)+1 = m+(n+1)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}(m+n)+1 &= (m+n)^* \\ &= m+n^* \\ &= m+(n+1)\end{aligned}$$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $p \in S$ ดังนั้น $(m+n)+p = m+(n+p)$

ต้องการ $p^* \in S$ ต้องแสดงว่า $(m+n)+p^* = m+(n+p^*)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}(m+n)+p^* &= [(m+n)+p]^* \\ &= [m+(n+p)]^* \\ &= m+(n+p)^* \\ &= m+(n+p^*)\end{aligned}$$

ดังนั้น $p^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m, n และ p ใด ๆ $(m+n)+p = m+(n+p)$

ทฤษฎีบท 2.3.5 จำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ $m+1=1+m$

พิสูจน์ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S=\{m \in N \mid m+1=1+m\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $1+1=1+1$

พิจารณา
$$\begin{aligned} 1+1 &= 1^{*} \\ &= 1+1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $m \in S$ ดังนั้น $m+1=1+m$ ต้องการ $m^{*} \in S$ ต้องแสดงว่า $m^{*}+1=1+m^{*}$

พิจารณา
$$\begin{aligned} m^{*}+1 &= (m+1)+1 \\ &= (1+m)+1 \\ &= 1+(m+1) \\ &= 1+m^{*} \end{aligned}$$

ดังนั้น $m^{*} \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ $m+1=1+m$

ทฤษฎีบท 2.3.6 สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ

$$m+n=n+m$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S=\{n \in N \mid m+n=n+m\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m+1=1+m$

จากทฤษฎีบท 2.3.5 $m+1=1+m$ เป็นจริง

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $m+n=n+m$ ต้องการ $n^{*} \in S$ ต้องแสดงว่า $m+n^{*}=n^{*}+m$

พิจารณา
$$\begin{aligned} m+n^{*} &= (m+n)^{*} \\ &= n+m^{*} \\ &= n+(m+1) \\ &= n+(1+m) \\ &= (n+1)+m \\ &= n^{*}+m \end{aligned}$$

ดังนั้น $n^{*} \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m+n=n+m$

ทฤษฎีบท 2.3.7 สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ถ้า $m+n=m+p$ แล้ว $n=p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n และ p ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง

$S=\{m \in N \mid m+n=m+p$ แล้ว $n=p\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า ถ้า $1+n=1+p$ แล้ว $n=p$

ให้ $$1+n=1+p$$
$$n+1=p+1$$
$$n^*=p^*$$
โดยสัจพจน์ข้อ 4 $$n=p$$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $m \in S$ ดังนั้น ถ้า $m+n=m+p$ แล้ว $n=p$

ต้องการ $m^* \in S$ ต้องแสดงว่า ถ้า $m^*+n=m^*+p$ แล้ว $n=p$

ให้ $$m^*+n=m^*+p$$
$$n+m^*=p+m^*$$
$$(n+m)^*=(p+m)^*$$
$$(n+m)=(p+m)$$
$$n=p$$

ดังนั้น $m^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m+n=m+p$ แล้ว $n=p$

2.4 การคูณจำนวนธรรมชาติ

นิยาม 2.4.1 จำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ ผลคูณ m กับ 1 ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m \times 1$ หรือ $m \cdot 1$

กำหนดโดย $$m \times 1=m$$

และจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ ผลคูณระหว่าง m กับ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m \times n$

ซึ่งมีสมบัติว่า $$m \times n^*=m \times n+m$$

หมายเหตุ การเขียน $m \times n+m$ หมายถึง $(m \times n)+m$

ทฤษฎีบท 2.4.1 จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m \times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S=\{n \in N \mid m \times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ $\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m \times 1$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิจารณา $m \times 1=m$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนธรรมชาติ

จึงได้ $m\times 1$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ดังนั้น $1\in S$

2. ให้ $n\in S$ ดังนั้น $m\times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ต้องการ $n^*\in S$ ต้องแสดงว่า $m\times n^*$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิจารณา $m\times n^* = m\times n+m$

เนื่องจาก $m\times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติและผลบวกของจำนวนธรรมชาติได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนธรรมชาติ

จึงได้ $m\times n+m$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

นั่นคือ $m\times n^*$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ดังนั้น $n^*\in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $m\times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎีบท 2.4.2 จำนวนธรรมชาติ m และ n ค่า ของ $m\times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.4.3 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ ถ้า $m=n$ แล้ว $m\times p=n\times p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p

จาก $m=n$ มีความหมายว่า m และ n เป็นจำนวนเดียวกัน

โดยทฤษฎีบท 2.4.1 และ2.4.2 $m\times p$ จึงเป็นจำนวนเดียวกับ $n\times p$

นั่นคือ $m\times p=n\times p$

ทฤษฎีบท 2.4.4 จำนวนธรรมชาติ n ใด ๆจะได้ว่า $1\times n=n\times 1$

พิสูจน์ ให้ $S\subseteq N$ ซึ่ง $S=\{n\in N \mid 1\times n=n\times 1\}$

1. ต้องการ $1\in S$ ต้องแสดงว่า $1\times 1=1\times 1$

พิจารณา
$$\begin{aligned}1\times 1&=1\\&=1\times 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $1\in S$

2. ให้ $n\in S$ ดังนั้น $1\times n=n\times 1$ ต้องการ $n^*\in S$ ต้องแสดงว่า$1\times n^*=n^*\times 1$

พิจารณา
$$\begin{aligned}1\times n^*&=(1\times n)+1\\&=(n\times 1)+1\\&=n+1\\&=n^*\\&=n^*\times 1\end{aligned}$$

ดังนั้น $n^* \in S$
โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$
ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ $1 \times n = n \times 1$

ทฤษฎีบท 2.4.5 จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะได้ว่า $n^* \times m = n \times m + m$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S = \{m \in N \mid n^* \times m = n \times m + m\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $n^* \times 1 = n \times 1 + 1$

พิจารณา
$$\begin{aligned} n^* \times 1 &= n^* \\ &= n + 1 \\ &= (n \times 1) + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $m \in S$ ดังนั้น $n^* \times m = n \times m + m$

ต้องการ $m^* \in S$ ต้องแสดงว่า $n^* \times m^* = n \times m^* + m^*$

พิจารณา
$$\begin{aligned} n^* \times m^* &= (n^* \times m) + n^* \\ &= [(n \times m) + m] + n^* \\ &= [(n \times m + m) + n]^* \\ &= [(n \times m + n) + m]^* \\ &= (n \times m + n) + m^* \\ &= n \times m^* + m^* \end{aligned}$$

ดังนั้น $m^* \in S$
โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$
ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ $n^* \times m = n \times m + m$

ทฤษฎีบท 2.4.6 สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะได้ว่า $m \times n = n \times m$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.4.7 สมบัติการแจกแจง ให้ m, n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ จะได้ว่า
$$m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n และ p ใด ๆ $S \subseteq N$ ให้
$$S = \{m \in N \mid m \times (n + p) = (m \times n) + (m \times p)\}$$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $1 \times (n + p) = (1 \times n) + (1 \times p)$

พิจารณา
$$\begin{aligned} 1 \times (n + p) &= (n + p) \times 1 \\ &= n + p \end{aligned}$$

$$= (n\times 1)+(p\times 1)$$
$$= (1\times n)+(1\times p)$$

ดังนั้น $1\in S$

2. ให้ $m\in S$ ดังนั้น $m\times(n+p)=(m\times n)+(m\times p)$

ต้องการ $m^*\in S$ ต้องแสดงว่า $m^*\times(n+p)=(m^*\times n)+(m^*\times p)$

พิจารณา $m^*\times(n+p) = m\times(n+p)+(n+p)$
$$= (m\times n+m\times p)+(n+p)$$
$$= (m\times n+n)+(m\times p+p)$$
$$= (m^*+n)+(m^*+p)$$

ดังนั้น $m^*\in S$ โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ $m\times(n+p)=(m\times n)+(m\times p)$

ทฤษฎีบท 2.4.8 สมบัติการแจกจง ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ จะได้ว่า

$m\times(n\times p)=(m\times n)\times p$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

2.5 ลำดับของจำนวนธรรมชาติ

นิยาม 2.5.1 จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะกล่าวว่าจำนวน m มาก่อนจำนวน n หรือ m น้อยกว่า n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m<n$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนธรรมชาติ p ที่ทำให้ $m+p=n$

และ กล่าวว่า m มากกว่า n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m>n$ ก็ต่อเมื่อ $n<m$

กล่าวว่า m น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m\le n$ ก็ต่อเมื่อ $m=n$ หรือ $m<n$

กล่าวว่า m มากกว่าหรือเท่ากับ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $m\ge n$ ก็ต่อเมื่อ $m=n$ หรือ $m>n$

ซึ่งความสัมพันธ์ $<,\le,>$ และ $\ge$ เรียกว่า ความสัมพันธ์ลำดับ (ordered relations)

ตัวอย่าง 2.5.1 4 < 7 เพราะมีจำนวนธรรมชาติ 3 ซึ่งทำให้ 4 + 3 = 7

9 > 1 เพราะว่า 1 < 9 ซึ่งมีจำนวนธรรมชาติ 8 ซึ่งทำให้ 1 + 9 = 10

5 ≤ 10 เพราะว่า 5 < 10 และ8 ≥ 8 เพราะว่า 8 = 8

ข้อสังเกต $n<n^*$ เพราะว่า $n<n+1=n^*$

ทฤษฎีบท 2.5.1 สมบัติการถ่ายทอด ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ถ้า $m<n$ และ $n<p$ แล้ว $m<p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ กำหนดให้ $m<n$ และ $n<p$

ต้องการ $m<p$ ต้องแสดงว่า $m+$ จำนวนธรรมชาติ $=p$

จาก $m<n$ และ $n<p$ โดยนิยาม 2.5.1 จะมีจำนวนธรรมชาติ a และ b ซึ่งทำให้

$$m+a=n \qquad \text{...........}(1)$$

$$n+b=p \qquad \text{...........}(2)$$

นำสมการ $(1)+$ สมการ(2); $(m+a)+(n+b)=n+p$

$$(m+a+b)+n=p+n$$

$$m+a+b=p$$

$$m+(a+b)=p \qquad (a+b \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ})$$

$$m<p$$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m<n$ และ $n<p$ แล้ว $m<p$

ทฤษฎีบท 2.5.2 ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ถ้า $m<n$ แล้ว $m+p<n+p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ กำหนดให้ $m<n$

ต้องการ $m+p<n+p$ ต้องแสดงว่า $(m+p)+$ จำนวนธรรมชาติ $=n+p$

ให้ $m<n$ จากนิยาม 2.5.1 จะต้องมีจำนวนธรรมชาติ a ซึ่งทำให้

$$m+a=n$$

สำหรับจำนวนธรรมชาติ p ใด ๆ $(m+a)+p=n+p$

$$(m+p)+a=n+p$$

$$m+p<n+p$$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m<n$ แล้ว $m+p<n+p$

ทฤษฎีบท 2.5.3 จำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m<n$ แล้ว $m\times p<n\times p$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 2.5.4 จำนวนธรรมชาติใด ๆ 1 เป็นจำนวนธรรมชาติที่น้อยที่สุด กล่าว คือ $1\le n$ ทุกจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ

พิสูจน์ ให้ $S\subseteq N$ ซึ่ง $S=\{n\in N \mid 1\le n\}$

1. ต้องการ $1\in S$ ต้องแสดงว่า $1\le 1$

   โดยนิยาม 2.5.1 $\quad 1\le 1$

   ดังนั้น $1\in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $1 \leq n$ ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $1 \leq n^*$

เนื่องจาก $1 \leq n$

และ $n \leq n+1 = n^*$

โดยสมบัติการถ่ายทอด $1 \leq n^*$

ดังนั้น $n^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

นั่นคือ จำนวนธรรมชาติ 1 เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด

ทฤษฎีบท 2.5.5 ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ถ้า $m < n$ แล้ว $m^* \leq n$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ ถ้า $m < n$

ต้องการ $m^* \leq n$ ต้องแสดงว่า $m+1 \leq n$

ถ้า $m < n$

จากทฤษฎีบท 2.5.4 ที่ว่า $1 \leq n$

จึงได้ $m+1 \leq n$

ดังนั้น $m^* \leq n$

สมบัติไตรวิภาค (transitive law)

จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้ เพียงข้อเดียว

1. $m = n$
2. $m > n$ หรือกล่าวได้ว่า บางค่า p ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่ง $m = n + p$
3. $m < n$ หรือกล่าวได้ว่า บางค่า p ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ ซึ่ง $n = m + p$

การพิสูจน์แบ่งออกเป็น 2 ตอนคือ

1. พิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคสองข้อพร้อมกันไม่ได้
2. พิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อ

พิสูจน์ ตอนที่ 1 จำนวนธรรมชาติ m และ n จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคสองข้อพร้อมกันไม่ได้

1.1 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

สมมติว่า m และ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1 และข้อ 2 คือ $m = n$ และ $m > n$

จาก $m > n$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่งทำให้

$$m = n + p$$

จึงได้ $m^* = (n+p)^*$

แต่ $m = n;$ $m^* = (m+p)^*$

$$m^* = m + p^*$$
$$m+1 = m + p^* \quad \text{สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก}$$
$$1 = p^*$$

จึงได้ 1 เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ p โดยสัจพจน์ข้อ 3 เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1 และข้อ 2 พร้อมกันไม่ได้

1.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

สมมติว่า m และ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1 และข้อ 3 คือ $m = n$ และ $m < n$

จาก $m < n$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p

ซึ่ง $\quad n = m + p$

จึงได้ $\quad n^* = (m+p)^*$

แต่ $m = n$; $\quad n^* = (n+p)^*$

$$n^* = n + p^*$$
$$n+1 = n + p^*$$
$$1 = p^*$$

จึงได้ 1 เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ p โดยสัจพจน์ข้อ 3 เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1 และข้อ 3 พร้อมกันไม่ได้

1.3 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

สมมติว่า m และ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2 และข้อ 3

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาค ข้อ 2 และข้อ 3 พร้อมกันไม่ได้

ตอนที่ 2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ ต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อ ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ สำหรับ $S \subseteq N$ ให้

$$S = \{n \in N \mid m = n \text{ หรือ } m > n \text{ หรือ } m < n\}$$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m = 1$ หรือ $m > 1$ หรือ $m < 1$

ให้ $m = 1$; แล้ว $1 = 1$ หรือ $m = n$ สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1

ให้ $m \neq 1$ แสดงว่า m เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ p ใด ๆ

จึงได้ $\quad m = p^*$

$$m = p + 1$$
$$m > 1 \qquad \text{สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2}$$

จึงได้ $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น n ต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อ คือ $m = n$ หรือ $m > n$ หรือ $m < n$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใด ๆ

ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า n^* ต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อ คือ $m = n^*$ หรือ $m > n^*$ หรือ $m < n^*$

2.1 ให้ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1 คือ

$$m = n$$

จึงได้ $$m^* = n^*$$

$$m + 1 = n^*$$

$$m < n^*$$

ดังนั้น n^* สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 3

2.2 ให้ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2 คือ $m > n$

โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p

ซึ่งทำให้ $m = n + p$ ....$(*)$

ถ้า $p = 1;\quad m = n + 1 = n^*$

ดังนั้น n^* สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 1

ถ้า $p \neq 1;$ แสดงว่า p เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ r

จึงได้ $p = r^*$ แทนค่าในสมการ $(*)$

$$\begin{aligned} m &= n + r^* \\ &= n + (r + 1) \\ &= (n + 1) + r \\ &= n^* + r \\ m &> n^* \end{aligned}$$

ดังนั้น n^* สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2

2.3 ให้ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 3

คือ $m < n$ โดยนิยามมีจำนวนธรรมชาติ p

ซึ่งทำให้ $n = m + p$

$$n^* = (m + p)^*$$

$$n^* = m + p^*$$

$$n^* > m$$

ดังนั้น n^* สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 3

จาก 2.1 2.2 และ2.3 จึงได้ $n^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

นั่นคือ ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งในสามข้อ

จากข้อ 1 และข้อ 2 ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้ เพียงข้อเดียว

1. $m = n$ 2. $m > n$ 3. $m < n$

ทฤษฎีบท 2.5.6 สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ ให้ m,n และ p เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ จะได้ว่า $m\times n=m\times p$ แล้ว $n=p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ให้ $m\times n=m\times p$ แล้ว $n\neq p$

จาก $n\neq p$ โดยสมบัติไตรวิภาค แสดงว่า $n>p$ หรือ $n<p$

กรณีที่ 1 ถ้า $n>p$ หรือ $p<n$ โดยนิยาม จะมีจำนวนธรรมชาติ a ซึ่งทำให้

$$p+a=n$$

จากที่กำหนดให้ $$m\times n=m\times p$$

แทนค่า $n=p+a;$ $$m\times(p+a)=m\times p$$

$$(m\times p)+(m\times a)=m\times p$$

$$[(m\times p)+(m\times a)]^*=(m\times p)^*$$

$$(m\times p)+(m\times a)^*=(m\times p)+1$$

$$(m\times a)^*=1$$

จึงได้ 1 เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ $(m\times a)$ โดยสัจพจน์ข้อ 3 เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m\times n=m\times p$ แล้ว $n>p$ ไม่เป็นจริง

กรณีที่ 2 ถ้า $n<p$ โดยนิยาม จะมีจำนวนธรรมชาติ b ซึ่งทำให้

$$n+b=p$$

จากที่กำหนดให้ $$m\times n=m\times p$$

แทนค่า $p=n+b;$ $$m\times n=m\times(n+b)$$

$$m\times n=(m\times n)+(m\times b)$$

$$(m\times n)^*=[(m\times n)+(m\times b)]^*$$

$$(m\times n)+1=(m\times n)+(m\times b)^*$$

$$1=(m\times b)^*$$

จึงได้ 1 เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ $(m\times b)$ โดยสัจพจน์ข้อ 3 เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m\times n=m\times p$ แล้ว $n<p$ ไม่เป็นจริง

จากกรณีที่ 1 และ2 จึงขัดแย้งที่ว่า สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m\times n=m\times p$ แล้ว $n\neq p$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ ถ้า $m\times n=m\times p$ แล้ว $n=p$

ทฤษฎีบท 2.5.7 หลักการอาร์คิมีเดียน สำหรับจำนวนธรรมชาติ (The Archimedean Principle for Natural Number) สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะมีจำนวนธรรมชาติ p ที่มีสมบัติว่า $m<n\times p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

จะได้ว่า $n=1$ หรือ $n\neq 1$

กรณีที่ 1 ถ้า $n=1$ ให้ p เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ m

ให้ $p=m^{*}=m+1$

จะได้ $m<p$

และ $m<p\times 1$

จึงได้ $m<p\times n$

กรณีที่ 2 ถ้า $n\neq 1$ แสดงว่า n เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ

ดังนั้น มีบางจำนวนธรรมชาติ q ซึ่งทำให้ $n=q^{*}$

ให้ $p=m$

จะได้
$$
\begin{aligned}
p\times n &= m\times n\\
&= n\times q^{*}\\
&= m\times q+m\\
&= m+m\times q
\end{aligned}
$$

จึงได้ $m<p\times n$

ดังนั้น มีจำนวนธรรมชาติ p ที่ทำให้ $m<n\times p$

บทแทรก 2.5.1 เซตจำนวนธรรมชาติไม่มีขอบเขตด้านบน คือ สำหรับจำนวนธรรมชาติ n จะมีจำนวนธรรมชาติ p ที่ $n<p$

ทฤษฎีบท 2.5.8 ให้ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ไม่มีจำนวนธรรมชาติ x ที่มีสมบัติว่า $n<x<n+1$

พิสูจน์ ให้ x และ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆและ $n<x<n+1$

จาก $n<x$

โดยทฤษฎีบท 2.5.5 $n^{*}\leq x$

จึงได้ $n+1\leq x$

ขัดแย้งที่กำหนดให้ $x<n+1$

นั่นคือ ไม่มีจำนวนธรรมชาติ x ที่มีสมบัติว่า $n<x<n+1$

นิยาม 2.5.2 ให้ A เป็นเซตย่อยไม่ใช่เซตว่างของจำนวนธรรมชาติ จำนวนธรรมชาติ $a\in A$ จะเป็นจำนวนน้อยที่สุดของ A ถ้า $a\leq n$ สำหรับทุกๆ $n\in A$

ทฤษฎีบท 2.5.9 ให้ A เป็นเซตย่อยของเซตจำนวนธรรมชาติ ถ้า A มีจำนวนน้อยที่สุดจะมีเพียงตัวเดียว

พิสูจน์ ให้ m, n เป็นจำนวนธรรมชาติ และเป็นจำนวนที่น้อยที่สุดของเซต A

จาก m เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดของเซต A และ $n \in A$ จะได้ว่า $m \leq n$

และ จาก n เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดของเซต A และ $m \in A$ จะได้ว่า $n \leq m$

ได้ว่า $m \leq n \leq m$

ดังนั้น $m = n$

นั่นคือ จำนวนที่น้อยที่สุดของ A มีเพียงจำนวนเดียว

ทฤษฎีบท 2.5.10 หลักการเรียงลำดับอย่างดี (the well – ordering principle) เซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างใด ๆ ของจำนวนธรรมชาติ จะมีจำนวนที่น้อยที่สุด

พิสูจน์ ให้ $A \subseteq N$ และ A ไม่เป็นเซตว่าง ซึ่ง $S = \{n \in N \mid n \leq x \text{ ทุกๆ } x \in A\}$

จาก $1 \leq x$ ทุกค่า $x \in A$

ดังนั้น $1 \in S$

ได้ว่า S ไม่เป็นเซตว่าง

ถ้ามี $n \in S \cap A$ จะได้ว่า n เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดของ A

สมมติว่า ไม่มีจำนวนน้อยที่สุดของ A คือ $S \cap A$ เป็นเซตว่าง

ให้ $n \in S$ จะได้ว่า $n \notin A$ ดังนั้น $n < x$ ทุกๆ $x \in A$ และได้ว่า $n^* \leq x$ ทุกๆ $x \in A$

ได้ว่า $n^* \in S$

ดังนั้น $S = N$ ซึ่งได้ว่า $S \cap A = N \cap A = A$ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติที่ว่า $S \cap A$ เป็นเซตว่าง

นั่นคือ มีจำนวน $n \in A$ ที่มีสมบัติว่า $n \leq x$ ทุกๆ $x \in A$

คือ n เป็นจำนวนน้อยที่สุดของ A

2.6 สรุป

1. สัจพจน์ของปีอาโนโดยมีสมบัติ ต่อไปนี้

    1.1 1 เป็นสมาชิกของจำนวนธรรมชาติ $(1 \in N)$

    1.2 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ จะมีพจน์ตามหลังเพียงตัวเดียว โดยที่พจน์ตามหลังของ n ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย n^*

    1.3 สำหรับทุกจำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ 1 ไม่ใช่พจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ $(n^* \neq 1)$

    1.4 สำหรับจำนวนธรรมชาติ n และ m ใด ๆ ถ้า $m \neq n$ แล้ว $m^* \neq n^*$ หรือในทางตรงข้าม ถ้า $m = n$ แล้ว $m^* = n^*$

    1.5 หลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า S เป็นเซตที่มีสมบัติ ดังนี้

        1. $1 \in S$

        2. ถ้า $n \in S$ แล้ว $n^* \in S$ จากข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า $S = N$

2. การบวกจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n

    2.1 $m + 1 = m^*$

2.2 $(m+n)^* = m+n^*$

3. สมบัติการบวกจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ

3.1 การปิด ; $m+n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

3.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว ; $m+n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

3.3 การเปลี่ยนหมู่ ; $(m+n)+p = m+(n+p)$

3.4 การสลับที่ ; $m+n = n+m$

3.5 การตัดออก ; ถ้า $m+n = m+p$ แล้ว $n = p$

4. การคูณจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n

4.1 $m\times 1 = m$

4.2 $m\times n^* = m\times n + m$

5. สมบัติการคูณจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ

5.1 การปิด; $m\times n$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

5.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว; $m\times n$ มีผลลัพธ์พียงจำนวนเดียว

5.3 การสลับที่; $m\times n = n\times m$

5.4 การแจกแจง ; $m\times(n+p) = (m\times n)+(m\times p)$

5.5 การเปลี่ยนหมู่ ; $m\times(n\times p) = (m\times n)\times p$

5.6 การตัดออก; ถ้า $m\times n = m\times p$ แล้ว $n = p$

6. ลำดับของจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

6.1 $m<n$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนธรรมชาติ p ที่ทำให้ $m+p=n$

6.2 $m>n$ ก็ต่อเมื่อ $n<m$

6.3 $m\le n$ ก็ต่อเมื่อ $m=n$ หรือ $m<n$

6.4 $m\ge n$ ก็ต่อเมื่อ $m=n$ หรือ $m>n$

6.5 ความสัมพันธ์ $<,\le,>$ และ $\ge$ เรียกว่า ความสัมพันธ์ลำดับ

7. สมบัติลำดับของจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใด ๆ

7.1 ความสัมพันธ์น้อยกว่า $<$ มีสมบัติถ่ายทอด ถ้า $m<n$ และ $n<p$ แล้ว $m<p$

7.2 ถ้า $m<n$ แล้ว $m+p<n+p$

7.3 ถ้า $m<n$ แล้ว $m\times p<n\times p$

7.4 1 เป็นจำนวนธรรมชาติที่น้อย

7.5 ถ้า $m<n$ แล้ว $m^*\le n$

7.6 จำนวนธรรมชาติ n ใด ๆ ไม่มีจำนวนธรรมชาติ x ที่มีสมบัติว่า $n<x<n+1$

8. สมบัติไตรวิภาค จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้ เพียงข้อเดียว 1. $m=n$ 2. $m>n$ 3. $m<n$

9. หลักการอาร์คิมีเดียนสำหรับจำนวนธรรมชาติ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ จะมีจำนวนธรรมชาติ p ที่มีสมบัติว่า $m<n\times p$

แบบฝึกหัด 2

1. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.2 สำหรับ $m,n \in N$ จะได้ว่า $m \times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว
2. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.6 สำหรับ $m,n \in N$ จะได้ว่า $m \times n = n \times m$
3. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.8 สำหรับ $m,n,p \in N$ จะได้ว่า $m \times (n \times p) = (m \times n) \times p$
4. พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.5.3 สำหรับ $m,n,p \in N$ ใด ๆ ถ้า $m < n$ แล้ว $m \times p < n \times p$
5. พิสูจน์สมบัติไตรวิภาค ตอนที่ 1 กรณีที่ 1.3 ให้ $m,n \in N$ และสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2 และข้อ 3 พร้อมกัน

บทที่ 3
จำนวนเต็ม

ในบทนี้จะกล่าวถึง ที่มาของการสร้างจำนวนเต็ม เซตของจำนวนเต็ม การบวกและการลบจำนวนเต็ม ทฤษฎีบทและสมบัติต่าง ๆ ของการบวกและการลบจำนวนเต็ม การคูณจำนวนเต็ม ทฤษฎีบทและสมบัติต่าง ๆ ของการคูณจำนวนเต็ม

3.1 นิยามและสมบัติเบื้องต้น

พิจารณาสมการ $p = q + x$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p, q และ x ใด ๆ พบว่า ไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ ที่สอดคล้องสมการดังกล่าวได้ หรือจะกล่าวว่าสมการจะเป็นไปไม่ได้เมื่อ p มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ q

ตัวอย่างเช่น $4 = 7 + x$ ไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนธรรมชาติที่ทำให้สมการเป็นจริงได้

จากปัญหาข้างต้นจึงจำเป็นต้องขยายจำนวนธรรมชาติออกไป โดยเพิ่มจำนวนลบ และจำนวนศูนย์ ซึ่งเรียกจำนวนใหม่นี้ว่าจำนวนเต็มลบ และจำนวนศูนย์ ตามลำดับ เมื่อรวมจำนวนธรรมชาติ จำนวนศูนย์ และจำนวนเต็มลบ เรียกจำนวนดังกล่าวว่า “จำนวนเต็ม” โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Z

ถ้าให้ (p,q) เป็นคู่อันดับ โดยที่ p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ และกำหนดให้คู่อันดับนี้แทนการดำเนินการ “ $p-q$ ” แล้วจะได้ว่า (p,q) แทนจำนวนเต็มบางจำนวนได้

ตัวอย่าง 3.1.1 พิจารณา คู่อันดับ $(3,5)$ แทนจำนวนเต็ม $(3,5) = 3-5 = -2$

คู่อันดับ $(5,2)$ แทนจำนวนเต็ม $(5,2) = 5-2 = 3$

คู่อันดับ $(4,4)$ แทนจำนวนเต็ม $(4,4) = 4-4 = 0$

คู่อันดับ $(4,6)$ แทนจำนวนเต็ม $(4,6) = 4-6 = -2$

คู่อันดับ $(5,7)$ แทนจำนวนเต็ม $(5,7) = 5-7 = -2$

เนื่องจาก คู่อันดับ $(3,5),(4,6)$ และ $(5,7)$ แทนจำนวนเต็ม -2 จึงกล่าวได้ว่าคู่อันดับทั้งสามมีความสัมพันธ์กันใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(3,5)R(4,6)$ หรือ $(4,6)R(5,7)$

เนื่องจากจำนวนเต็ม $(p,q) = p-q$ เป็นการดำเนินการ“ลบ”ซึ่งการดำเนินการลบในเซตจำนวนธรรมชาติไม่สอดคล้องสมบัติปิด ดังนั้นต้องมีการจัดรูปแบบการดำเนินการใหม่ ดังนี้

พิจารณา	$(3,5)R(4,6)$
ดังนั้น	$3-5 = 4-6$
จัดรูปแบบใหม่	$3+6 = 4+5$

นิยาม 3.1.1 กำหนดเซต $L=\{(m,n)|$เมื่อ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ $\}$ และกำหนดความสัมพันธ์ “ $\sim$ ” บนเซต L คือ $(m,n)\sim(p,q)$ ก็ต่อเมื่อ $m+q=n+p$ เมื่อ $m,n,\ p$ และ q เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ m,n,p,q,r และ s เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ ความสัมพันธ์ “ $\sim$ ” มีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence) คือ

1. สมบัติสะท้อน; $(m,n)\sim(m,n)$
2. สมบัติสมมาตร; ถ้า $(m,n)\sim(p,q)$ แล้ว $(p,q)\sim(m,n)$
3. สมบัติถ่ายทอด; ถ้า $(m,n)\sim(p,q)$ และ $(p,q)\sim(r,s)$ แล้ว $(m,n)\sim(r,s)$

พิสูจน์ 1. จำนวนธรรมชาติ m และ n ใด ๆ

เนื่องจากจำนวนธรรมชาติสอดคล้องสมบัติการสลับ

จึงได้ $\quad m+n=n+m$

โดยนิยาม 3.1.1 $\quad (m,n)\sim(m,n)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติสะท้อน

2. จำนวนธรรมชาติ m,n,p และ q ใด ๆ

ให้ $\quad (m,n)\sim(p,q)$

จากนิยาม 3.1.1 $\quad m+q=n+p$

สมบัติการสลับที่ $\quad q+m=p+n$

$\quad p+n=q+m$

จากนิยาม 3.1.1 $\quad (p,q)\sim(m,n)$

จึงได้ ถ้า $(m,n)\sim(p,q)$ แล้ว $(p,q)\sim(m,n)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติสมมาตร

3. จำนวนธรรมชาติ m,n,p,q,r และ s ใด ๆ

ให้ $(m,n)\sim(p,q)$ และ $(p,q)\sim(r,s)$

จาก $\quad (m,n)\sim(p,q)$

จากนิยาม 3.1.1 $\quad m+q=n+p \quad ....(1)$

จาก $\quad (p,q)\sim(r,s)$

จากนิยาม 3.1.1 $\quad p+s=q+r \quad ....(2)$

นำสมการ $(1)+$ สมการ (2); $\quad (m+q)+(p+s)=(n+p)+(q+r)$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ $\quad (m+s)+(q+p)=(n+r)+(p+q)$

สมบัติการตัดออก $\quad m+s=n+r$

โดยนิยาม 3.1.1 $(m,n)\sim(r,s)$

จึงได้ว่า ถ้า $(m,n)\sim(p,q)$ และ $(p,q)\sim(r,s)$ แล้ว $(m,n)\sim(r,s)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติถ่ายทอด

ทฤษฎีบท 3.1.2 ให้ p,q และ r เป็นจำนวนธรรมชาติ ใด ๆ $(p+r,q+r)\sim(p,q)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p,q และ r ใด ๆ

เนื่องจาก $p+q+r=p+q+r$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ $(p+r)+q=(q+r)+p$

โดยนิยาม 3.1.1 $(p+r,q+r)\sim(p,q)$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ p,q และ r ใด ๆ $(p+r,q+r)\sim(p,q)$

ทฤษฎีบท 3.1.3 ให้ p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ $(p^*,p)\sim(q^*,q)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p และ q ใด ๆ

เนื่องจาก $p+q=p+q$

สมบัติการสลับที่ $q+p=p+q$

สัจพจน์ข้อ 4 $(q+p)^*=(p+q)^*$

$q+p^*=p+q^*$

สมบัติการสลับที่ $p^*+q=p+q^*$

โดยนิยาม 3.1.1 $(p^*,p)\sim(q^*,q)$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ p และ q ใด ๆ $(p^*,p)\sim(q^*,q)$

ทฤษฎีบท 3.1.4 จำนวนธรรมชาติ p และ q ใด ๆ $(p,p)\sim(q,q)$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.1.5 จำนวนธรรมชาติ p และ q ใด ๆ $(p+q,q)\sim(p^*,1)$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ถ้า $(m,n)\sim(p,q)$ จัดให้อยู่ในเซตเดียวกัน ซึ่งเรียกว่า ชั้นสมมูล (equivalent class)

และ $[m,n]=\{(x,y)\mid x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง } (x,y)\sim(m,n)\}$

จะได้ว่า $[m,n]=[p,q]$ ก็ต่อเมื่อ $m+q=n+p$

ชั้นสมมูล $[m,n]$ จะมีสมบัติเป็นจำนวนเต็ม

นิยาม 3.1.2 จำนวนเต็ม คือ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่สมมูลกับ (m,n) โดยที่ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $[m,n]$

ให้ Z แทนเซตของ $[m,n]$ ทั้งหมดที่สมมูลกับ (m,n) เรียก Z ว่าเซตจำนวนเต็ม โดย

$$Z=\{[m,n] \mid m \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ }\}$$

3.2 การบวกและการคูณจำนวนเต็ม

นิยาม 3.2.1 ให้ Z แทนเซตของจำนวนเต็ม กำหนดการดำเนินการบวก และการคูณ ดังนี้

การบวก $[m,n]+[p,q]=[m+p,n+q]$

การคูณ $[m,n]\times[p,q]=[m\times p+n\times q, m\times q+n\times p]$

สำหรับ m,n,p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

ใช้สัญลักษณ์ a แทนจำนวนเต็ม หรือกล่าวว่า $a\in Z$ หมายความว่า สามารถเขียนจำนวน a ในรูป $a=[m,n]$ สำหรับ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

สำหรับ จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ การคูณจำนวนเต็ม a ด้วยจำนวนเต็ม b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a\times b$ บางครั้งอาจจะเขียน $a\cdot b$ หรือ ab

ทฤษฎีบท 3.2.1 จำนวนธรรมชาติ p,q,r,s,x และ y ใด ๆ ถ้า $(p,q)\sim(r,s)$ และคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ แล้ว $(x,y)\cdot(p,q)\sim(x,y)\cdot(r,s)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p,q,r,s,x และ y ใด ๆ

ให้ $$(p,q)\sim(r,s)$$

$$p+s=q+r \qquad \text{...........}(1)$$

นำ x คูณสมการ (1); $$x\cdot(p+s)=x\cdot(q+r)$$

$$x\cdot p+x\cdot s=x\cdot q+x\cdot r \qquad \text{...........}(2)$$

นำ y คูณสมการ (1); $$y\cdot(p+s)=y\cdot(q+r)$$

$$y\cdot p+y\cdot s=y\cdot q+y\cdot r$$

หรือ $$y\cdot q+y\cdot r=y\cdot p+y\cdot s \qquad \text{...........}(3)$$

นำสมการ $(2)+$ สมการ (3); $$(x\cdot p+x\cdot s)+(y\cdot p+y\cdot r)=(x\cdot q+x\cdot r)+(y\cdot p+y\cdot s)$$

$$x\cdot p+y\cdot q+x\cdot s+y\cdot r=x\cdot q+y\cdot p+x\cdot r+y\cdot s$$

$$(x\cdot p+y\cdot q)+(x\cdot s+y\cdot r)=(x\cdot q+y\cdot p)+(x\cdot r+y\cdot s)$$

$$(x\cdot p+y\cdot q, x\cdot q+y\cdot p)\sim(x\cdot r+y\cdot s, x\cdot s+y\cdot r)$$

$$(x,y)\cdot(p,q)\sim(x,y)\cdot(r,s)$$

ดังนั้น ถ้า $(p,q)\sim(r,s)$ และสำหรับคู่อันดับ (x,y) ใด ๆ แล้ว $(x,y)\cdot(p,q)\sim(x,y)\cdot(r,s)$ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p,q,r,s,x และ y ใด ๆ

นิยาม 3.2.2 ให้ $a=[x,y]$ เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนธรรมชาติ

กล่าวว่า a เป็นสมาชิกจำนวนเต็มบวกก็ต่อเมื่อ มีจำนวนธรรมชาติ u ทำให้ $a=[y+u,y]$

กำหนดเซตจำนวนเต็มบวก $Z^{+}=\{[x,y]\,|\,x>y\}=\{1,2,3,\ldots\}$

กล่าวว่า a เป็นจำนวนเต็มลบ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนธรรมชาติ v ทำให้ $a=[x,x+v]$

กำหนดเซตจำนวนเต็มลบ $Z^{-}=\{[x,y]\,|\,x<y\}=\{-1,-2,-3,\ldots\}$

กำหนดเซตจำนวนศูนย์ $Z^{0}=\{[x,y]\,|\,x=y\}$

ทฤษฎีบท 3.2.2 จำนวนเต็ม a ใด ๆ จำนวน a จะสอดคล้องเซตต่อไปนี้เพียงเซตเดียว

1. a เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มบวก $\left(a\in Z^{+}\right)$
2. a เป็นสมาชิกของจำนวนศูนย์ $\left(a\in Z^{0}\right)$
3. a เป็นสมาชิกของจำนวนเต็มลบ $\left(a\in Z^{-}\right)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ให้ $a=[m,n]$ สำหรับ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

กรณีที่ 1 ถ้า $m=n$ จึงได้ว่า $a=[m,m]$

นั่นคือ a เป็นจำนวนศูนย์ หรือ $a\in Z^{0}$

กรณีที่ 2 ถ้า $m<n$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่ง $m+p=n$

จึงได้ว่า $a=[m,m+p]$

นั่นคือ a เป็นจำนวนเต็มลบ หรือ $a\in Z^{-}$

กรณีที่ 3 ถ้า $m>n$ ก็ต่อเมื่อ $n<m$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่ง $n+p=m$

จึงได้ว่า $a=[n+p,n]$

นั่นคือ a เป็นจำนวนเต็มบวก หรือ $a\in Z^{+}$

สำหรับ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ สอดคล้องสมบัติไตรวิภาค จึงทำให้ทั้ง 3 กรณีข้างต้นเกิดขึ้นเพียงกรณีเดียว

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a จะสอดคล้องเซตจำนวนเต็มบวก หรือจำนวนเต็มศูนย์ หรือจำนวนเต็มลบเพียงเซตเดียว

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ $a+b$ เป็นจำนวนเต็ม

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.4 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ $a+b$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ $m,n,p,q\in N$

พิจารณา $a+b=[m,n]+[p,q]$

นิยามการบวก $=[m+p,n+q]$

เนื่องจาก การบวก จำนวนธรรมชาติได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

จึงได้ $m+p$ และ $n+q$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือจำนวนเต็ม $[m+p,n+q]$ มีเพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a+b$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ทฤษฎีบท 3.2.5 สมบัติการสลับที่สำหรับการบวก ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ

$$a+b=b+a$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ $m,n,p,q\in N$

พิจารณา $a+b=[m,n]+[p,q]$

นิยามการบวก $=[m+p,n+q]$

สมบัติการสลับที่ $=[p+m,q+n]$

$=b+a$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a+b=b+a$

ทฤษฎีบท 3.2.6 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n],b=[p,q]$ และ $c=[s,t]$ โดยที่ $m,n,p,q,s,t\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a+(b+c) &= [m,n]+([p,q]+[s,t]) \\ &= [m,n]+[p+s,q+t] \\ &= [m+(p+s),n+(q+t)] \\ &= [(m+p)+s,(n+q)+t] \\ &= ([m+p,n+q])+[s,t] \\ &= ([m,n]+[p,q])+[s,t] \\ &= (a+b)+c \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a+(b+c)=(a+b)+c$

ทฤษฎีบท 3.2.7 เซตจำนวนเต็มจะมีจำนวนเต็ม b และมีเพียงจำนวนเดียวที่ทำให้ $a+b=b+a=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $b=[x,x]$ สำหรับ $m,n,x\in N$

จะแสดงว่าว่ามีจำนวนเต็ม b ซึ่งสอดคล้องว่า $a+b=a$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a+b &= [m,n]+[x,x] \\ &= [m+x,n+x] \\ &= [m,n] \\ &= a \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a+b=a$

เนื่องจากจำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติการสลับที่ $a+b=b+a=a$

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม b ซึ่งมีสมบัติว่า $a+b=a$

จะแสดงว่า b เป็นจำนวนเต็มเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่มีสมบัติว่า $a+b=a$ ให้ b' มีสมบัติว่า $a+b'=a$ ซึ่ง $b'=[p,q]$ สำหรับ $p,q\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a+0' &= a \\ [m,n]+[p,q] &= [m,n] \\ [m+p,n+q] &= [m,n] \\ m+p+n &= n+q+m \end{aligned}$$

สมบัติการตัดออก $(m+n)+p=(m+n)+q$

จึงได้ $p=q$

จาก $b'=[p,q]$ แทนค่า $p=q$

จึงได้ว่า $b'=[q,q]=[x,x]=b$

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม b และมีเพียงจำนวนเดียวที่ทำให้ $a+b=b+a=a$ แต่ละจำนวนเต็ม a

นิยาม 3.2.3 จำนวนเต็ม $[x,x]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 0 และเรียกว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก สำหรับ $x\in N$

จากทฤษฎีบท 3.2.7 และนิยาม 3.2.3 มี $0\in Z$ ซึ่งทำให้ $a+0=0+a=a$ สำหรับแต่ละ $a\in Z$ เรียก 0 และเรียกว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม b และมีเพียงจำนวนเดียวที่ทำให้

$$a+b=b+a=0$$

พิสูจน์ ให้จำนวนเต็ม $a=[m,n], b=[n,m]$ และ $0=[x,x]$ โดยที่ $m,n,x\in N$

จะแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม a มีจำนวนเต็ม b ซึ่งมีสมบัติว่า $a+b=0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a+(-a) &= [m,n]+[n,m] \\ &= [m+n, n+m] \\ &= [x,x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a+b=0$

เนื่องจากจำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติการสลับที่ $a+b=b+a=a$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a มีจำนวนเต็ม b ซึ่ง $a+b=0$

จะแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม a มีจำนวนเต็ม b เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+b=0$

สำหรับ $a\in Z$ สมมติว่า $b'\in Z$ อีกจำนวนซึ่งมีสมบัติ $a+b'=0$ ให้ $b'=[p,q]$ โดยที่ $p,q\in N$

จาก

$$\begin{aligned} a+b' &= 0 \\ [m,n]+[p,q] &= [x,x] \\ [m+p, n+q] &= [x,x] \\ m+p+x &= n+q+x \\ m+p &= n+q \\ p+m &= q+n \\ [p,q] &= [n,m] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $b'=[p,q]=[n,m]=b$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a จะมีจำนวนเต็ม b เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+b=b+a=a$

นิยาม 3.2.4 จำนวนเต็ม $a=[m,n]$ จะมีจำนวนเต็ม $[n,m]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $-a$ และเรียกว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ a โดยที่ $m,n\in N$

จาก ทฤษฎีบท 3.2.8 และนิยาม 3.2.4 สำหรับ $a\in Z$ มี $-a\in Z$ ซึ่งทำให้ $a+(-a)=(-a)+a=0$ เรียก $-a$ และเรียกว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ a

ทฤษฎีบท 3.2.9 สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n], b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ โดยที่ $m,n,p,q,r,s\in N$

จาก
$$a=b$$
$$[m,n]=[p,q]$$
$$m+q=n+p$$
นำ $(r+s)$ บวกทั้งสองข้าง;
$$(m+q)+(r+s)=(n+p)+(r+s)$$
$$(m+r)+(q+s)=(n+s)+(p+r)$$
$$[m+r,n+s]=[p+r,q+s]$$
$$[m,n]+[r,s]=[p,q]+[r,s]$$
$$a+c=b+c$$
ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

ทฤษฎีบท 3.2.10 สมบัติการจัดออกสำหรับการการ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ถ้า $a+b=c+b$ แล้ว $a=c$

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n], b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ เมื่อ $m,n,p,q,r,s\in N$
$$a+b=c+b$$
$$[m,n]+[p,q]=[r,s]+[p,q]$$
$$[m+p,n+q]=[r+p,s+q]$$
$$(m+p)+(s+q)=(n+q)+(r+p)$$
$$m+p+s+q=n+q+r+p$$
$$m+s=n+r$$
$$[m,n]=[r,s]$$
$$a=c$$
ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a+b=c+b$ แล้ว $a=c$

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.12 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ $a\cdot b$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.13 สมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ $a\cdot b=b\cdot a$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ $m,n,p,q\in N$

$$\begin{aligned}a\cdot b&=[m,n]\cdot[p,q]\\&=[m\cdot p+n\cdot q,m\cdot q+n\cdot p]\\&=[p\cdot m+q\cdot n,p\cdot n+q\cdot m]\\&=[p,q]\cdot[m,n]\\&=b\cdot a\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a\cdot b=b\cdot a$

ทฤษฎีบท 3.2.14 สมบัติการเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n],b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ โดยที่ $m,n,p,q,r,s\in N$

$$\begin{aligned}a\cdot(b\cdot c)&=[m,n]([p,q]\cdot[r,s])\\&=[m,n]([p\cdot r+q\cdot s,p\cdot s+q\cdot r])\\&=[m\cdot(p\cdot r+q\cdot s)+n\cdot(p\cdot s+q\cdot r),m\cdot(p\cdot s+q\cdot r)+n\cdot(p\cdot r+q\cdot s)]\\&=[m\cdot p\cdot r+m\cdot q\cdot s+n\cdot p\cdot s+n\cdot q\cdot r,m\cdot p\cdot s+m\cdot q\cdot r+n\cdot p\cdot r+n\cdot q\cdot s]\\&=[m\cdot p\cdot r+n\cdot q\cdot r+m\cdot q\cdot s+n\cdot p\cdot s,m\cdot p\cdot s+n\cdot q\cdot s+m\cdot q\cdot r+n\cdot p\cdot r]\\&=[(m\cdot p+n\cdot q)\cdot r+(m\cdot q+n\cdot p)\cdot s,(m\cdot p+n\cdot q)\cdot s+(m\cdot q+n\cdot p)\cdot r]\\&=([m\cdot p+n\cdot q,m\cdot q+n\cdot p])[r,s]\\&=([m,n]\cdot[p,q])\cdot[r,s]\\&=(a\cdot b)\cdot c\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

ทฤษฎีบท 3.2.15 เซตจำนวนเต็มมีจำนวนเต็ม b และมีจำนวนเดียวที่ $a\cdot b=b\cdot a=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

พิสูจน์ จะแสดงว่า มีจำนวนเต็มมี b ที่มีสมบัติว่า $a\cdot b=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

ให้ $a=[m,n]$ และ $b=[x+1,x]$ เมื่อ $m,n,x\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned}a\cdot b&=[m,n]\cdot[x+1,x]\\&=[m\cdot(x+1)+n\cdot x,n\cdot(x+1)+m\cdot x]\\&=[m\cdot x+m+n\cdot x,n\cdot x+n+m\cdot x]\\&=[m\cdot x+n\cdot x+m,m\cdot x+n\cdot x+n]\end{aligned}$$

$$=[m,n]=a$$

ดังนั้น $a\cdot b=a$

เนื่องจาก จำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติการสลับที่ $a\cdot b=b\cdot a=a$

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม b ซึ่งมีสมบัติว่า $a\cdot b=b\cdot a=a$

จะแสดงว่ามี b จำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a\cdot b=a$ สมมติ มี $b'\in Z$ มีสมบัติว่า $a\cdot b'=a$ ให้ $b'=[p,q]$ โดยที่ $p,q\in N$

$$a\cdot b'=a$$
$$[m,n]\cdot[p,q]=[m,n]$$
$$[m\cdot p+n\cdot q,n\cdot p+m\cdot q]=[m,n]$$
$$(m\cdot p+n\cdot q)+n=(n\cdot p+m\cdot q)+m$$
$$m\cdot p+(n\cdot q+n)=n\cdot p+(m\cdot q+m)$$
$$m\cdot p+n\cdot q^{*}=n\cdot p+m\cdot q^{*}$$
$$p\cdot m+q^{*}n=q^{*}m+p\cdot n$$

ใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ของ m และ n

จึงได้ $p=q^{*}=q+1$

จากที่กำหนดให้ $1'=[p,q]$ แทนค่า $p=q^{*}=q+1$

จึงได้ $1'=[p,q]=[q+1,q]=[x+1,x]=1$

ดังนั้น เซตจำนวนเต็มมี $b\in Z$ และมีจำนวนเดียวที่ $a\cdot b=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

นิยาม 3.4.5 จำนวนเต็ม $[x+1,x]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 1 เมื่อ $x\in N$ และเรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

จากทฤษฎีบท 3.2.15 และนิยาม 3.4.5 มี $1\in Z$ ซึ่งทำให้ $a\cdot 1=1\cdot a=a$ สำหรับทุกๆ $a\in Z$ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

ทฤษฎีบท 3.2.16 สมบัติการกระจาย ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

พิสูจน์ สำหรับ $a,b,c\in Z$

ให้ $a=[m,n],b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ โดยที่ $m,n,p,q,r,s\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned}a\cdot(b+c)&=[m,n]\cdot([p,q]+[r,s])\\&=[m,n]\cdot([p+r,q+s])\\&=[m\cdot(p+r)+n\cdot(q+s),m\cdot(q+s)+n\cdot(p+r)]\\&=[m\cdot p+m\cdot r+n\cdot q+n\cdot s,m\cdot q+m\cdot s+n\cdot p+n\cdot r]\\&=[m\cdot p+n\cdot q+m\cdot r+n\cdot s,m\cdot q+n\cdot p+m\cdot s+n\cdot r]\end{aligned}$$

$$=[m\cdot p+n\cdot q,m\cdot q+m\cdot p]+[m\cdot r+n\cdot s,m\cdot s+n\cdot r]$$
$$=[m,n]\cdot[p,q]+[m,n]\cdot[r,s]$$
$$=a\cdot b+a\cdot c$$

ดังนั้นทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

ทฤษฎีบท 3.2.17 สมบัติการตัดออกสำรับการคูณ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆถ้า $a\cdot b=c\cdot b$ และ $b\neq 0$ แล้ว $a=c$

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n],b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ เมื่อ $m,n,p,q,r,s\in N$ โดยที่ $b\neq 0$

เนื่องจาก $b\neq 0$ ดังนั้น $b\in Z^{+}$ หรือ $b\in Z^{-}$

กรณีที่ 1 ให้ $b\in Z^{+}$ โดยนิยาม มี $y\in N$ ซึ่งทำให้ $b=[q+y,q]$

ให้
$$a\cdot b=c\cdot b$$
$$[m,n][q+x,q]=[r,s][q+x,q]$$
$$[m\cdot(q+x)+n\cdot q,m\cdot q+n\cdot(q+x)]=[r\cdot(q+x)+s\cdot q,r\cdot q+s\cdot(q+x)]$$
$$[m\cdot q+m\cdot x+n\cdot q,m\cdot q+n\cdot q+n\cdot x]=[r\cdot q+r\cdot x+s\cdot q,r\cdot q+s\cdot p+s\cdot x]$$
$$(m\cdot q+m\cdot x+n\cdot g)+(r\cdot q+s\cdot q+s\cdot x)=(m\cdot q+n\cdot q+n\cdot x)+(r\cdot q+r\cdot x+s\cdot p)$$
$$m\cdot x+s\cdot x=n\cdot x+r\cdot x$$
$$(m+s)\cdot x=(n+r)\cdot x$$
$$m+s=n+r$$
$$[m,n]=[r,s]$$
$$a=c$$

กรณีที่ 2 ให้ $b\in Z^{-}$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จากกรณีที่ 1 และ2 จึงได้ว่าทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a\cdot b=c\cdot b$ และ $b\neq 0$ แล้ว $a=c$

ทฤษฎีบท 3.2.18 สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ ถ้า $a=b$ แล้ว $a\cdot c=b\cdot c$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.19 ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ใด ๆ a ไม่เป็นจำนวนเต็มลบและจำนวนเต็มศูนย์

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก a ใด ๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จากนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ x ซึ่ง $m=n+x$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ จึงได้ $a=[n+x,n]$

ให้ $[p,q]$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งแทนจำนวนเต็มบวก a อีกจำนวนหนึ่งดังนั้น

$$[m,n]=[p,q]$$

$$m+q=n+p$$

$$(n+x)+q=n+p$$

สมบัติการตัดออก $\quad n+(x+q)=n+p$

จึงได้ $\quad (x+q)=p$

หรือ $\quad p=q+x$

แทนค่า $[p,q]=[q+x,q]$ จึงได้ $[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็มบวก a ใด ๆ a ไม่เป็นจำนวนเต็มลบและจำนวนเต็มศูนย์

ทฤษฎีบท 3.2.20 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม t เพียงตัวเดียวซึ่ง $b+t=a$

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n], b=[p,q]$ และ $t=[m+q,n+p]$ สำหรับ $m,n,p,q\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} b+t &= [p,q]+[m+q,n+p] \\ &= [m+p+q,n+p+q] \\ &= [m,n] \\ &= a \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $b+t=a$

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม t ซึ่ง $b+t=a$

จะแสดงว่ามีจำนวนเต็ม t เพียงจำนวนจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $b+t=a$

ให้ $t'\in Z$ อีกจำนวนที่มีสมบัติว่า $b+t'=a$ โดย $t'=[x,y]$ สำหรับ $x,y\in N$

พิจารณา
$$\begin{aligned} b+t' &= a \\ [p,q]+[x,y] &= [m,n] \\ [p+x,q+y] &= [m,n] \\ (p+x)+n &= (q+y)+m \\ x+(n+p) &= y+(m+q) \\ [x,y] &= [m+q,n+p] \\ t' &= t \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $t'=t$

ดังนั้น มีจำนวนเต็ม t จำนวนเดียวเท่า $b+t=a$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

ทฤษฎีบท 3.2.21 ผลบวกของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใด ๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มบวกสำหรับ m และ n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

โดยนิยามมีจำนวนธรรมชาติ x ซึ่งทำให้ $a=[n+x,n]$

และ $b=[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ p และ q ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ y ซึ่งทำให้ $b=[q+y,q]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a+b &= [m,n]+[p,q] \\ &= [n+x,n]+[q+y,q] \\ &= [(n+x)+(q+y),n+q] \\ &= [n+q+(x+y),n+q] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a+b$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนใด ๆ เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 3.2.22 ผลบวกของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มลบ

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.23 ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนใด ๆ เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใด ๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $m,n\in N$

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ x ซึ่งทำให้ $a=[n+x,n]$

และ $b=[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $p,q\in N$

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ y ซึ่งทำให้ $b=[q+y,q]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a\cdot b &= [m,n]\cdot[p,q] \\ &= [(n+x)\cdot(q+y)+n\cdot q,(n+x)\cdot q+n\cdot(q+y)] \\ &= [n\cdot q+n\cdot y+x\cdot q+x\cdot y+n\cdot q,n\cdot q+x\cdot q+n\cdot q+n\cdot y] \\ &= [n\cdot q+x\cdot q+n\cdot q+n\cdot y+(x\cdot y),n\cdot q+x\cdot q+n\cdot q+n\cdot y] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนใด ๆเป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 3.2.24 ผลคูณของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มบวก

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.25 ผลคูณระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเต็มลบ

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มบวก a และจำนวนเต็มลบ b ใด ๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $m,n\in N$

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ x ซึ่งทำให้ $a=[n+x,n]$

และ $b=[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ $p,q\in N$

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ y ซึ่งทำให้ $b=[p,p+y]$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
a\cdot b &= [m,n]\cdot[p,q]\\
&= [n+x,n]\cdot[p,p+y]\\
&= [(n+x)\cdot p+n\cdot(p+y),(n+x)\cdot(p+y)+n\cdot p]\\
&= [n\cdot p+x\cdot p+n\cdot p+n\cdot y,n\cdot p+n\cdot y+x\cdot p+x\cdot y+n\cdot p]\\
&= [n\cdot p+x\cdot p+n\cdot p+n\cdot y,n\cdot p+x\cdot p+n\cdot p+n\cdot y+(x\cdot y)]
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็มลบ

ดังนั้นผลคูณของจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเต็มลบ

ทฤษฎีบท 3.2.26 จำนวนเต็ม a ใด ๆ a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ (a^2 หมายถึง $a\cdot a$)

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ ใด ๆโดยที่ $m,n\in N$

กรณีที่ 1 ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ x

ซึ่งทำให้ $a=[n+x,n]$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot a\\
&= [n+x,n]\cdot[n+x,n]\\
&= [(n+x)\cdot(n+x)+n\cdot n,(n+x)\cdot n+n\cdot(n+x)]\\
&= [n\cdot n+n\cdot x+x\cdot n+x\cdot x+n\cdot n,n\cdot n+x\cdot n+n\cdot n+n\cdot x]\\
&= [n^2+x\cdot n+n^2+n\cdot x+(x^2),n^2+x\cdot n+n^2+n\cdot x]
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ 2 ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนศูนย์ โดยนิยาม $a=[m,m]$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
a^2 &= a\cdot a\\
&= [m\cdot m+m\cdot m,m\cdot m+m\cdot m]\\
&= [m,m]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

จึงได้ว่า a^2 เป็นจำนวนศูนย์

กรณีที่ 3 ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มลบ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จากกรณีที่ 1 กรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 จึงได้ว่าสำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ

ทฤษฎีบท 3.2.27 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ถ้า $a\cdot b=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$

พิสูจน์ จำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ ใด ๆ โดยที่ $m,n,p,q\in N$

กรณีที่ 1 ถ้า $b\neq 0$ ดังนั้น $b>0$ หรือ $b<0$

1.1 ถ้า $b>0$ จากนิยาม จะมี $x\in N$ ใด ๆ ซึ่งทำให้ $b=[q+x,q]$

ให้

$$a\cdot b=0$$

$$[m,n]\cdot[q+x,q]=[r,r] \text{ สำหรับ } r \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ}$$

$$[m\cdot(q+x)+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot(q+x)]=[r,r]$$

$$[m\cdot q+m\cdot x+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot q+m\cdot x]=[r,r]$$

$$(m\cdot q+m\cdot x+n\cdot q)+r=(m\cdot q+n\cdot q+n\cdot x)+r$$

$$m\cdot x=n\cdot x$$

$$m=n$$

ดังนั้น $a=0$

1.2 ถ้า $b<0$ จากนิยาม จะมี $x\in N$ ใด ๆ ซึ่งทำให้ $b=[p,p+x]$

ให้

$$a\cdot b=0$$

$$[m,n]\cdot[p,p+x]=[r,r] \quad \text{สำหรับ } r\in N$$

$$[m\cdot p+n\cdot(p+x), m\cdot(p+x)+n\cdot p]=[r,r]$$

$$[m\cdot p+n\cdot p+n\cdot x, m\cdot p+m\cdot x+n\cdot p]=[r,r]$$

$$m\cdot p+n\cdot p+n\cdot x+r=m\cdot p+m\cdot x+n\cdot p+r$$

$$n\cdot x=m\cdot x$$

$$n=m$$

ดังนั้น $a=0$

จาก 1.1 และ1.2 จึงได้ว่า ให้ $a\cdot b=0$ ถ้า $b\neq 0$ แล้ว $a=0$

กรณีที่ 2 ถ้า $a\neq 0$ ดังนั้น $a>0$ หรือ $a<0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ถ้า $a\cdot b=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$

ทฤษฎีบท 3.2.28 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $-1=[p,p+1]$ โดยที่ $m,n,p\in N$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a\cdot(-1) &= [m,n]\cdot[p,p+1] \\ &= [m\cdot p+n\cdot(p+1), m\cdot(p+1)+n\cdot p] \\ &= [m\cdot p+n\cdot p+n, m\cdot p+m+n\cdot p] \\ &= [(mp+np)+n,(mp+np)+m]=[n,m] \\ &= -a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot a &= [p, p+1]\cdot[m,n] \\
&= [p\cdot m+(p+1)\cdot n, p\cdot n+(p+1)\cdot m] \\
&= [p\cdot m+p\cdot n+n, p\cdot n+p\cdot m+m] \\
&= [(p\cdot m+p\cdot n)+n, (p\cdot m+p\cdot n)+m] = [n,m] \\
&= -a
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$

ทฤษฎีบท 3.2.29 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $-(-a)=a$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n], -a=[n,m]$ และ $-1=[p, p+1]$ โดยที่ $m,n,p\in N$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
-(-a) &= (-1)\cdot(-a) \\
&= [p, p+1]\cdot[n,m] \\
&= [p\cdot n+(p+1)\cdot m, p\cdot m+(p+1)\cdot n] \\
&= [p\cdot n+p\cdot m+m, p\cdot m+p\cdot n+n] \\
&= a
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ $-(-a)=a$

ทฤษฎีบท 3.2.30 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $a\cdot 0=0\cdot a=0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม $a=[m,n]$ และ $0=[x,x]$ โดยที่ $m,n,x\in N$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= [m,n]\cdot[x,x] \\
&= [m\cdot x+n\cdot x, m\cdot x+n\cdot x] \\
&= 0 \\
0\cdot a &= [x,x]\cdot[m,n] \\
&= [x\cdot m+x\cdot n, x\cdot m+x\cdot n] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a\cdot 0=0\cdot a=0$

ทฤษฎีบท 3.2.31 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $-(a+b)=-a+(-b)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
-(a+b) &= (-1)\cdot(a+b) \\
&= (-1)\cdot a+(-1)\cdot b \\
&= -a+(-b)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $-(a+b)=-a+(-b)$

ทฤษฎีบท 3.2.32 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

$$\begin{aligned}(-a)\cdot b &= [(-1)\cdot a]\cdot b\\ &= a\cdot[(-1)\cdot b]\\ &= a\cdot(-b) \qquad \text{...........}(1)\\ (-a)\cdot b &= [(-1)\cdot a]\cdot b\\ &= (-1)\cdot(a\cdot b)\\ &= -(a\cdot b) \qquad \text{...........}(2)\end{aligned}$$

จากสมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$

ทฤษฎีบท 3.2.33 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.2.34 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $(a+b)^2 = a^2 + 2a\cdot b + b^2$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

3.3 การลบจำนวนเต็ม

นิยาม 3.3.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ กำหนดการลบของ a และ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a-b$ โดยที่ $a-b = a+(-b)$

จากนิยามพบว่า $a-b$ เป็นจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบท 3.3.1 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $a-0 = a$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}a-0 &= a+(-0)\\ &= a+(-1)\cdot 0\\ &= a+0\\ &= a\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a-0 = a$

ทฤษฎีบท 3.3.2 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $a-a = 0$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.3.3 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $0-a=-a$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ

พิจารณา $0-a=0+(-a)$

$=-a$ เมื่อ 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ $0-a=-a$

ทฤษฎีบท 3.3.4 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a-b=c$ ก็ต่อเมื่อ $a=c+b$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ

ให้

$$a-b=c$$
$$a+(-b)=c$$
$$[a+(-b)]+b=c+b$$
$$a+[(-b)+b]=c+b$$
$$a+0=c+b$$
$$a=c+b$$

จึงได้ว่า ถ้า $a-b=c$ แล้ว $a=c+b$

$\Leftarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ

ให้

$$a=c+b$$

สำหรับจำนวนเต็ม b มี $-b$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง

$$a+(-b)=(c+b)+(-b)$$
$$a-b=c+[b+(-b)]$$
$$a-b=c+(0)$$
$$a-b=c$$

จึงได้ว่า ถ้า $a=c+b$ แล้ว $a-b=c$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a-b=c$ ก็ต่อเมื่อ $a=c+b$

ทฤษฎีบท 3.3.5 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a=b$ ก็ต่อเมื่อ $a-b=0$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.3.6 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ

พิจารณา $a\cdot(b-c)=a\cdot[b+(-c)]$

$=a\cdot b+a\cdot(-c)$

$$= a \cdot b + (-a \cdot c)$$
$$= a \cdot b - a \cdot c$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a, b และ c ใด ๆ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

ทฤษฎีบท 3.3.7 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot [a + (-b)]$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 + (-b^2) \\ &= a^2 + (-b^2) + [a \cdot b + (-a \cdot b)] \\ &= a^2 + a \cdot (-b) + a \cdot b + (-b^2) \\ &= a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) \\ &= (a+b) \cdot [a + (-b)] \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot [a + (-b)]$

3.4 ลำดับของจำนวนเต็ม

นิยาม 3.4.1 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ กล่าวว่า a น้อยกว่า b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b$ เป็นจำนวนเต็มลบและจะกล่าวว่า a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a \le b$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ หรือ $a < b$

นิยาม 3.4.2 จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ กล่าวว่า a มากกว่า b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a > b$ ต่อเมื่อ $a - b$ เป็นจำนวนเต็มบวกและจะกล่าวว่า a มากกว่าหรือเท่ากับ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a \ge b$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ หรือ $a > b$

สมบัติไตรวิภาค

สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ จะต้องสอดคล้องสมบัติข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้ เพียงข้อเดียว

1. $a = b$ 2. $a > b$ 3. $a < b$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

พิจารณา $a - b$ เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $a > b$ สอดคล้องสมบัติข้อ 3.

$a - b$ เป็นจำนวนศูนย์ ก็ต่อเมื่อ $a = b$ สอดคล้องสมบัติข้อ 1.

$a - b$ เป็นจำนวนเต็มลบ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ สอดคล้องสมบัติข้อ 2.

จากทฤษฎีบท 3.2.1 จึงได้ว่า $a - b$ จะสอดคล้องเซตจำนวนเต็มบวก หรือเซตจำนวนเต็มลบ หรือเซตจำนวนศูนย์ เพียงเซตเดียว

ดังนั้น จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ จะต้องสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อใดข้อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 3.4.1 จำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $a>0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณา $a-0=a$ เป็นจำนวนเต็มบวก

จึงได้ว่า $a>0$

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $a>0$

$\Leftarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ให้ $a>0$

โดยนิยาม $a-0$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 3.3.1 $a-0=a$

จึงได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มบวก

นั่นคือ ถ้า $a>0$ แล้ว a เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $a>0$

ทฤษฎีบท 3.4.2 จำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนเต็มลบ ก็ต่อเมื่อ $a<0$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.4.3 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a>b$ และ $b>c$ แล้ว $a>c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ให้ $a>b$ และ $b>c$

จาก $a>b$ โดยนิยาม $a-b\in Z^{+}$

จากทฤษฎีบท 3.4.2 $a-b>0$ ....(1)

และจาก $b>c$ โดยนิยาม $b-c\in Z^{+}$

จากทฤษฎีบท 3.4.2 $b-c>0$ ....(2)

นำสมการ $(1)+$ สมการ (2); $(a-b)+(b-c)>0$

$$a+(-b)+b+(-c)>0$$

$$[a+(-c)]+[b+(-b)]>0$$

$$(a-c)+0>0$$

$$a-c>0$$

$$a>c$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a>b$ และ $b>c$ แล้ว $a>c$

ทฤษฎีบท 3.4.4 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a<b$ แล้ว $a+c<b+c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ให้ $a<b$

จาก $a<b$ โดยนิยาม 3.4.1 $\quad a-b\in Z^-$

$$(a-b)+0\in Z^-$$

$$(a-b)+(c-c)\in Z^-$$

$$[a+(-b)]+[c+(-c)]\in Z^-$$

$$(a+c)+(-b+(-c))\in Z^-$$

$$(a+c)+((-1)\cdot b+(-1)\cdot c)\in Z^-$$

$$(a+c)+(-1)\cdot(b+c)\in Z^-$$

$$(a+c)-(b+c)\in Z^-$$

$$(a+c)<(b+c)$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $a<b$ แล้ว $a+c<b+c$

ทฤษฎีบท 3.4.5 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $b<c$ และ $a>0$ แล้ว $a\cdot b<a\cdot c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ให้ $b<c$ และ $a>0$

จาก $a<b$ โดยนิยาม 3.4.1; $\quad a-b\in Z^-$

และ $a>0$ โดยทฤษฎีบท 3.4.2 ; $\quad a\in Z^+$

จาก ทฤษฎีบท 3.2.25 ผลคูณระหว่างจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเต็มลบ

จึงได้ว่า $\quad a\cdot(b-c)\in Z^-$

$$a\cdot b-a\cdot c\in Z^-$$

โดยนิยาม 3.4.1; $\quad a\cdot b<a\cdot c$

ดังนั้น จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $b<c$ และ $a>0$ แล้ว $a\cdot b<a\cdot c$

ทฤษฎีบท 3.4.6 จำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ ถ้า $b<c$ และ $a<0$ แล้ว $a\cdot b>a\cdot c$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

3.5 สรุป

1. จำนวนเต็มใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Z นิยามโดย $Z=\{[a,b]\,|\,a,b\in N\}$ สำหรับคู่อันดับ $[a,b]$ คือการดำเนินการ $[a,b]=a-b$

2. การบวกและการคูณจำนวนเต็ม สำหรับจำนวนธรรมชาติ m,n,p และ q ใด ๆ

   2.1 $[m,n]+[p,q]=[m+p,n+q]$

   2.2 $[m,n]\times[p,q]=[m\times p+n\times q,m\times q+n\times p]$

3. สมบัติสำหรับการบวก สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ

3.1 การปิด; $a+b$ เป็นจำนวนเต็ม

3.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว; $a+b$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

3.3 การสลับที่ ; $a+b=b+a$

3.4 การเปลี่ยนกลุ่ม; $a+(b+c)=(a+b)+c$

3.5 การมีเอกลักษณ์ ; มีจำนวนเต็ม 0 ซึ่งทำให้ $a+0=0+a=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a และเรียกจำนวนเต็ม 0 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

3.6 การมีตัวผกผัน; สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม a จะมีจำนวนเต็ม $-a$ ซึ่งทำให้ $a+(-a)=(-a)+a=0$ เรียก $-a$ ว่าเป็นตัวผกผันสำหรับการบวกหรือจำนวนลบของ a

3.7 การตัดออก ถ้า $a+b=c+b$ แล้ว $a=c$

3.8 การบวกทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่เท่ากัน; ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

4. สมบัติการคูณจำนวนเต็ม สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใด ๆ

4.1 การปิด; $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม

4.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว; $a\cdot b$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

4.3 การสลับที่ ; $a\cdot b=b\cdot a$

4.4 การเปลี่ยนกลุ่ม; $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

4.5 การมีเอกลักษณ์; มีจำนวนจำนวนเต็ม 1 ซึ่งทำให้ $a\cdot 1=1\cdot a=a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a และเรียกจำนวน 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของเซตจำนวนเต็ม

4.6 การแจกแจง; $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

4.7 การตัดออกถ้า; $a\cdot b=c\cdot b$ และ $b\neq 0$ แล้ว $a=c$

4.8 การคูณทั้งสองข้างด้วยจำนวนที่เท่ากัน; ถ้า $a=b$ แล้ว $a\cdot c=b\cdot c$

5. การลบจำนวนเต็ม สำหรับ $a,b\in Z$ จะได้ว่า $a-b=a+(-b)$

6. ความสัมพันธ์ลำดับของจำนวนเต็ม จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ

6.1 $a<b$ ก็ต่อเมื่อ $a-b$ เป็นจำนวนเต็มลบ

6.2 $a\leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a=b$ หรือ $a<b$

6.3 $a>b$ ก็ต่อเมื่อ $a-b$ เป็นจำนวนเต็มบวก

6.4 $a\geq b$ ก็ต่อเมื่อ $a=b$ หรือ $a>b$

7. สมบัติไตรวิภาค จำนวนเต็ม a และ b ใด ๆจะต้องสอดคล้องสมบัติข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เพียงข้อเดียว คือ 1. $a=b$ 2. $a>b$ 3. $a<b$

แบบฝึกหัด 3

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.4 สำหรับ $p,q \in N$; $(p,p) \sim (q,q)$
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.5 สำหรับ $p,q \in N$; $(p+q,q) \sim (p^*,1)$
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.3 สำหรับ $a,b \in Z$ แล้ว $a+b \in Z$
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.11 สำหรับ $a,b \in Z$ แล้ว $a \cdot b \in Z$
5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.12 สำหรับ $a,b \in Z$ แล้ว $a \cdot b$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว
6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.17 สำหรับ $a,b,c \in Z$ ถ้า $a \cdot b = c \cdot d$ และ $b \in Z^-$ แล้ว $a = c$
7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.18 สำหรับ $a,b,c \in Z$ ถ้า $a = b$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot c$
8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.22 ผลบวกของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มลบ
9. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.24 ผลคูณของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มบวก
10. จากทฤษฎีบท 3.2.26 สำหรับ $a \in Z$ แล้ว a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ ให้พิสูจน์กรณีที่ 3 ถ้า $a \in Z^-$
11. จากทฤษฎีบท 3.2.27 สำหรับ $a,b \in Z$; ถ้า $a \cdot b = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ ให้พิสูจน์กรณีที่ 2 คือ ถ้า $a \neq 0$
12. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.33 สำหรับ $a,b \in Z$; $(-a)\cdot(-b) = a \cdot b$
13. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.2.34 สำหรับ $a,b \in Z$; $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$
14. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.2 จำนวนเต็ม a ใด ๆ $a - a = 0$
15. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.5 สำหรับ $a,b \in Z$; $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b = 0$
16. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.2 จำนวนเต็ม a ใด ๆ a จำนวนเต็มลบ ก็ต่อเมื่อ $a < 0$
17. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.6 สำหรับ $a,b,c \in Z$ ถ้า $b < c$ และ $a < 0$ แล้ว $a \cdot b > a \cdot c$

บทที่ 4
จำนวนตรรกยะ

บทนี้จะศึกษาถึงการสร้างจำนวนจำนวนตรรกยะ การบวกและการคูณจำนวนตรรกยะ ทฤษฎีบทสำหรับการบวกและการคูณจำนวนตรรกยะ การลบและการหารจำนวนตรรกยะ ลำดับของจำนวนตรรกยะ และทฤษฎีบทสำรับลำดับของจำนวนตรรกยะ

4.1 นิยามและสมบัติเบื้องต้น

พิจารณา สมการ $3\cdot x = 5$ สำหรับ x ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะพบว่า ไม่สามารถหาผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการข้างต้นได้ จึงต้องขยายจำนวนเต็มออกไป ซึ่งจำนวนใหม่นี้จะเป็นจำนวนที่อยู่ในรูปของผลหารระหว่าง 5 กับ 3 ซึ่งจะเป็นผลเฉลยของสมการข้างต้น จำนวนใหม่นี้เรียกจำนวนตรรกยะ

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $b \neq 0$ กล่าวว่า b หาร a ลงตัว ถ้ามีจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้ $b \cdot c = a$ เรียก c ว่าผลหารของ a หารด้วย b ใช้สัญลักษณ์ $\frac{a}{b}$ หรือ

$$c = \frac{a}{b} \text{ ก็ต่อเมื่อ } b\cdot c = a \text{ โดยที่ } b \neq 0$$

ถ้าให้ (a,b) เป็นคู่อันดับ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ โดยที่ $b \neq 0$ กำหนดให้คู่อันดับนี้มีการดำเนินการของ “$\frac{a}{b}$” และกล่าวว่า (a,b) แทนจำนวนตรรกยะบางจำนวน

ตัวอย่าง 4.1.1 พิจารณา คู่อับดับ $(5,3)$ แทนจำนวนตรรกยะ $\frac{5}{3}$

คู่อับดับ $(10,6)$ แทนจำนวนตรรกยะ $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

คู่อับดับ $(15,9)$ แทนจำนวนตรรกยะ $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

ถ้าให้ (a,b) เป็นคู่อันดับ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และกำหนดให้คู่อันดับนี้แทนการดำเนินการ “$\frac{a}{b}$”แล้วจะได้ว่า (a,b) แทนจำนวนตรรกยะบางจำนวนได้

จากที่กำหนดให้ (a,b) แทนจำนวนตรรยะบางจำนวนโดยมีการดำเนินการ $(a,b) = \frac{a}{b}$

เนื่องจาก คู่อับดับ $(5,3),(10,6)$ และ $(15,12)$ ต่างแทนจำนวนตรรกยะ $\frac{5}{3}$ จึงกล่าวได้ว่าคู่อันดับทั้งสามมีความสัมพันธ์กัน ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $(5,3)R(10,6)$ หรือ $(5,3)R(15,9)$

แต่การดำเนินการหารบนเซตจำนวนเต็มไม่สอดคล้องสมบัติการปิดซึ่งมีการจัดรูปแบบการดำเนินการใหม่ดังนี้

$$(5,3)R(10,6)$$
$$\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$$
$$5\times 6=10\times 3$$

นิยาม 4.1.1 กำหนดเซต $K=\{(a,b)\mid a$ และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b\neq 0\}$ และกำหนดความสัมพันธ์ " $\sim$ " บนเซต K ดังนี้ สำหรับ $a,b,c,d\in Z$ โดยที่ $b,d\neq 0$

$(a,b)\sim(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a\cdot d=b\cdot c$

ทฤษฎีบท 4.1.1 ความสัมพันธ์ " $\sim$ " มีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล สำหรับ $a,b,c,d,p,q\in Z$ โดยที่ $b,d,q\neq 0$ คือ

1. สมบัติสะท้อน; $(a,b)\sim(a,b)$
2. สมบัติสมมาตร; ถ้า $(a,b)\sim(c,d)$ แล้ว $(c,d)\sim(a,b)$
3. สมบัติถ่ายทอด; ถ้า $(a,b)\sim(c,d)$ และ $(c,d)\sim(p,q)$ แล้ว $(a,b)\sim(p,q)$

พิสูจน์ 1. สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ โดยที่ $b\neq 0$

เนื่องจากจำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติการสลับที่

จึงได้ $\quad a\cdot b=b\cdot a$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a,b)\sim(a,b)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติสะท้อน

2. สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c และ d ใด ๆ โดยที่ $b,d\neq 0$

ให้ $\quad (a,b)\sim(c,d)$

โดยนิยาม 4.1.1 $\quad a\cdot d=b\cdot c$

สมบัติการสลับที่ $\quad d\cdot a=c\cdot b$

$\quad c\cdot b=d\cdot a$

โดยนิยาม 4.1.1 $\quad (c,d)\sim(a,b)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติสมมาตร

3. สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c,d,p และ q ใด ๆ โดยที่ $b,d,q\neq 0$

ให้ $(a,b)\sim(c,d)$ และ $(c,d)\sim(p,q)$

จาก $\quad (a,b)\sim(c,d)$

โดยนิยาม 4.1.1 $\quad a\cdot d=b\cdot c \quad$ ....(1)

และจาก $\quad (c,d)\sim(p,q)$

โดยนิยาม 4.1.1 $\quad c\cdot q=d\cdot p \quad$ ....(2)

นำสมการ $(1)\times$ สมการ (2); $\quad (a\cdot d)\cdot(c\cdot q)=(b\cdot c)\cdot(d\cdot p)$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ $(a\cdot q)\cdot(c\cdot d)=(b\cdot p)\cdot(c\cdot d)$

$$a\cdot q=b\cdot p$$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a,b)\sim(p,q)$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ $\sim$ สอดคล้องสมบัติถ่ายทอด

ทฤษฎีบท 4.1.2 จำนวนเต็ม a,b และ c โดยที่ $b,c\neq 0$ จะได้ว่า $(a\cdot c,b\cdot c)\sim(a,b)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c โดยที่ $b,c\neq 0$

เนื่องจาก $a\cdot b\cdot c=a\cdot b\cdot c$

$$a\cdot c\cdot b=b\cdot c\cdot a$$

$$(a\cdot c)\cdot b=(b\cdot c)\cdot a$$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a\cdot c,b\cdot c)\sim(a,b)$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c โดยที่ $b,c\neq 0$ จะได้ว่า $(a\cdot c,b\cdot c)\sim(a,b)$

ทฤษฎีบท 4.1.3 จำนวนเต็ม a,b และ c โดยที่ $b,c\neq 0$ จะได้ว่า $(a\cdot b,b)\sim(a\cdot c,c)\sim(a,1)$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.1.4 จำนวนเต็ม b และ c โดยที่ $b,c\neq 0$ จะได้ว่า $(b,b)\sim(c,c)\sim(1,1)$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ถ้า $(a,b)\sim(c,d)$ อยู่ในเซตเดียวกัน เรียกว่า ชั้นมูลฐาน กำหนดเซต $[a,b]$ เป็นชั้นสมมูล เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) ที่สมมูลกับ (a,b) คือ

$$[a,b]=\{(x,y)\mid x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนเต็ม } y\neq 0 \text{ ซึ่ง } (x,y)\sim(a,b)\}$$

จะได้ว่า $[a,b]=[c,d]$ ก็ต่อเมื่อ $(a,b)\sim(c,d)$

ดังนั้น เซต K สามารถแบ่งเป็นเซตย่อย (ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน) ได้เป็น $K=\{[a,b],[c,d],...\}$ ชั้นสมมูล $[a,b]$ จะมีสมบัติเป็นจำนวนตรรกยะ

นิยาม 4.1.2 กำหนดเซต Q แทนเซตจำนวนตรรกยะ นิยามโดย $Q=\{[a,b]\mid$ สำหรับ $a,b\in Z$ โดยที่ $b\neq 0\}$

ถ้าให้ r แทนจำนวนตรรกยะ จะสามารถเขียน r ในรูปแบบ $r=[a,b]$ สำหรับ $a,b\in Z$ และ $b\neq 0$ ได้

ทฤษฎีบท 4.1.5 จำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ ความสัมพันธ์เท่ากับมีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล

1. สมบัติสะท้อน ; $r = r$
2. สมบัติสมมาตร; ถ้า $r = s$ แล้ว $s = r$
3. สมบัติถ่ายทอด; ถ้า $r = s$ และ $s = t$ แล้ว $r = t$

พิสูจน์ 1.ให้ จำนวนตรรกยะ $r = [a,b]$ โดยที่ $a,b \in Z$ และ $b \neq 0$

เนื่องจาก $a \cdot b = b \cdot a$

$$(a,b) \sim (a,b)$$
$$[a,b] = [a,b]$$

จึงได้ว่า $r = r$

ดังนั้น ความสัมพันธ์เท่ากับสอดคล้องสมบัติสะท้อน

2. ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b]$ และ $s = [c,d]$ โดยที่ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

ให้ $r = s$

$$[a,b] = [c,d]$$
$$(a,b) \sim (c,d)$$
$$a \cdot d = b \cdot c$$
$$c \cdot b = d \cdot a$$
$$(c,d) \sim (a,b)$$
$$[c,d] = [a,b]$$
$$s = r$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์เท่ากับสอดคล้องสมบัติสมมาตร

3. ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b], s = [c,d]$ และ $t = [e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f \in Z$ และ $b,d,f \neq 0$

ให้ $r = s$

$$[a,b] = [c,d]$$
$$(a,b) \sim (c,d)$$
$$a \cdot d = b \cdot c \qquad \text{...........}(1)$$

และ $s = t$

$$[c,d] = [e,f]$$
$$(c,d) \sim (e,f)$$
$$c \cdot f = d \cdot e \qquad \text{...........}(2)$$

นำสมการ $(1) \times$ สมการ (2); $(a \cdot d) \cdot (c \cdot f) = (b \cdot c) \cdot (d \cdot e)$

$$(a \cdot f) \cdot (c \cdot d) = (b \cdot e) \cdot (c \cdot d)$$
$$a \cdot f = b \cdot e$$

$$(a,b)\sim(e,f)$$
$$[a,b]=[e,f]$$
$$r=t$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์เท่ากับสอดคล้องสมบัติถ่ายทอด
จากข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 จึงได้ว่า ความสัมพันธ์เท่ากับมีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล

4.2 การบวกและการคูณจำนวนตรรกยะ

นิยาม 4.2.1 จำนวนตรรกยะ $[a,b]$ และ $[c,d]$ เมื่อ $a,b,c,d\in Z$ โดยที่ $b,d\neq 0$

การบวก; $[a,b]+[c,d]=[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]$

การคูณ; $[a,b]\cdot[c,d]=[a\cdot c,b\cdot d]$

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้าให้ $[a,b]$ และ $[a_1,b_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ r และ $[c,d]$ และ $[c_1,d_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ s สำหรับ $a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1\in Z$ โดยที่ $b,b_1,d,d_1\neq 0$

1. $r+s=[a,b]+[c,d]=[a,b]+[c_1,d_1]=[a_1,b_1]+[c,d]=[a_1,b_1]+[c_1,d_1]$
2. $r\cdot s=[a,b]\cdot[c,d]=[a,b]\cdot[c_1,d_1]=[a_1,b_1]\cdot[c,d]=[a_1,b_1]\cdot[c_1,d_1]$

พิสูจน์ 1. สำหรับ
$$\begin{aligned} r+s &=[a,b]+[c,d]=[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]\\ &=[a,b]+[c_1,d_1]=[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]\\ &=[a_1,b_1]+[c,d]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]\\ &=[a_1,b_1]+[c_1,d_1]=[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]\end{aligned}$$

1.1 แสดงว่า $[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]=[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]$

1.2 แสดงว่า $[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]$

1.3 แสดงว่า $[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$

สำหรับ จำนวนตรรกยะ r และ s สำหรับ $a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1\in Z$ โดยที่ $b,b_1,d,d_1\neq 0$

1.1 จะแสดงว่า $[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]=[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]$

จาก $[c,d]$ และ $[c_1,d_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ s

จึงได้ว่า $$[c,d]=[c_1,d_1]$$
$$(c,d)\sim(c_1,d_1)$$

โดยนิยาม $$c\cdot d_1=d\cdot c_1 \qquad \text{............}(1.1-1)$$

นำ $(b\cdot b)$ คูณสมการ $(1.1-1)$; $(b\cdot b)\cdot(c\cdot d_1)=(b\cdot b)\cdot(d\cdot c_1)$

$$b\cdot c\cdot b\cdot d_1=b\cdot d\cdot b\cdot c_1 \qquad \text{............}(1.1-2)$$

นำ $a\cdot b\cdot d\cdot d_1$ บวกสมการ $(1.1-2)$;

$$(a\cdot b\cdot d\cdot d_1)+(b\cdot c\cdot b\cdot d_1)=(a\cdot b\cdot d\cdot d_1)+(b\cdot d\cdot b\cdot c_1)$$
$$a\cdot d\cdot b\cdot d_1+b\cdot c\cdot b\cdot d_1=b\cdot d\cdot a\cdot d_1+b\cdot d\cdot b\cdot c_1$$
$$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot(b\cdot d_1)=(b\cdot d)\cdot(a\cdot d_1+b\cdot c_1)$$
$$(a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d)\sim(a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1)$$
$$[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]=[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1] \quad ....(*)$$

1.2 จะแสดงว่า $[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]$

จาก $[a,b]$ และ $[a_1,b_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ r

จึงได้ว่า $$[a,b]=[a_1,b_1]$$
$$(a,b)\sim(a_1,b_1)$$

โดยนิยาม $$a\cdot b_1=b\cdot a_1 \quad ....(1.2-1)$$

นำ $d\cdot d_1$ คูณสมการ $(1.2-1)$;

$$(a\cdot b_1)\cdot(d\cdot d_1)=(b\cdot a_1)\cdot(d\cdot d_1)$$
$$a\cdot b_1\cdot d\cdot d_1=b\cdot a_1\cdot d\cdot d_1$$
$$a\cdot d_1\cdot b_1\cdot d=b\cdot d_1\cdot a_1\cdot d \quad ....(1.2-2)$$

และจาก $[c,d]$ และ $[c_1,d_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ s

จึงได้ว่า $$[c,d]=[c_1,d_1]$$
$$(c,d)\sim(c_1,d_1)$$

โดยนิยาม $$c\cdot d_1=d\cdot c_1 \quad ....(1.2-3)$$

นำ $b\cdot b_1$ คูณสมการ $(1.2-3)$;

$$(b\cdot b_1)\cdot(c\cdot d_1)=(b\cdot b_1)\cdot(d\cdot c_1)$$
$$b\cdot d_1\cdot b_1\cdot c=b\cdot c_1\cdot b_1\cdot d$$
$$b\cdot c_1\cdot b_1\cdot d=b\cdot d_1\cdot b_1\cdot c \quad ....(1.2-4)$$

นำสมการ $(1.2-2)+$ สมการ $(1.2-4)$;

$$(a\cdot d_1\cdot b_1\cdot d)+(b\cdot c_1\cdot b_1\cdot d)=(b\cdot d_1\cdot a_1\cdot d)+(b\cdot d_1\cdot b_1\cdot c)$$
$$a\cdot d_1\cdot b_1\cdot d+b\cdot c_1\cdot b_1\cdot d=b\cdot d_1\cdot a_1\cdot d+b\cdot d_1\cdot b_1\cdot c$$
$$(a\cdot d_1+b\cdot c_1)\cdot(b_1\cdot d)=(b\cdot d_1)\cdot(a_1\cdot d+b_1\cdot c)$$
$$(a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1)\sim(a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d)$$
$$[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d] \quad ....(*,*)$$

1.3 จะแสดงว่า $[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$

จาก $[c,d]$ และ $[c_1,d_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ s

จึงได้ว่า $$[c,d]=[c_1,d_1]$$

$$(c,d)\sim(c_1,d_1)$$

โดยนิยาม $$c\cdot d_1=d\cdot c_1 \qquad ....(1.3-1)$$

นำ $(b_1\cdot b_1)$ คูณสมการ $(1.3-1)$;

$$(b_1\cdot b_1)\cdot(c\cdot d_1)=(b_1\cdot b_1)\cdot(d\cdot c_1)$$

$$b_1\cdot b_1\cdot c\cdot d_1=b_1\cdot b_1\cdot d\cdot c_1$$

$$b_1\cdot c\cdot b_1\cdot d_1=b_1\cdot d\cdot b_1\cdot c_1 \qquad ....(1.3-2)$$

นำ $(d\cdot a_1\cdot b_1\cdot d_1)+$ สมการ $(1.3-2)$;

$$(d\cdot a_1\cdot b_1\cdot d_1)+(b_1\cdot c\cdot b_1\cdot d_1)=(d\cdot a_1\cdot b_1\cdot d_1)+(b_1\cdot d\cdot b_1\cdot c_1)$$

$$a_1\cdot d\cdot b_1\cdot d_1+b_1\cdot c\cdot b_1\cdot d_1=b_1\cdot d\cdot a_1\cdot d_1+b_1\cdot d\cdot b_1\cdot c_1$$

$$(a_1\cdot d+b_1\cdot c)\cdot(b_1\cdot d_1)=(b_1\cdot d)\cdot(a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1)$$

$$(a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d)\sim(a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1)$$

$$[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1] \qquad ....(*,*,*)$$

จาก $(*),(*,*)$ และ $(*,*,*)$

$$[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$$

ดังนั้น คู่อันดับ $[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d],[a\cdot d_1+b\cdot c_1,b\cdot d_1],[a_1\cdot d+b_1\cdot c,b_1\cdot d]$ และ $[a_1\cdot d_1+b_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$ ต่างแทนจำนวนตรรกยะ $r+s$

2. สำหรับ $r\cdot s=[a,b]\cdot[c,d]=[a\cdot c,b\cdot d]$

$$=[a,b]\cdot[c_1,d_1]=[a\cdot c_1,b\cdot d_1]$$

$$=[a_1,b_1]+[c,d]=[a_1\cdot c,b_1\cdot d]$$

$$=[a_1,b_1]+[c_1,d_1]=[a_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$$

2.1 แสดงว่า $[a\cdot c,b\cdot d]=[a\cdot c_1,b\cdot d_1]$

2.2 แสดงว่า $[a\cdot c_1,b\cdot d_1]=[a_1\cdot c,b_1\cdot d]$

2.3 แสดงว่า $[a_1\cdot c,b_1\cdot d]=[a_1\cdot c_1,b_1\cdot d_1]$

พิสูจน์ 2. ให้จำนวนตรรกยะ r และ s สำหรับ $a,b,c,d,a_1,b_1,c_1,d_1\in Z$ โดยที่ $b,b_1,d,d_1\neq 0$

2.1 จะแสดงว่า $[a\cdot c,b\cdot d]=[a_1\cdot c,b_1\cdot d]$

จาก $[a,b]$ และ $[a_1,b_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ r

จึงได้ว่า $$[a,b]=[a_1,b_1]$$

$$(a,b)\sim(a_1,b_1)$$

โดยนิยาม $$a \cdot b_1 = b \cdot a_1 \qquad \text{............}(2.1-1)$$

นำ $(c \cdot d)$ คูณสมการ $(2.1-1)$; $(c \cdot d) \cdot (a \cdot b_1) = (c \cdot d) \cdot (b \cdot a_1)$

$$a \cdot c \cdot b_1 \cdot d = b \cdot d \cdot a_1 \cdot c$$

$$(a \cdot c, b \cdot d) \sim (a_1 \cdot c, b_1 \cdot d)$$

$$[a \cdot c, b \cdot d] = [a_1 \cdot c, b_1 \cdot d] \qquad \text{............}(*,*,*,*)$$

2.2 จะแสดงว่า $[a_1 \cdot c, b_1 \cdot d] = [a \cdot c_1, b \cdot d_1]$

จาก $[a,b]$ และ $[a_1,b_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ r

จึงได้ว่า $$[a,b] = [a_1,b_1]$$

$$(a,b) \sim (a_1,b_1)$$

โดยนิยาม $$a \cdot b_1 = b \cdot a_1$$

$$b \cdot a_1 = a \cdot b_1 \qquad \text{............}(2.2-1)$$

จาก $[c,d]$ และ $[c_1,d_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ s

จึงได้ว่า $$[c,d] = [c_1,d_1]$$

$$(c,d) \sim (c_1,d_1)$$

โดยนิยาม $$c \cdot d_1 = d \cdot c_1 \qquad \text{............}(2.2-2)$$

นำสมการ $(2.2-1) \times$ สมการ $(2.2-2)$;

$$(b \cdot a_1) \cdot (c \cdot d_1) = (a \cdot b_1) \cdot (d \cdot c_1)$$

$$(a_1 \cdot c) \cdot (b \cdot d_1) = (b_1 \cdot d) \cdot (a \cdot c_1)$$

$$(a_1 \cdot c, b_1 \cdot d) \sim (a \cdot c_1, b \cdot d_1)$$

$$[a_1 \cdot c, b_1 \cdot d] = [a \cdot c_1, b \cdot d_1] \qquad \text{............}(*,*,*,*,*)$$

2.3 จะแสดงว่า $[a \cdot c_1, b \cdot d_1] = [a_1 \cdot c_1, b_1 \cdot d_1]$

จาก $[a,b]$ และ $[a_1,b_1]$ แทนจำนวนตรรกยะ r

จึงได้ว่า $$[a,b] = [a_1,b_1]$$

$$(a,b) \sim (a_1,b_1)$$

โดยนิยาม $$a \cdot b_1 = b \cdot a_1 \qquad \text{............}(2.3-1)$$

นำ $(c_1 \cdot d_1)$ คูณสมการ $(2.3-1)$; $(c_1 \cdot d_1) \cdot (a \cdot b_1) = (c_1 \cdot d_1) \cdot (b \cdot a_1)$

$$(a \cdot c_1) \cdot (b_1 \cdot d_1) = (b \cdot d_1) \cdot (a_1 \cdot c_1)$$

$$(a \cdot c_1, b \cdot d_1) \sim (a_1 \cdot c_1, b_1 \cdot d_1)$$

$$[a \cdot c_1, b \cdot d_1] = [a_1 \cdot c_1, b_1 \cdot d_1] \qquad \text{.........}(*,*,*,*,*,*)$$

จาก $(*,*,*,*), (*,*,*,*,*)$ และ $(*,*,*,*,*,*)$;

ดังนั้น $[a\cdot c, b\cdot d], [a_1\cdot c, b_1\cdot d], [a\cdot c_1, b\cdot d_1]$ และ $[a_1\cdot c_1, b_1\cdot d_1]$ ต่างแทนจำนวนตรรกยะ $r\cdot s$

ทฤษฎีบท 4.2.2 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r+s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ โดยที่ $a,b,c,d\in Z$ และ $b,d\neq 0$

พิจารณา $r+s=[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]$

เนื่องจากจำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ

จึงได้ว่า $a\cdot d+b\cdot c$ และ $b\cdot d$ เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r+s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎีบท 4.2.3 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r+s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.4 การเปลี่ยนหมู่สำหรับการบวก ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ

$$r+(s+t)=(r+s)+t$$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,c,f\neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
r+(s+t) &= [a,b]+\{[c,d]+[e,f]\} \\
&= [a,b]+[c\cdot f+d\cdot e, d\cdot f] \\
&= [a\cdot(d\cdot f)+b\cdot(c\cdot f+d\cdot e), b\cdot(d\cdot f)] \\
&= [a\cdot d\cdot f+b\cdot c\cdot f+b\cdot d\cdot e, b\cdot d\cdot f] \\
&= [(a\cdot d+b\cdot c)\cdot f+(b\cdot d)\cdot e, (b\cdot d)\cdot f] \\
&= [a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]+[e,f] \\
&= \{[a,b]+[c,d]\}+[e,f] \\
&= (r+s)+t
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r+(s+t)=(r+s)+t$

ทฤษฎีบท 4.2.5 การสลับที่สำหรับการบวก ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ $r+s=s+r$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.6 เซตจำนวนตรรกยะ มีจำนวนตรรกยะ s และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $r+s=s+r=r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b],\ s=[0,x]$ โดยที่ $a,b,x\in Z$ และ $b,x\neq 0$

จะแสดงว่า มีจำนวน s ที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=r$

พิจารณา

$$\begin{aligned} r+s &= [a,b]+[0,x] \\ &= [a\cdot x+b\cdot 0, b\cdot x] \\ &= [a\cdot x+0, b\cdot x] \\ &= [a\cdot x, b\cdot x]=[a,b] \\ &= r \end{aligned}$$

จำนวนตรรกยะสอดคล้องสมบัติการสลับที่ จึงได้ $r+s=s+r=r$

ดังนั้น มีจำนวน s ที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r

จะแสดงว่า มีจำนวน s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=r$

ให้ s' มีสมบัติว่า $r+s'=s'+r=r$ โดยที่ $s'=[c,d]$ โดยที่ $c,d\in Z$ และ $d\neq 0$

ให้

$$\begin{aligned} r+s' &= r \\ [a,b]+[c,d] &= [a,b] \\ [a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d] &= [a,b] \\ (a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d) &\sim (a,b) \\ (a\cdot d+b\cdot c)\cdot b &= (b\cdot d)\cdot a \\ (a\cdot d+b\cdot c)\cdot b &= b\cdot(d\cdot a) \\ a\cdot d+b\cdot c &= a\cdot d \\ b\cdot c &= a\cdot d+(-a\cdot d) \\ b\cdot c &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $b\neq 0$; จึงได้ว่า $c=0$

จากที่กำหนด $s'=[c,d]=[0,d]=[0,x]=0$

จึงได้ว่า มีจำนวน s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=r$

ดังนั้น เซตจำนวนตรรกยะ มีจำนวนตรรกยะ s และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $r+s=s+r=r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r

นิยาม 4.2.2 จำนวนตรรกยะ $[0,x]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 0 และเรียกเอกลักษณ์สำหรับ การบวก โดยที่ x เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์

จากทฤษฎีบท 4.2.6 และนิยาม 4.2.2 มี 0 ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะซึ่งทำให้ $r+0=0+r=r$ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ และเรียก 0 ว่าเป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก

ทฤษฎีบท 4.2.7 จำนวนตรรกยะ r จะมีจำนวนตรรกยะ s และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$r+s=s+r=0$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[-a,b]$ โดยที่ $a,b\in Z$ และ $b\neq 0$
จะแสดงว่า มีจำนวน s ที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} r+s &= [a,b]+[-a,b] \\ &= [a\cdot b+b\cdot(-a), b^2] \\ &= [a\cdot b+(-a\cdot b), b^2] \\ &= [0,b^2]=[0,x] \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } x \\ &= 0 \end{aligned}$$

จำนวนตรรกยะสอดคล้องสมบัติการสลับที่ จึงได้ $r+s=s+r=0$
ดังนั้น สำหรับจำนวนตรรกยะ r มีจำนวนตรรกยะ s ที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=0$

จะแสดงว่า สำหรับจำนวนตรรกยะ r มีจำนวนตรรกยะ s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r+s=s+r=0$ ให้ r' มีสมบัติว่า $r+r'=r'+r=0$ โดยที่ $r'=[c,d]$ และ $0=[0,x]$ สำหรับ $c,d,x\in Z$ และ $d,x\neq 0$

ให้
$$\begin{aligned} r+r' &= 0 \\ [a,b]+[c,d] &= [0,x] \\ [a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d] &= [0,x] \\ (a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d) &\sim (0,x) \\ (a\cdot d+b\cdot c)\cdot x &= (b\cdot d)\cdot 0 \\ (a\cdot d+b\cdot c)\cdot x &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x\neq 0$ จึงได้ว่า
$$\begin{aligned} a\cdot d+b\cdot c &= 0 \\ b\cdot c &= -a\cdot d \\ b\cdot c &= d\cdot(-a) \\ (c,d) &\sim (-a,b) \\ [c,d] &= [-a,b] \\ r' &= s \end{aligned}$$

ดังนั้น แต่ละจำนวนตรรกยะ r มีจำนวนตรรกยะ s เพียงจำนวนเดียวที่ $r+s=s+r=0$

นิยาม 4.2.3 จำนวนตรรกยะ $r=[a,b]$ จะมีจำนวนตรรกยะ $[-a,b]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $-r$ และเรียกตัวผกผันสำหรับการบวกของ r โดยที่ $a,b\in Z$ และ $b\neq 0$

จากทฤษฎีบท 4.2.7 และนิยาม 4.2.3 แต่ละจำนวนตรรกยะ r จะมีจำนวนตรรกยะ $-r$ ซึ่งทำให้ $r+(-r)=(-r)+r=0$ เรียก $-r$ ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ r

ทฤษฎีบท 4.2.8 การตัดออกสำหรับการบวก ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ
ถ้า $r+s=r+t$ แล้ว $s=t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,c,f\neq 0$

ให้
$$r+s=r+t$$
$$[a,b]+[c,d]=[a,b]+[e,f]$$
$$[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]=[a\cdot f+b\cdot e, b\cdot f]$$
$$(a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d)\sim(a\cdot f+b\cdot e, b\cdot f)$$
$$(a\cdot d+b\cdot c)\cdot(b\cdot f)=(b\cdot d)(a\cdot f+b\cdot e)$$
$$a\cdot b\cdot d\cdot f+b\cdot b\cdot c\cdot f=a\cdot b\cdot d\cdot f+b\cdot b\cdot d\cdot e$$
$$b\cdot b\cdot c\cdot f=b\cdot b\cdot d\cdot e$$
$$c\cdot f=d\cdot e$$
$$(c,d)\sim(e,f)$$
$$[c,d]=[e,f]$$
$$s=t$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $r+s=r+t$ แล้ว $s=t$

ทฤษฎีบท 4.2.9 การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ
ถ้า $r=s$ แล้ว $r+t=s+t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,d,f\neq 0$ ให้
$$r=s$$
$$[a,b]\sim[c,d]$$
$$a\cdot d=b\cdot c \qquad \text{............(1)}$$
นำ $(f\cdot f)\times$สมการ(1);
$$(a\cdot d)\cdot(f\cdot f)=(b\cdot c)\cdot(f\cdot f) \qquad \text{............(2)}$$
นำ$(b\cdot d\cdot e\cdot f)+$ สมการ(2); $(a\cdot d\cdot f\cdot f)+(b\cdot d\cdot e\cdot f)=(b\cdot c\cdot f\cdot f)+(b\cdot d\cdot e\cdot f)$
$$a\cdot d\cdot f\cdot f+b\cdot d\cdot e\cdot f=b\cdot c\cdot f\cdot f+b\cdot d\cdot e\cdot f$$
$$(a\cdot f)\cdot(d\cdot f)+(b\cdot e)\cdot(d\cdot f)=(b\cdot f)\cdot(c\cdot f)+(b\cdot f)\cdot(d\cdot e)$$
$$(a\cdot f+b\cdot e)\cdot(d\cdot f)=(b\cdot f)\cdot(c\cdot f+d\cdot e)$$
$$[a\cdot f+b\cdot e, b\cdot f]=[c\cdot f+d\cdot e, d\cdot f]$$
$$[a,b]+[e,f]=[c,d]+[e,f]$$
$$r+t=s+t$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $r=s$ แล้ว $r+t=s+t$

ทฤษฎีบท 4.2.10 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r \cdot s$ เป็นจำนวนตรรกยะ
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.11 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r \cdot s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.12 การเปลี่ยนหมู่สำหรับการคูณ ให้ r, s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ
$r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b], s = [c,d]$ และ $t = [e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f \in Z$ และ $b,c,f \neq 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} r \cdot (s \cdot t) &= [a,b] \cdot \{[c,d] \cdot [e,f]\} \\ &= [a,b] \cdot [c \cdot e, d \cdot f] \\ &= [a \cdot (c \cdot e), b \cdot (d \cdot f)] \\ &= [(a \cdot c) \cdot e, (b \cdot d) \cdot f] \\ &= [a \cdot c, b \cdot d] \cdot [e,f] \\ &= \{[a,b] \cdot [c \cdot d]\} \cdot [e,f] \\ &= (r \cdot s) \cdot t \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$

ทฤษฎีบท 4.2.13 การสลับที่สำหรับการคูณ ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ $r \cdot s = s \cdot r$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b], s = [c,d]$ โดยที่ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} r \cdot s &= [a,b] \cdot [c,d] \\ &= [a \cdot c, b \cdot d] \\ &= [c \cdot a, d \cdot b] \\ &= [c,d] \cdot [a,b] \\ &= s \cdot r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $r \cdot s = s \cdot r$

ทฤษฎีบท 4.2.14 เซตจำนวนตรรกยะ มีจำนวนตรรกยะ s และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ทำให้ $r \cdot s = s \cdot r = r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r = [a,b], s = [x,x]$ โดยที่ $a,b,x \in Z$ และ $b,x \neq 0$

จะแสดงว่า มีจำนวน s ที่มีสมบัติว่า $r \cdot s = s \cdot r = r$

พิจารณา $r \cdot s = [a,b]\cdot[x,x]$

$$= [a\cdot x, b\cdot x] = [a,b] = r$$

จำนวนตรรกยะสอดคล้องสมบัติการสลับที่ จึงได้ $r\cdot s = s\cdot r = r$
ดังนั้น มีจำนวนตรรกยะ s ที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r

จะแสดงว่า มีจำนวนตรรกยะ s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = r$
ให้ s' มีสมบัติว่า $r\cdot s' = s'\cdot r = r$ โดยที่ $s' = [c,d]$ สำหรับจำนวนเต็ม c และ d โดยที่ $d \neq 0$

ให้ $r\cdot s' = r$

$$[a,b]\cdot[c,d] = [a,b]$$
$$[a\cdot c, b\cdot d] = [a,b]$$
$$(a\cdot c, b\cdot d) \sim (a,b)$$
$$(a\cdot c)\cdot b = (b\cdot d)\cdot a$$
$$(a\cdot b)\cdot c = (a\cdot b)\cdot d$$
$$c = d$$

จากที่กำหนด $s' = [c,d] = [d,d] = [x,x] = s$

จึงได้ว่า มีจำนวนตรรกยะ s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = r$

นิยาม 4.2.3 จำนวนตรรกยะ $[x,x]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 1 และเรียกว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของเซตจำนวนตรรกยะ นั่นคือ $r\cdot 1 = 1\cdot r = r$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ r

ทฤษฎีบท 4.2.15 จำนวนตรรกยะ r แต่ละจำนวน โดยที่ $r \neq 0$ มีจำนวนตรรกยะ s และมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $r\cdot s = s\cdot r = 1$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b], s = [b,a]$ โดยที่ $a,b \in Z$ และ $b \neq 0$

จะแสดงว่า มีจำนวน s ที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = 1$

พิจารณา $r\cdot s = [a,b]\cdot[b,a]$

นิยามการคูณ $= [a\cdot b, b\cdot a]$

$= [a\cdot b, a\cdot b] = [x,x]$ สำหรับจำนวนเต็ม x และ $x \neq 0$

$= 1$

จำนวนตรรกยะสอดคล้องสมบัติการสลับที่ จึงได้ $r\cdot s = s\cdot r = 1$
ดังนั้น สำหรับจำนวนตรรกยะ r มีจำนวนตรรกยะ s ที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = 1$

จะแสดงว่า สำหรับ $r,s \in Q$ มี s เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $r\cdot s = s\cdot r = 1$ ให้ s' มีสมบัติว่า $r\cdot s' = s'\cdot r = 1$ โดยที่ $s' = [c,d]$ และ $1 = [x,x]$ สำหรับ $c,d,x \in Z$ และ $d,x \neq 0$ ให้ $r\cdot s' = 1$

$$[a,b]\cdot[c,d] = [x,x]$$

$$[a\cdot c, b\cdot d]=[x,x]$$
$$(a\cdot c, b\cdot d)\sim(x,x)$$
$$(a\cdot c)\cdot x=(b\cdot d)\cdot x$$

จึงได้
$$a\cdot c=b\cdot d$$
$$c\cdot a=d\cdot b$$
$$(c,d)\sim(b,a)$$
$$[c,d]=[b,a]$$
$$s'=s$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ r มีจำนวนตรรกยะ s เพียงจำนวนเดียวที่ $r\cdot s=s\cdot r=1$

นิยาม 4.2.4 จำนวนตรรกยะ $r=[a,b]$ โดยที่ $r\neq 0$ จะมีจำนวนตรรกยะ $[b,a]$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย r^{-1} หรือ $\dfrac{1}{r}$ โดยที่ $a,b\in Z$ และ $a,b\neq 0$

จากทฤษฎีบท 4.2.15 และนิยาม 4.2.4 แต่ละจำนวนตรรกยะ r โดยที่ $r\neq 0$ จะมีจำนวนตรรกยะ r^{-1} หรือ $\dfrac{1}{r}$ ซึ่งทำให้ $r\cdot r^{-1}=r^{-1}\cdot r=1$ และเรียก r^{-1} ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ r

ทฤษฎีบท 4.2.16 การกระจาย ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ
$$r\cdot(s+t)=(r\cdot s)+(r\cdot t)$$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,c,f\neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
r\cdot(s+t) &= [a,b]\{[c,d]+[e,f]\}\\
&= [a,b][c\cdot f+d\cdot e, d\cdot f]\\
&= [a\cdot(c\cdot f+d\cdot e), b\cdot(d\cdot f)]\\
&= [a\cdot c\cdot f+a\cdot d\cdot e, b\cdot d\cdot f]\\
&= [b\cdot(a\cdot c\cdot f+a\cdot d\cdot e), b\cdot(b\cdot d\cdot f)]\\
&= [(a\cdot b\cdot c\cdot f+a\cdot b\cdot d\cdot e),(b\cdot b\cdot d\cdot f)]\\
&= [(a\cdot c)\cdot(b\cdot f)+(b\cdot d)\cdot(a\cdot e),(b\cdot d)\cdot(b\cdot f)]\\
&= [a\cdot c, b\cdot d]+[a\cdot e, b\cdot f]\\
&= [a,b]\cdot[c,d]+[a,b]\cdot[e,f]
\end{aligned}$$

จึงได้ว่า
$$=(r\cdot s)+(r\cdot t)$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r\cdot(s+t)=(r\cdot s)+(r\cdot t)$

ทฤษฎีบท 4.2.17 การกระจาย ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ
$(s+t)\cdot r=(s\cdot r)+(t\cdot r)$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.18 การจัดออกสำหรับการคูณ ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ ถ้า $r\cdot t=s\cdot t$ แล้ว $r=s$ เมื่อ $t\neq 0$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b],s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,d,e,f\neq 0$ ให้

$$r\cdot t=s\cdot t$$
$$[a,b]\cdot[e,f]=[c,d]\cdot[e,f]$$
$$[a\cdot e,b\cdot f]=[c\cdot e,d\cdot f]$$
$$(a\cdot e,b\cdot f)\sim(c\cdot e,d\cdot f)$$
$$(a\cdot e)\cdot(d\cdot f)=(b\cdot f)\cdot(c\cdot e)$$
$$a\cdot d\cdot e\cdot f=b\cdot c\cdot e\cdot f \quad \text{เนื่องจาก } e,f\neq 0$$
$$a\cdot d=b\cdot c$$
$$(a,b)\sim(c,d)$$
$$[a,b]=[c,d]$$
$$r=s$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $r\cdot t=s\cdot t$ แล้ว $r=s$ เมื่อ $t\neq 0$

ทฤษฎีบท 4.2.19 การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ ถ้า $r=s$ แล้ว $r\cdot t=s\cdot t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b],s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ โดยที่ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,d,f\neq 0$ ให้

$$r=s$$
$$[a,b]=[c,d]$$
$$a\cdot d=b\cdot c \qquad \text{............}(1)$$

นำ $(e\cdot f)$ คูณสมการ (1);

$$(a\cdot d)\cdot(e\cdot f)=(b\cdot c)\cdot(e\cdot f)$$
$$a\cdot d\cdot e\cdot f=b\cdot c\cdot e\cdot f$$
$$(a\cdot e)\cdot(d\cdot f)=(b\cdot f)\cdot(c\cdot e)$$
$$[a\cdot e,b\cdot f]=[c\cdot e,d\cdot f]$$
$$[a,b]\cdot[e,f]=[c,d]\cdot[e,f]$$
$$r\cdot t=s\cdot t$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $r=s$ แล้ว $r\cdot t=s\cdot t$

ทฤษฎีบท 4.2.20 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $(-1)\cdot r = r\cdot(-1) = -r$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b]$ และ $-1=[-x,x]$ โดยที่ $a,b,x\in Z$ และ $b,x\neq 0$

พิจารณา $$\begin{aligned}(-1)\cdot r &= [-x,x]\cdot[a,b]\\ &= [-x\cdot a, x\cdot b]\\ &= [-(x\cdot a), x\cdot b] = [-a,b]\\ &= -r\end{aligned}$$

พิจารณา $$\begin{aligned}r\cdot(-1) &= [a,b][-x,x]\\ &= [a\cdot(-x), b\cdot x]\\ &= [-(a\cdot x), b\cdot x] = [-a,b]\\ &= -r\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $(-1)\cdot r = r\cdot(-1) = -r$

ทฤษฎีบท 4.2.21 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $-(-r) = r$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.22 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $0\cdot r = r\cdot 0 = 0$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b]$ และ $0=[0,x]$ โดยที่ $a,b,x\in Z$ และ $b,x\neq 0$

พิจารณา $$\begin{aligned}0\cdot r &= [0,x]\cdot[a,b]\\ &= [0\cdot a, x\cdot b]\\ &= [0, x\cdot b]\\ &= [0,x]\\ &= 0\end{aligned}$$

จำนวนตรรกยะสอดคล้องสมบัติการสลับที่สำหรับการคูณ

จึงได้ว่า $0\cdot r = r\cdot 0 = 0$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $0\cdot r = r\cdot 0 = 0$

ทฤษฎีบท 4.2.23 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-(r+s) = -r + (-s)$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ

พิจารณา	$-(r+s) = (-1)\cdot(r+s)$
สมบัติการแจกแจง	$= (-1)\cdot r + (-1)\cdot s$
ทฤษฎีบท 4.2.17	$= -r + (-s)$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-(r+s) = -r + (-s)$

ทฤษฎีบท 4.2.24 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $(-r)\cdot s = r\cdot(-s) = -(r\cdot s)$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.2.25 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $(-r)\cdot(-s) = (r\cdot s)$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ

พิจารณา $(-r)\cdot(-s) = \{(-1)\cdot r\}\cdot\{(-1)\cdot s\}$

สมบัติการจัดหมู่ $= (-1)\cdot\{(-1)\cdot(r\cdot s)\}$

ทฤษฎีบท 4.2.17 $= -(-r\cdot s)$

จึงได้ $= r\cdot s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $(-r)\cdot(-s) = r\cdot s$

ทฤษฎีบท 4.2.26 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $\left(r^{-1}\right)^{-1} = r$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r = [a,b]$ โดยที่ $a,b \in Z$ และ $b \neq 0$

จาก
$$r = [a,b]$$
$$r^{-1} = [b,a]$$
$$\left(r^{-1}\right)^{-1} = [a,b]$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $\left(r^{-1}\right)^{-1} = r$

ทฤษฎีบท 4.2.27 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $(r\cdot s)^{-1} = s^{-1}\cdot r^{-1}$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}(r\cdot s)\cdot\left(s^{-1}\cdot r^{-1}\right) &= \left(r\cdot r^{-1}\right)\cdot\left(s\cdot s^{-1}\right)\\ &= (1)\cdot(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 4.2.13 $\left(s^{-1}\cdot r^{-1}\right)$ เป็นตัวผกผันสำหรับการคูณของ $r\cdot s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $(r\cdot s)^{-1} = s^{-1}\cdot r^{-1}$

ทฤษฎีบท 4.2.28 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $(-r)^{-1} = -r^{-1}$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จำนวนตรรกยะกับจำนวนเต็ม

จำนวนตรรกยะบางจำนวนสามารถกำหนดได้ตรงกับจำนวนเต็ม เช่น

จำนวนตรรกยะ $[0,b]$ กำหนดได้ตรงกับจำนวนเต็ม 0 สำหรับทุกจำนวนเต็ม b

จำนวนตรรกยะ $[a,a]=[b,b]$ กำหนดได้ตรงกับจำนวนเต็ม 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม a และ b

จำนวนตรรกยะ $[a,1]$ กำหนดได้ตรงกับจำนวนเต็ม a สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

จำนวนตรรกยะ $[a,b]$ กำหนดได้ตรงกับบางจำนวนเต็มก็ต่อเมื่อ b หาร a ลงตัว คือ $[a,b]=c$ ก็ต่อเมื่อ $a=c\cdot b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a,b และ c

พิจารณาจำนวนตรรกยะ $[a,b]^{-1}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{b}{a}=[b,a]$

ทฤษฎีบท 4.2.29 กำหนดเซต $P=\{[a,b]\mid a$ และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a\cdot b>0\}$ จะได้ว่าเซต มีสมบัติดังนี้

1. ถ้า $r\in P$ และ $s\in P$ จะได้ว่า

   1.1 $r+s\in P$ 1.2 $r\cdot s\in P$

2. สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ กรณีต่อไปนี้เป็นจริงเพียงกรณีเดียว

   2.1 $r=0$ 2.2 $r\in P$ 2.3 $-r\in P$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r\in P$ และ $s\in P$

1. ให้ $r=[a,b]$ และ $s=[c,d]$ สำหรับจำนวนเต็ม a,b,c และ d ใด ๆ โดยที่ $a\cdot b>0$ และ $c\cdot d>0$

1.1 จะแสดงว่า $r+s\in P$

$$\begin{aligned} r+s &= [a,b]+[c,d] \\ &= [a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d] \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} (a\cdot d+b\cdot c)\cdot(b\cdot d) &= (a\cdot d)\cdot(b\cdot d)+(b\cdot c)\cdot(b\cdot d) \\ &= (a\cdot b)\cdot(d\cdot d)+(c\cdot d)\cdot(b\cdot b) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a\cdot b>0, c\cdot d>0, b\cdot b>0$ และ $d\cdot d>0$

จึงได้ว่า $(a\cdot b)\cdot(d\cdot d)+(c\cdot d)\cdot(b\cdot b)>0$

ทำให้ $[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]\in P$

ดังนั้น $r+s\in P$

1.2 จะแสดงว่า $r\cdot s\in P$

$$\begin{aligned} r\cdot s &= [a,b]\cdot[c,d] \\ &= [a\cdot c,b\cdot d] \end{aligned}$$

พิจารณา $(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)=(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)$

เนื่องจาก $a\cdot b>0$ และ $c\cdot d>0$

จึงได้ว่า $(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)>0$

ทำให้ $[a\cdot c,b\cdot d]\in P$

ดังนั้น $r\cdot s\in P$

2. สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

ให้ $r=[a,b]$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ โดยที่ $b\neq 0$

พิจารณากรณีที่ 1 ถ้า $a\cdot b=0$ จะได้ว่า $a=0$ ดังนั้น $r=[0,b]=0$

กรณีที่ 2 ถ้า $a\cdot b>0$ จะได้ว่า $r\in P$

กรณีที่ 3 ถ้า $a\cdot b<0$ จะได้ว่า $-a\cdot b>0$ ดังนั้น $-r=[-a,b]$

เรียกเซต P ว่าเป็นเซตจำนวนตรรกยะบวก ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Q^+

นิยาม 4.2.3 เซตของจำนวนตรรกยะ Q ประกอบด้วย

เซตของจำนวนตรรกยะบวก $Q^+=\{[a,b]\mid a$ และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a\cdot b>0\}$

จำนวนศูนย์ 0

เซตของจำนวนตรรกยะลบ $Q^-=\{[a,b]\mid a$ และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $a\cdot b<0\}$

และจะได้ว่า จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ จะเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้เพียงอย่างเดียวคือ

1. $r\in Q^+$ หรือ2. $r=0$ หรือ3. $r\in Q^-$

ทฤษฎีบท 4.2.30 สำหรับ r เป็นจำนวนตรรกยะลบ ก็ต่อเมื่อ $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

พิสูจน์ $\Rightarrow$ ถ้า r ที่เป็นจำนวนตรรกยะลบ แล้ว $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ให้ $r=[a,b]$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b

จาก r ที่เป็นจำนวนตรรกยะลบ โดยนิยาม

จะได้ว่า $a\cdot b<0$

นำ (-1) คูณ; $-(a\cdot b)>0$

จึงได้ว่า $-r=[-a,b]$

ดังนั้น ถ้า r ที่เป็นจำนวนตรรกยะลบ แล้ว $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

$\Leftarrow$ ถ้า $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว r ที่เป็นจำนวนตรรกยะลบ

สำหรับ $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ให้ $-r=[a,b]$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b

จาก $-r$ ที่เป็นจำนวนตรรกยะบวก โดยนิยาม

จะได้ว่า $a\cdot b>0$

นำ (-1) คูณ; $-(a\cdot b)<0$

$(-a)\cdot b<0$

จาก $-(-r)=r$

และ $-(-r)=[-a,b]\in Q^{-}$

จึงได้ว่า $r=[-a,b]\in Q^{-}$

ดังนั้น ถ้า $-r$ ที่เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว r เป็นจำนวนตรรกยะลบ

ดังนั้น ทุกจำนวน r เป็นจำนวนตรรกยะลบ ก็ต่อเมื่อ $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ทฤษฎีบท 4.2.31 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ถ้า $r\cdot s=0$ แล้ว $r=0$ หรือ $s=0$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ให้ $r\cdot s=0$

กรณีที่ 1 ถ้า $r\neq 0$ จะมีจำนวนตรรกยะ r^{-1} ซึ่งทำให้ $r^{-1}\cdot r=1$

พิจารณา
$$\begin{aligned} s &= s\cdot 1 \\ &= s\cdot\left(r^{-1}\cdot r\right) \\ &= (s\cdot r)\cdot r^{-1} \\ &= 0\cdot r^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า ให้ $r\cdot s=0$ แล้ว ถ้า $r\neq 0$ จะได้ว่า $s=0$

กรณีที่ 2 ถ้า $s\neq 0$ จะมีจำนวนตรรกยะ s^{-1} ซึ่งทำให้ $s^{-1}\cdot s=1$

พิจารณา
$$\begin{aligned} r &= r\cdot 1 \\ &= r\cdot\left(s^{-1}\cdot s\right) \\ &= (s\cdot r)\cdot s^{-1} \\ &= 0\cdot s^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

จึงได้ว่า ให้ $r\cdot s=0$ แล้ว ถ้า $s\neq 0$ จะได้ว่า $r=0$

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และ2 ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ถ้า $r\cdot s=0$ แล้ว $r=0$ หรือ $s=0$

4.3 การลบและการหารจำนวนตรรกยะ

นิยาม 4.3.1 กำหนดตัวดำเนินการ "การลบ" (substractions) และการหาร (division) บนเซตจำนวนตรรกยะ Q ดังนี้ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s

การลบ ; $r-s=r+(-s)$

การหาร; $r\div s=r\cdot s^{-1}=\dfrac{r}{s}$ เมื่อ $s\neq 0$

จากนิยามพบว่าการดำเนินการ การลบ และการหารมีสมบัติปิด คือ ผลลัพธ์ของการดำเนินการลบและการหารเป็นจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎีบท 4.3.1 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r-0=r$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} r-0 &= r+(-1)\cdot 0 \\ &= r+0 \\ &= r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r-0=r$

ทฤษฎีบท 4.3.2 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r-r=0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.3 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $0-r=-r$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} 0-r &= 0+(-r) \\ &= -r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $0-r=-r$

ทฤษฎีบท 4.3.4 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r\cdot(s-t)=r\cdot s-r\cdot t$
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.5 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-(r-s)=s-r$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} -(r-s) &= (-1)\cdot(r-s) \\ &= (-1)\cdot r-(-1)\cdot s \\ &= (-r)+s \\ &= s-r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-(r-s)=s-r$

ทฤษฎีบท 4.3.6 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r-s=t$ ก็ต่อเมื่อ $r=s+t$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.7 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r\div 1=r$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} r\div 1 &= r\cdot(1)^{-1} \\ &= r\cdot 1=r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r\div 1=r$

ทฤษฎีบท 4.3.8 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r \div r = 1$ เมื่อ $r \neq 0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.9 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $1 \div r = \frac{1}{r}$ เมื่อ $r \neq 0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.10 ตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ เมื่อ $s \neq 0$ $r \div s = t$ ก็ต่อเมื่อ $r = s \cdot t$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ เมื่อ $s \neq 0$

$\Rightarrow$ ถ้า $r \div s = t$ แล้ว $r = s \cdot t$

ให้ $$r \div s = t \qquad ....(1)$$

นำ s คูณสมการ (1); $$s \cdot (r \cdot s^{-1}) = s \cdot t$$
$$r \cdot (s \cdot s^{-1}) = s \cdot t$$
$$r \cdot (1) = s \cdot t$$
$$r = s \cdot t$$

จึงได้ว่า ถ้า $r \div s = t$ แล้ว $r = s \cdot t$

$\Leftarrow$ ถ้า $r = s \cdot t$ แล้ว $r \div s = t$

ให้ $$r = s \cdot t \qquad ....(2)$$

จาก $s \in Q$ มี $s^{-1} \in Q$

นำ s^{-1} คูณสมการ (2); $$s^{-1} \cdot r = s^{-1} \cdot (s \cdot t)$$
$$r \cdot s^{-1} = (s^{-1} \cdot s) \cdot t$$
$$r \div s = 1 \cdot t$$
$$r \div s = t$$

จึงได้ว่า ถ้า $r = s \cdot t$ แล้ว $r \div s = t$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ เมื่อ $s \neq 0$; $r \div s = t$ ก็ต่อเมื่อ $r = s \cdot t$

ทฤษฎีบท 4.3.11 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-r \div s = r \div (-s) = -(r \div s)$ เมื่อ $s \neq 0$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ เมื่อ $s \neq 0$

พิจารณา $$-r \div s = (-r) \cdot s^{-1}$$
$$= r \cdot (-s^{-1})$$
$$= r \div (-s) \qquad ....(1)$$

และ $$-r \div s = (-r) \cdot s^{-1}$$
$$= -(r \cdot s^{-1})$$
$$= -(r \div s) \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1) และ (2); $-r\div s=r\div(-s)=-(r\div s)$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-r\div s=r\div(-s)=-(r\div s)$ เมื่อ $s\neq 0$

ทฤษฎีบท 4.3.12 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ $-r\div(-s)=r\div s$ เมื่อ $s\neq 0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.13 จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ถ้า $s,u\neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s}+\frac{t}{u}=\frac{r\cdot u+s\cdot t}{s\cdot u}$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ เมื่อ $s,u\neq 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\frac{r}{s}+\frac{t}{u} &= \left(r\cdot s^{-1}\right)\cdot(1)+\left(t\cdot u^{-1}\right)\cdot(1)\\
&= \left(r\cdot s^{-1}\right)\cdot\left(u\cdot u^{-1}\right)+\left(t\cdot u^{-1}\right)\cdot\left(s\cdot s^{-1}\right)\\
&= (r\cdot u)\cdot\left(s^{-1}\cdot u^{-1}\right)+(t\cdot s)\cdot\left(s^{-1}\cdot u^{-1}\right)\\
&= \left[(r\cdot u)+(s\cdot t)\right]\cdot\left(s^{-1}\cdot u^{-1}\right)\\
&= \left[(r\cdot s)+(t\cdot s)\right]\cdot(s\cdot u)^{-1}\\
&= \left[(r\cdot s)+(t\cdot s)\right]\div(s\cdot u)\\
&= \frac{r\cdot u+s\cdot t}{s\cdot u}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ถ้า $s,u\neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s}+\frac{t}{u}=\frac{r\cdot u+s\cdot t}{s\cdot u}$

ทฤษฎีบท 4.3.14 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ ถ้า $r\neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\frac{1}{r}}=r$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ ให้ $r\neq 0$

พิจารณา

$$\frac{1}{\frac{1}{r}}=1\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^{-1}=1\cdot\left(r^{-1}\right)^{-1}=r$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ ถ้า $r\neq 0$ แล้ว $\frac{1}{\frac{1}{r}}=r$

ทฤษฎีบท 4.3.15 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ถ้า $r,s\neq 0$ แล้ว $\frac{1}{r\cdot s}=\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{s}$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.3.16 จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ถ้า $s,u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u}=\frac{r\cdot t}{s\cdot u}$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ให้ $s,u \neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u} &= \left(r\cdot s^{-1}\right)\cdot\left(t\cdot u^{-1}\right)\\ &= \left(r\cdot t\right)\cdot\left(s^{-1}\cdot u^{-1}\right)\\ &= \left(r\cdot t\right)\cdot\left(u\cdot s\right)^{-1}\\ &= \frac{r\cdot t}{u\cdot s}=\frac{r\cdot t}{s\cdot u}\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ถ้า $s,u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s}\cdot\frac{t}{u}=\frac{r\cdot t}{s\cdot u}$

ทฤษฎีบท 4.3.17 จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ ถ้า $s,t,u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s}\div\frac{t}{u}=\frac{r}{s}\cdot\frac{u}{t}=\frac{r\cdot u}{s\cdot t}$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

4.4 ลำดับของจำนวนตรรกยะ

นิยาม 4.4.1 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ จะกล่าวว่า r น้อยกว่า s ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $s-r\in Q^{+}$ และจะกล่าวว่า r มากกว่า s ใช้สัญลักษณ์ $r>s$ ก็ต่อเมื่อ $s<r$

นิยาม 4.4.2 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ให้ $r=[a,b]$ และ $s=[c,d]$ สำหรับ $a,b,c,d\in Z$ โดยที่ $b,d\neq 0,$ $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $a\cdot d<b\cdot c$

สมบัติไตรวิภาค

สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้เพียงข้อเดียว คือ

1. $r=s$ 2. $r<s$ 3. $r>s$

พิสูจน์ จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคเพียงข้อเดียวต่อไปนี้

1. ถ้า $r-s=0$ จะได้ว่า r และ s สอดคล้องสมบัติข้อ 1 คือ $r=s$
2. ถ้า $r-s\in Q^{-}$ จะได้ว่า r และ s สอดคล้องสมบัติข้อ 2 คือ $r<s$
3. ถ้า $r-s\in Q^{+}$ จะได้ว่า r และ s สอดคล้องสมบัติข้อ 3 คือ $r>s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคเพียงข้อเดียว

ทฤษฎีบท 4.4.1 จำนวนตรรกยะ r เป็นจำนวนตรรกยะบวกก็ต่อเมื่อ $r>0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ จะแสดงว่า ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว $r>0$

ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก

เนื่องจาก $r=r-0$

จึงได้ว่า $r-0\in Q^{+}$

โดยนิยาม 4.4.1 $r>0$

จึงได้ว่า ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว $r>0$

$\Leftarrow$ จะแสดงว่า ถ้า $r>0$ แล้ว r เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ให้ $r>0$

แสดงว่า $0<r$

โดยนิยาม $r-0\in Q^{+}$

แต่ $r-0=r$

นั่นคือ $r\in Q^{+}$

จึงได้ว่า ถ้า $r>0$ แล้ว r เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r เป็นจำนวนตรรกยะบวกก็ต่อเมื่อ $r>0$

ทฤษฎีบท 4.4.2 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ r เป็นจำนวนตรรกยะลบ (คือ $-r\in Q^{+}$ หรือ $r\in Q^{-}$) ก็ต่อเมื่อ $r<0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.4.3 สำหรับจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $r<s$ และ $s<t$ แล้ว $r<t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ

ให้ $r<s$

จากนิยาม $s-r>0$ ....(1)

และให้ $s<t$

จากนิยาม $t-s>0$ ....(2)

นำสมการ (1) บวกสมการ (2); $(s-r)+(t-s)>0$

$(t-r)+(s-s)>0$

$t-r>0$

จึงได้ว่า $r<t$

นั่นคือ ถ้า $r<s$ และ $s<t$ แล้ว $r<t$

ดังนั้น ความสัมพันธ์น้อยกว่า $<$ มีสมบัติถ่ายทอด

ทฤษฎีบท 4.4.4 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r+t<s+t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ

$\Rightarrow$ ถ้า $r<s$ แล้ว $r+t<s+t$

ให้ $r<s$

จากนิยาม $s-r>0$

$$(s-r)+0>0$$
$$(s-r)+(t-t)>0$$
$$s+t-r-t>0$$
$$(s+t)-(r+t)>0$$

นั่นคือ $r+t<s+t$

ดังนั้น ถ้า $r<s$ แล้ว $r+t<s+t$

$\Leftarrow$ ถ้า $r+t<s+t$ แล้ว $r<s$

ให้ $r+t<s+t$

$$(s+t)-(r+t)>0$$
$$s+t-r-t>0$$
$$(s-r)+(t-t)>0$$
$$s-r>0$$

นั่นคือ $r<s$

ดังนั้น ถ้า $r+t<s+t$ แล้ว $r<s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r+t<s+t$

ทฤษฎีบท 4.4.5 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r-t<s-t$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 4.4.6 จำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ $r<s$ และ $t<u$ ก็ต่อเมื่อ $r+t<s+u$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ

$\Rightarrow$ ถ้า $r<s$ และ $t<u$ แล้ว $r+t<s+u$

ให้ $r<s$ และ $r<u$

จาก $r<s$

$$s-r>0 \qquad \text{...........}(1)$$

และ $t<u$

$$u-t>0 \qquad \text{...........}(2)$$

นำสมการ (1) บวกสมการ (2); $(s-r)+(u-t)>0$

$$(s+u)+\{(-r)+(-t)\}>0$$
$$(s+u)+(-r-t)>0$$
$$(s+u)-(r+t)>0$$
$$r+t<s+u$$

จึงได้ ถ้า $r<s$ และ $t<u$ แล้ว $r+t<s+u$

$\Leftarrow$ ถ้า $r+t<s+u$ แล้ว $r<s$ และ $t<u$

ให้ $$r+t<s+u$$
$$(s+u)-(r+t)>0$$
$$s+u-r-t>0$$
$$(s-r)+(u-t)>0$$

นั่นคือ $$s-r>0 \text{ และ } u-t>0$$
$$r<s \text{ และ } t<u$$

จึงได้ว่าถ้า $r+t<s+u$ แล้ว $r<s$ และ $t<u$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s,t และ u ใด ๆ $r<s$ และ $t<u$ ก็ต่อเมื่อ $r+t<s+u$

ทฤษฎีบท 4.4.7 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $t>0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r\cdot t<s\cdot t$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ให้ $t>0$

$\Rightarrow$ ถ้า $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r\cdot t<s\cdot t$

$$r<s$$
$$s-r>0$$

สำหรับ $t>0$; $$t\cdot(s-r)>0$$
$$(t\cdot s)-(t\cdot r)>0$$
$$(s\cdot t)-(r\cdot t)>0$$
$$r\cdot t<s\cdot t$$

จึงได้ว่า ถ้า $t>0$ และ $r<s$ แล้ว $r\cdot t<s\cdot t$

$\Leftarrow$ ถ้า $r\cdot t<s\cdot t$ แล้ว $r<s$

ให้ $$r\cdot t<s\cdot t$$
$$s\cdot t-r\cdot t>0$$
$$(s-r)\cdot t>0$$

จาก $t>0$; $$(s-r)>0$$
$$r<s$$

จึงได้ว่า ถ้า $r\cdot t<s\cdot t$ แล้ว $r<s$

ดังนั้น ถ้า $t>0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r\cdot t<s\cdot t$

ทฤษฎีบท 4.4.8 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $t<0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r\cdot t>s\cdot t$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ให้ $t<0$ ได้ว่า $-t>0$

$\Rightarrow$ ถ้า $t<0$ และ $r<s$ แล้ว $r\cdot t>s\cdot t$

ให้ $$r<s$$
$$s-r>0$$
นำ $-t>0$ คูณ ; $$(-t)\cdot(s-r)>0$$
$$-st+rt>0$$
$$(rt-st)>0$$
จึงได้ว่า $$r\cdot t>s\cdot t$$

นั่นคือ ถ้า $t<0$ และ $r<s$ แล้ว $r\cdot t>s\cdot t$

$\Leftarrow$ ถ้า $t<0$ และ $r\cdot t>s\cdot t$ แล้ว $r<s$

ให้ $$r\cdot t>s\cdot t$$
$$(r\cdot t-s\cdot t)>0$$
$$\{(-r)(-t)-(-s)(-t)\}>0$$
จาก $t<0$ ทำให้ $-t>0$; $$\{(-r)-(-s)\}\cdot(-t)>0$$
$$s-t>0$$
จึงได้ว่า $$r<s$$

นั่นคือ ถ้า $t<0$ และ $r\cdot t>s\cdot t$ แล้ว $r<s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $t<0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r\cdot t>s\cdot t$

ทฤษฎีบท 4.4.9 จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $t>0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ให้ $t>0$

$\Rightarrow$ ถ้า $r<s$ แล้ว $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$

ให้ $$r<s$$
$$s-r>0$$
สำหรับ $t>0$ ทำให้ $t^{-1}>0$; $$t^{-1}\cdot(s-r)>0$$
$$(t^{-1}\cdot s)-(t^{-1}\cdot r)>0$$
สมบัติการสลับสำหรับการคูณ $$(s\cdot t^{-1})-(r\cdot t^{-1})>0$$
นิยามการหาร $$\frac{s}{t}-\frac{r}{t}>0$$
$$\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$$

นั่นคือ ถ้า $t>0$ และ $r<s$ แล้ว $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$

$\Leftarrow$ ถ้า $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$ แล้ว $r<s$

ให้ $$\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$$

$$\frac{s}{t}-\frac{r}{t}>0$$

นิยามการหาร $$\left(s\cdot t^{-1}\right)-\left(r\cdot t^{-1}\right)>0$$

$$\left(s-r\right)\cdot t^{-1}>0$$

จาก $t>0$ นำ t คูณ $$\left(s-r\right)\cdot\left(t\cdot t^{-1}\right)>0$$

$$\left(s-r\right)\cdot\left(1\right)>0$$

$$\left(s-r\right)>0$$

จึงได้ $$r<s$$

นั่นคือ ถ้า $t>0$ และ $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$ แล้ว $r<s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ถ้า $t>0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{r}{t}<\frac{s}{t}$

ทฤษฎีบท 4.4.10 การหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะ ใด ๆ ถ้า $t<0$ แล้ว $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{r}{t}>\frac{s}{t}$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r,s และ t ใด ๆ ให้ $t<0$

$\Rightarrow$ ถ้า $r<s$ แล้ว $\frac{r}{t}>\frac{s}{t}$

ให้ $t<0$ และ $$r<s$$

$$s-r>0$$

จาก $t<0$ ทำให้ $-t>0$ และ $-t^{-1}>0$

$$\left(-t^{-1}\right)\cdot\left(s-r\right)>0$$

$$\left[\left(-t^{-1}\right)\cdot s\right]-\left[\left(-t^{-1}\right)\cdot r\right]>0$$

$$\left(-s\cdot t^{-1}\right)+\left(r\cdot t^{-1}\right)>0$$

$$\left(r\cdot t^{-1}\right)-\left(s\cdot t^{-1}\right)>0$$

นิยามการหาร $$\frac{r}{t}-\frac{s}{t}>0$$

จึงได้ $$\frac{r}{t}>\frac{s}{t}$$

ถ้า $r < s$ แล้ว $\frac{r}{t} > \frac{s}{t}$ สำหรับ $t < 0$

$\Leftarrow$ ถ้า $\frac{r}{t} > \frac{s}{t}$ แล้ว $r < s$

ให้ $t < 0$ และ
$$\frac{r}{t} > \frac{s}{t}$$
$$\frac{r}{t} - \frac{s}{t} > 0$$
$$\left(r \cdot t^{-1}\right) - \left(s \cdot t^{-1}\right) > 0$$
$$\left[(-r)\cdot\left(-t^{-1}\right)\right] - \left[(-s)\cdot\left(-t^{-1}\right)\right] > 0$$
$$\left[(-r)-(-s)\right]\cdot\left(-t^{-1}\right) > 0$$
$$\left[(-r)+s\right]\cdot\left(-t^{-1}\right) > 0$$
$$(s-r)\cdot\left(-t^{-1}\right) > 0$$

จาก $t < 0$ ทำให้ $-t > 0$ นำ $-t$ คูณ
$$(s-r)\cdot\left[\left(-t^{-1}\right)\cdot(-t)\right] > 0$$
$$(s-r) > 0$$

จึงได้
$$r < s$$

นั่นคือ ถ้า $\frac{r}{t} > \frac{s}{t}$ แล้ว $r < s$ สำหรับ $t < 0$ ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ ถ้า $t < 0$ แล้ว $r < s$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{r}{t} > \frac{s}{t}$

ทฤษฎีบท 4.4.11 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ถ้า $r \le s$ และ $s \le r$ แล้ว $r = s$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ให้ $r \le s$ และ $s \le r$ แล้ว $r \ne s$

จาก $r \ne s$ โดยสมบัติไตรวิภาค $r > s$ หรือ $r < s$

กรณีที่ 1 ถ้า $r > s$ ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $r \le s$

กรณีที่ 2 ถ้า $r < s$ ขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $s \le r$

จากกรณีที่ 1 และ2 ถ้า $r \le s$ และ $s \le r$ แล้ว $r = s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ถ้า $r \le s$ และ $s \le r$ แล้ว $r = s$

ทฤษฎีบท 4.4.12 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆที่ $r < s$ จะมีจำนวนตรรกยะ x ที่มีสมบัติว่า $r < x < s$ สมบัติหนาแน่น (density law)

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ให้ $r < s$

จากทฤษฎีบท 4.4.7 สำหรับ $2 > 0;\ 2r < 2s$

จาก
$$2r = r + r < r + s < s + s = 2s$$

$$2r < r+s < 2s \qquad ....(1)$$

นำ $\frac{1}{2}$ คูณสมการ (1); $(2r)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) < (r+s)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) < (2s)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot r < \frac{(r+s)}{2} < \left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot s$$

$$r < \frac{(r+s)}{2} < s$$

สำหรับจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ ให้ $x = \frac{r+s}{2}$

จึงได้ $\qquad r < x < s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ที่ $r < s$ จะมีจำนวนตรรกยะ x ที่มีสมบัติว่า $r < x < s$

ทฤษฎีบท 4.4.13 จำนวนตรรกยะบวก r ใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $r < n$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะบวก r ใด ๆ และให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $r = [a,b]$ สำหรับจำนวนเต็มบวก a และ b ใด ๆ

ให้
$$\begin{aligned} n &= a+1 \\ &= \frac{a+1}{1} = [a+1,1] \\ &> \frac{a}{b} = [a,b] = r \quad ; b \in Q^+ \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะบวก r ใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $r < n$

นิยาม 4.4.3 จำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ r น้อยกว่าหรือเท่ากับ s ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $r \le s$ หมายถึง $x < y$ หรือ $x = y$ และสำหรับ r มากกว่าหรือเท่ากับ s ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $r \ge s$ ก็ต่อเมื่อ $s \le r$

นิยาม 4.4.4 จำนวนตรรกยะ r, s และ t ใด ๆ

$x < y < z$ หมายถึง $x < y$ และ $y < z$

$x \le y \le z$ หมายถึง $x \le y$ และ $y \le z$

$x \le y < z$ หมายถึง $x \le y$ และ $y < z$

$x < y \le z$ หมายถึง $x < y$ และ $y \le z$

ทฤษฎีบท 4.4.14 ถ้า r และ s เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว $r = \frac{h}{n}$ และ $s = \frac{k}{n}$ สำหรับบางค่า $h,k,n \in Z^+$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b]$ และ $s=[c,d]$ เมื่อ $a,b,c,d\in Z$
จาก $r,s\in Q^+$ จะได้ว่า $a\cdot b>0$ และ $c\cdot d>0$
จาก $a\cdot b>0$ นั่นคือ $a>0$ และ $b>0$ หรือ $a<0$ และ $b<0$
และ $c\cdot d>0$ นั่นคือ $c>0$ และ $d>0$ หรือ $c<0$ และ $d<0$
กรณีที่ 1 ถ้า $a>0$ และ $b>0$ กับ $c>0$ และ $d>0$
หรือ $a<0$ และ $b<0$ กับ $c<0$ และ $d<0$
จะได้ว่า $a\cdot d, b\cdot c, b\cdot d\in Z^+$ จะได้ $r=[a\cdot d,b\cdot d]$ และ $s=[b\cdot c,b\cdot d]$
จะได้ $r=\dfrac{h}{n}$ และ $s=\dfrac{k}{n}$
กรณีที่ 2 ถ้า $a<0$ และ $b<0$ กับ $c>0$ และ $d>0$
หรือ $a>0$ และ $b>0$ กับ $c<0$ และ $d<0$
จะได้ว่า $(-a)\cdot d,(-b)\cdot c,(-b)\cdot d\in Z^+$ จะได้ว่า

$$r=[(-a)\cdot d,(-b)\cdot d] \text{ และ } s=[(-b)\cdot c,(-b)\cdot d]$$

ให้ $h=(-a)\cdot d, k=(-b)\cdot c$ และ $n=(-b)\cdot d$ จะได้ $r=\dfrac{h}{n}$ และ $s=\dfrac{k}{n}$
ดังนั้น สำหรับ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะบวกแล้ว $r=\dfrac{h}{n}$ และ $s=\dfrac{k}{n}$ สำหรับบางค่า $h,k,n\in Z^+$

สมบัติอาคิมีเดียน (Archimedean property) จำนวนตรรกยะบวก r และ s ใด ๆ ซึ่ง $r<s$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $n\cdot r>s$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะบวก r และ s ใด ๆ โดยที่ $r<s$
โดยทฤษฎีบท 4.4.14 จะมี $a,b,c\in Z^+$
โดยที่ $r=\dfrac{a}{c}$ และ $r=\dfrac{b}{c}$ และ $c\neq 1$

จะได้ว่า $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

และได้ $\dfrac{a}{c}\cdot(c\cdot d)=a\cdot b\geq b$

แต่ $b>\dfrac{b}{c}$

จะได้ $\dfrac{a}{c}\cdot(c\cdot d)>\dfrac{b}{c}$

ให้ $n=cb$

จะได้ $n\cdot r>s$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะบวก r และ s ใด ๆ ซึ่ง $r<s$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $n\cdot r>s$

4.5 สรุป

1. ให้ Q แทนเซตจำนวนตรรกยะนิยามโดย $Q=\{[a.b] \mid$ สำหรับ $a,b\in Z$ โดยที่ $b\neq 0\}$ ซึ่งคู่อันดับ $[a,b]$ คือการดำเนินการ $\frac{a}{b}$

2. การบวกและการคูณจำนวนตรรกยะ สำหรับ $[a,b],[c,d]\in Q$ และ $a,b,c,d\in Z$ โดยที่ $b,d\neq 0$

2.1 การบวก; $[a,b]+[c,d]=[a\cdot d+b\cdot c,b\cdot d]$

2.2 การคูณ; $[a,b]\cdot[c,d]=[a\cdot c,b\cdot d]$

3. สมบัติการบวกจำนวนตรรกยะ ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ

3.1 การปิด; $r+s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

3.2 มีผลลัพธ์เพียงหนึ่ง ; $r+s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

3.3 การเปลี่ยนหมู่ ; $r+(s+t)=(r+s)+t$

3.4 การสลับที่ ; $r+s=s+r$

3.5 การมีเอกลักษณ์; มี 0 ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะที่ทำให้ $r+0=0+r=r$ จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

3.6 การมีตัวผกผัน ; สำหรับทุกๆ จำนวนตรรกยะ r จะมีจำนวนตรรกยะ $-r$ ซึ่งทำให้ $r+(-r)=(-r)+r=0$

3.7 การตัดออก ; ถ้า $r+s=r+t$ แล้ว $s=t$

3.8 การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน; ถ้า $r=s$ แล้ว $r+t=s+t$

4. สมบัติการคูณจำนวนตรรกยะ ให้ r,s และ t เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ

4.1 การปิด ; $r\cdot s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

4.2 การมีผลลัพธ์เพียงหนึ่ง ; $r\cdot s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

4.3 การเปลี่ยนหมู่ ; $r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t$

4.4 การสลับที่ ; $r\cdot s=s\cdot r$

4.5 การมีเอกลักษณ์; มี 1 ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะที่ทำให้ $r\cdot 1=1\cdot r=r$ สำหรับทุกค่า $r\in Q$ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

4.6 สมบัติการมีตัวผกผัน; สำหรับทุกๆ จำนวนตรรกยะ r จะมีจำนวนตรรกยะ r^{-1} ซึ่งทำให้ $r\cdot r^{-1}=r^{1}\cdot r=1$ เรียก r^{-1} ว่าตัวผักผันสำหรับการคูณของ r

4.7 การตัดออก ; ถ้า $r\cdot t=s\cdot t$ แล้ว $r=s$ เมื่อ $t\neq 0$

4.8 การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน; ถ้า $r=s$ แล้ว $r\cdot t=s\cdot t$

5. การลบและการหารจำนวนตรรกให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ

5.1 การลบ ; $r-s=r+(-s)$

5.2 การหาร ; $r\div s=r\cdot s^{-1}=\frac{r}{s}$ เมื่อ $s\neq 0$

6. เซตของจำนวนตรรกยะ Q แบ่งออกเป็น 3 เซตต่อไปนี้

6.1 เซตจำนวนตรรกยะบวก $\left(Q^{+}\right)$ คือ $Q^{+}=\{[a,b] \mid a,b\in Z$ และ $a\cdot b>0\}$

6.2 จำนวนศูนย์

6.3 เซตจำนวนตรรกยะลบ $\left(Q^{-}\right)$ คือ $Q^{-}=\{[a,b] \mid a,b\in Z$ และ $a\cdot b<0\}$

7. ความสัมพันธ์ลำดับของจำนวนตรรกยะ สำหรับ $r,s\in Q$

7.1 $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $s-r\in Q^{+}$

7.2 $r>s$ ก็ต่อเมื่อ $s<r$

8. สมบัติความหนาแน่นจำนวนตรรกยะ r และ s ใด ๆ ที่ $r<s$ จะมีจำนวนตรรกยะ x ที่ $r<x<s$

9. สมบัติอาคิมีเดียน จำนวนตรรกยะบวก r และ s ใด ๆ ซึ่ง $r<s$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $n\cdot r>s$

แบบฝึกหัด 4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.3 สำหรับ $a,b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$ จะได้ว่า
$(a \cdot b, b) \sim (a \cdot c, c) \sim (a,1)$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.4 สำหรับ $b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$ จะได้ว่า $(b,b) \sim (c,c) \sim (1,1)$

3.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.3 สำหรับ $r,s \in Q;\ r+s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

4.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.5 สำหรับ $r,s \in Q$ แล้ว $r+s=s+r$

5.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.10 สำหรับ $r,s \in Q;\ r \cdot s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

6.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.11 สำหรับ $r,s \in Q;\ r \cdot s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.17 สำหรับ $r,s,t \in Q;\ (s+t) \cdot r = (s \cdot r) + (t \cdot r)$

8.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.21สำหรับ $r \in Q;\ -(-r) = r$

9.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.24 สำหรับ $r,s \in Q;\ (-r) \cdot s = r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$

10.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.28 สำหรับ $r \in Q;\ (-r)^{-1} = -r^{-1}$

11.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.2 สำหรับ $r \in Q; r-r=0$

12.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.4 สำหรับ $r,s,t \in Q\ ;\ r \cdot (s-t) = r \cdot s - r \cdot t$

13.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.6 สำหรับ $r,s,t \in Q\ ;\ r-s=t$ ก็ต่อเมื่อ $r=s+t$

14.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.8 สำหรับ $r \in Q;\ r \div r = 1$ เมื่อ $r \neq 0$

15.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.9 สำหรับ $r \in Q; 1 \div r = \frac{1}{r}$ เมื่อ $r \neq 0$

16.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.12 สำหรับ $r,s \in Q;\ -r \div (-s) = r \div s$ เมื่อ $s \neq 0$

17.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.15 สำหรับ $r,s \in Q$; ถ้า $r,s \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{r \cdot s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s}$

18.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.3.17 สำหรับ $r,s,t,u \in Q$; ถ้า $s,t,u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s} \div \frac{t}{u} = \frac{r}{s} \cdot \frac{u}{t} = \frac{r \cdot u}{s \cdot t}$

19.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.4.2 สำหรับ $r \in Q;\ r$ เป็นจำนวนตรรกยะลบก็ต่อเมื่อ $r<0$

20.จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.4.5 สำหรับ $r,s,t \in Q\ ;\ r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r-t<s-t$

บทที่ 5
จำนวนจริง

บทนี้จะกล่าวถึง ส่วนตัดเดเดคินด์ ทฤษฎีบทสำหรับส่วนตัด การบวก การลบส่วนตัด สมบัติการบวกส่วนตัด การคูณส่วนตัดบวก สมบัติการคูณส่วนตัดบวก ลำดับของส่วนตัดการกำหนดจำนวนจริง สัจพจน์ของจำนวนจริง สมบัติของจำนวนจริง ความสัมพันธ์ลำดับของจำนวนจริง

5.1 นิยามและสมบัติเบื้องต้น

พิจารณาปัญหา สมการ $x^2 = 2$ ซึ่งพบว่าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนตรรกยะที่สอดคล้องสมการดังกล่าวได้ จากปัญหาข้างต้นจะแสดงข้อความที่ว่า
ไม่มีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $x^2 = 2$

พิสูจน์ สมมติว่า มีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $x^2 = 2$ ดังนั้นจึงสามารถเขียนแทน x ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม $\frac{m}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม คือ 1 ได้ ก็คือ $x = \frac{m}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม $(m,n) = 1$

ดังนั้น $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$

จึงได้ว่า $2n^2 = m^2$

ดังนั้น m^2 เป็นจำนวนคู่ จึงได้ว่า m เป็นจำนวนคู่

ให้ $m = 2k$ เมื่อ $k \in Z$

จึงได้ว่า $m^2 = 4k^2 = n^2$

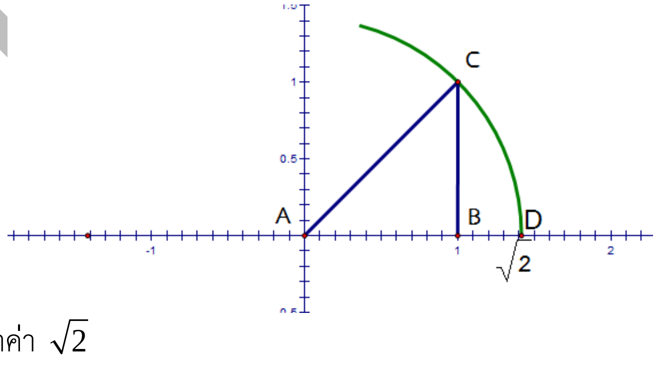
นั่นคือ n^2 เป็นจำนวนคู่ จึงได้ว่า n เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น ห.ร.ม $(m,n) \geq 2 \neq 1$

นั่นคือ x เขียนในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม $\frac{m}{n}$ โดยที่ ห.ร.ม.$(m,n) = 1$ ไม่ได้

ดังนั้น x จึงไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

การพิสูจน์ข้างต้นแสดงว่า ถ้า $x^2 = 2$ แล้ว x ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ สามารถเขียนแทนด้วย $x = \sqrt{2}$ ซึ่ง $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ต่อไปจะแสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริง



ภาพที่ 5.1.1 การหาค่า $\sqrt{2}$

ให้ A และ B เป็นจุดซึ่งแทน 0 และ 1 ตามลำดับ ลาก BC ตั้งฉากกับ AB และให้ BC มีความยาวเท่ากับ AB (คือยาวเท่ากับ 1 หน่วย) ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนเส้นโค้งของวงกลมด้วยรัศมี AC ตัดเส้นตรง AB ที่จุด D จากเรขาคณิตทราบว่า

(ความยาว AD)$^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

ดังนั้น AD ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย จุด D จึงเป็นจุดที่แทนจำนวนอตรรกยะ นี้แสดงให้เห็นว่า ยังมีจุดซึ่งไม่ได้ถูกใช้แทนจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่งจะพบว่ามีจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะหรือเรียกว่าจำนวนอตรรกยะอีกมาก เช่น $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$ เป็นต้น

สำหรับข้อความ “ถ้า q เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ และ r เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว qr ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ”

พิสูจน์ สมมติว่า q เป็นจำนวนตรรกยะ และ $q \neq 0$ และ r เป็นจำนวนอตรรกยะ

ให้ $q = \dfrac{m}{n}$ และ $n \neq 0$

สมมติว่า qr เป็นจำนวนตรรกยะ สามารถเขียนในรูปเศษส่วนได้โดย

ให้ $qr = \dfrac{a}{b}$ สำหรับ $a, b \in Z$ และ $b \neq 0$

$$\frac{m}{n} r = \frac{a}{b}$$

$$r = \frac{n}{m} \cdot \frac{a}{b} \in Q$$

ขัดแย้งข้อความที่ว่า $r \notin Q$

นั่นคือ $qr \notin Q$

จากปัญหาข้างต้นจึงมีการสร้างจำนวนขึ้นมาใหม่ให้ครอบคลุม แนวคิดในการสร้างจำนวนจริงคือ

ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะ สร้างเซต $C(r) = \{x \in Q \mid x < r\}$ และกำหนดตัวดำเนินการบวก ดังนี้

$$C(r) + C(s) = \{r + s \mid r \in C(r) \text{ และ } s \in C(s)\}$$

จะพบว่าการบวกมีสมบัติดังนี้

$$C(r) + C(s) = C(r + s)$$

เป็นการง่ายที่จะพิสูจน์สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม สมบัติการสลับที่ สมบัติการมีเอกลักษณ์และตัวผกผัน ฯลฯ ได้ และอาจจะใช้นิยามการคูณ เพื่อที่จะให้เซตดังกล่าวข้างต้น และการดำเนินการมีสมบัติเช่นเดียวกับจำนวนตรรกยะได้

ในกรณีทั่วไป จะสร้างเซตจำนวนที่มีสมบัติทำนองเดียวกับข้างบน และมีสมบัติอื่น ๆ อีกเพื่อให้สอดคล้องกับสมบัติของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะตามที่ต้องการ เซตที่จะสร้างใหม่ นี้เรียกว่า ส่วนตัดเดเดคินด์ โดยสรุปเป็นนิยามดังนี้

นิยาม 5.1.1 สำหรับเซต C ที่เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของจำนวนตรรกยะ Q เรียกเซต C ว่าส่วนตัดเดเดคินด์ (dedekind's cut) เมื่อเซต C สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. $C \neq \phi$ และ $C \neq Q$
2. ถ้า $x \in Q$ และ $c \in C$ โดยที่ $x < c$ แล้ว $x \in C$
3. ถ้า $c \in C$ จะมี $x \in C$ ซึ่ง $x > c$

ข้อสังเกต

1. นิยามข้อ 2 พบว่า ถ้าส่วนตัดประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ แล้วจำนวนตรรกยะที่มีค่าน้อยกว่า r ทั้งหมดจะอยู่ในเซต C
2. นิยามข้อ 3 พบว่า ส่วนตัดเดเดคินด์จะไม่มีจำนวนที่มีค่ามากที่สุด
3. เรียกส่วนตัดเดเดคินด์สั้น ๆ ว่า ส่วนตัด

ตัวอย่าง 5.1.1 ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะ กำหนดเซต $C(r) = \{x \in Q \mid x < r\}$ จงแสดงว่าเซต $C(r)$ เป็นส่วนตัด

วิธีทำ 1. จะแสดงว่า $C(r) \neq \phi$ และ $C(r) \neq Q$

จาก $2 \in Q$ และ $2 < 5$ สำหรับ 5 ที่เป็นจำนวนตรรกยะ

จึงได้ว่า $2 \in C(r)$

ดังนั้น $C(r) \neq \phi$

จาก ทุกค่า $x \in C(r); x < r$ สำหรับทุกค่า r เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น $C(r) \neq Q$

2. จะแสดงว่า ถ้า $x \in C(r)$ และสำหรับ $a \in Q$ ที่ $a < x$ แล้ว $a \in C(r)$

ให้ $x \in C(r)$ จะได้ว่า $x < r$ สำหรับทุกค่า r เป็นจำนวนตรรกยะ

ถ้า $a \in Q$ และ $a < x$ จึงได้ว่า $a < r$ สำหรับทุกค่า r เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น $a \in C(r)$

3. จะแสดงว่า ถ้า $x \in C(r)$ แล้วต้องมี $c \in C(r)$ ซึ่ง $x < c$

ถ้า $x \in C(r)$ จะได้ว่า $x < r$ สำหรับทุกค่า r เป็นจำนวนตรรกยะ

สำหรับ x และ r ที่เป็นจำนวนตรรกยะ มีจำนวนตรรกยะ c

ซึ่งทำให้ $x < c < r$

ดังนั้น $x < c$

จากข้อ 1,ข้อ 2 และข้อ 3 จึงได้ว่า เซต $C(r)$ เป็นส่วนตัด เรียกเซต $C(r)$ ว่าส่วนตัดตรรกยะ

ทฤษฎีบท 5.1.1 ถ้า C เป็นส่วนตัดและสำหรับจำนวนตรรกยะบวก r ใด ๆ จะมี $c \in C$ และ $c' \in C'$ ที่ทำให้ $c' - c = r$

พิสูจน์ กำหนดให้ $E = \{x \mid x = d + r, d \in C\}$ และจำนวนตรรกยะบวก r ใด ๆ

จะได้ว่า $C \subset E$ และ $C \neq E$

เลือก $y \in E$ แต่ $y \notin C$

ทำให้ $y = c + r = c'$

นั่นคือ $c' \in C'$ จึงได้ว่า $c' - c = r$

ดังนั้น สำหรับ $C \in R$ และ $r \in Q^+$ จะมี $c \in C$ และ $c' \in C'$ ที่ทำให้ $c' - c = r$

นิยาม 5.1.2 ส่วนตัด C จะเป็นส่วนตัดบวก เมื่อ C มีจำนวนตรรกยะบวกอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นสมาชิกของ C

นิยาม 5.1.3 ส่วนตัด C จะเป็นส่วนตัดลบ เมื่อ C มีจำนวนตรรกยะลบอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นสมาชิกของ C

ทฤษฎีบท 5.1.2 ถ้า C เป็นส่วนตัดแล้ว C จะไม่สามารถเป็นทั้งส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบพร้อมกันได้

พิสูจน์ ให้ C เป็นส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบพร้อมกัน

ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก จากนิยาม 5.1.2 มีจำนวนตรรกยะบวก $x \in C$ ....(1)

และ ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ จากนิยาม 5.1.3 มีจำนวนตรรกยะลบ $y \notin C$ ....(2)

จาก x เป็นจำนวนตรรกยะบวก และ y เป็นจำนวนตรรกยะลบ

จึงได้ว่า $y < x$

จากนิยาม 5.1.1 ข้อ 2 จึงได้ว่า $y \in C$ ขัดแย้งกับข้อสมมติที่ (2)

ดังนั้น ส่วนตัด C ไม่สามารถเป็นส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบพร้อมกันได้

ทฤษฎีบท 5.1.3 ถ้า C เป็นส่วนตัด และ x เป็นจำนวนตรรกยะบวก ที่ไม่เป็นสมาชิกของ C แล้ว x จะมีค่ามากกว่าทุกจำนวนตรรกยะใน C

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนตรรกยะบวกที่ไม่เป็นสมาชิกของ C และ y เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ ใน C

ถ้า $x = y$ จะได้ว่า $x \in C$ ซึ่งขัดแย้ง

ถ้า $x < y$ โดยนิยาม 5.1.1 ข้อ 2 จึงได้ว่า $x \in C$ ซึ่งขัดแย้ง

จึงได้ว่า $x > y$ ได้เพียงกรณีเดียว

ดังนั้น ถ้า C เป็นส่วนตัด และ x เป็นจำนวนตรรกยะบวก ที่ไม่เป็นสมาชิกของ C แล้ว x จะมีค่ามากกว่าทุกจำนวนตรรกยะใน C

ทฤษฎีบท 5.1.4 ให้ C เป็นส่วนตัดที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด แล้ว C จะไม่เป็น ทั้งส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบ

พิสูจน์ ให้ C เป็นส่วนตัดที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด
กรณีที่ 1 สมมติให้ C เป็นส่วนตัดบวก
โดยนิยาม 5.1.2 ต้องมีจำนวนตรรกยะบวก $x \in C$
แต่ C เป็นส่วนตัดที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด
จึงได้ว่า $x \notin C$
ดังนั้น C ไม่เป็นส่วนตัดบวก
กรณีที่ 2 สมมติให้ C เป็นส่วนตัด
โดยนิยาม 5.1.3 ต้องมีจำนวนตรรกยะลบ $y \notin C$
แต่ C เป็นส่วนตัดที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด
จึงได้ว่า $y \in C$
ดังนั้น C ไม่เป็นส่วนตัดลบ
จากกรณีที่ 1 และ2 ถ้า C เป็นส่วนตัดที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรรกยะลบทั้งหมด แล้ว C จะไม่เป็นทั้งส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบ

นิยาม 5.1.4 ให้ D และ C เป็นส่วนตัดใด ๆ C จะน้อยกว่า D ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกของ D อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ไม่เป็นสมาชิกของ C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C < D$

ทฤษฎีบท 5.1.5 ทุกส่วนตัดลบน้อยกว่าทุกส่วนตัดบวก

พิสูจน์ ให้ D เป็นส่วนตัดบวกและ C เป็นส่วนตัดลบใด ๆ
จาก D เป็นส่วนตัดบวกมีจำนวนตรรกยะบวก $x \in D$
เนื่องจาก C เป็นส่วนตัดลบ
ได้ว่า $x \notin C$
โดยนิยาม 5.1.4 มี $x \in D$ แต่ $x \notin C$ จึงได้ว่า $C < D$
ดังนั้น ทุกส่วนตัดลบน้อยกว่าทุกส่วนตัดบวก

ตัวอย่าง 5.1.2 จงแสดงว่า $C(3) = \{x \in Q \mid x < 3\}$ เป็นส่วนตัด

วิธีทำ 1. $C(3) \neq \phi$ เพราะมีจำนวนตรรกยะที่น้อยกว่า 3 เช่น 2 และ $2 < 3$ และ
$C(3) \neq Q$ เพราะมีจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นสมาชิกของ C เช่น 5 และ $5 > 3$
2. ให้ $b \in C(3)$ จึงได้ว่า $b < 3$
ถ้า $x \in Q$ และ $x < b$ จะได้ว่า $x < b < 3$
นั่นคือ $x < 3$
ดังนั้น $x \in C(3)$

3. ให้ $b \in C(3)$ จะได้ว่า $b \in Q$ และ $b < 3$

ให้ $x = \dfrac{b+3}{2}$ จะได้ว่า $x \in Q$ และ $b < x < 3$

ดังนั้น มี $x \in C(3)$ โดยที่ $x > b$

จากข้อ 1, ข้อ 2 และข้อ 3 $C(3) = \{x \in Q \mid x < 3\}$ เป็นส่วนตัด

ตัวอย่าง 5.1.3 ถ้า C เป็นส่วนตัด กำหนดเซต $-C = \{x \in Q \mid x < c'$ สำหรับบางค่า $c' \in C'\}$ จงแสดงว่าเซต $-C$ เป็นเป็นส่วนตัด

วิธีทำ 1. จะพบว่า $-C \neq \phi$ และ $-C \neq Q$ คือ $-C$ เป็นเซตย่อยแท้ของ Q

2. ให้ $b \in -C$ จะได้ว่า $b < -c'$ เมื่อ $c' \in C'$

ถ้า $x \in Q$ และ $x < b$ แล้ว

จะได้ $x < -c'$ เมื่อ $c' \in C'$

ดังนั้น $x \in -C$

3. ให้ $b \in -C$ ดังนั้น $b < -c'$ เมื่อ $c' \in C'$

จาก $b < -c'$ จะมีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $b < x < -c'$ เมื่อ $c' \in C'$

นั่นคือ มี $x \in -C$ ที่มีสมบัติว่า $x > b$

จากข้อ 1,ข้อ 2 และข้อ 3 จึงได้ $-C = \{x \in Q \mid x < c'$ สำหรับบางค่า $c' \in C'\}$ เป็นส่วนตัด

ทฤษฎีบท 5.1.6 จำนวนตรรกยะ r ใด ๆ เซต $C(r) = \{x \in Q \mid x < r\}$ เป็นส่วนตัด

พิสูจน์ 1. จะแสดงว่า $C(r) \neq \phi$ และ $C(r) \neq Q$

1.1 จะแสดงว่า $C(r) \neq \phi$ ต้องแสดงว่ามีจำนวนตรรกยะ $x < r$

ให้ $x \in Q$ และให้ $x = r - 1$ ซึ่ง $r - 1$ ที่น้อยกว่า r

จึงได้ $x = r - 1 < r$

ดังนั้น $C(r) \neq \phi$

1.2 จะแสดงว่า $C(r) \neq Q$ ต้องแสดงมีจำนวนตรรกยะ $r \in Q$ แต่ $r \notin C$

ให้ $r \in Q$ จะพบว่า $r \in C$ ตามสมบัติของเซต $C(r)$

ดังนั้น $C(r) \neq Q$

2. ถ้า $z \in Q$ และ $u \in C(r)$ โดยที่ $z < u$ ต้องการ $z \in C(r)$ ต้องแสดงว่า $z < r$

จาก $z < u$ และ $u \in C(r)$ จึงได้ $u < r$ จึงได้ $z < r$

ดังนั้น $z \in C(r)$

3. ถ้า $u \in C(r)$ จะได้ว่า $u \in Q$ และ $u < r$

จะได้ว่า มี $z \in Q$ ซึ่งทำให้ $u < z < r$

ดังนั้น $z \in C(r)$ โดยที่ $z > u$

ดังนั้น สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $C(r) = \{x \in Q \mid x < r\}$ เป็นส่วนตัด

นิยาม 5.1.3 สำหรับ $r \in Q$ กำหนดเซต $C(r) = \{x \in Q \mid x < r\}$ เรียกเซต $C(r)$ ว่าส่วนตัดตรรกยะ (rational cut)

5.2 การบวกและการลบส่วนตัด

จากนิยามส่วนตัดอยู่ในรูปของเซตนั้น ทำให้การบวกส่วนตัด และการลบส่วนตัดต้องนิยามอยู่ในรูปของเซตดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 5.2.1 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ การดำเนินการบวกของ C และ D คือ

$$C + D = \{x \mid x = c + d \text{ สำหรับ } c \in C \text{ และ } d \in D\}$$

ข้อสังเกต จาก C และ D เป็นส่วนตัดซึ่งจะได้ว่า $C \subset Q$ และ $D \subset Q$ เพราะฉะนั้น $C + D \subset Q$

ทฤษฎีบท 5.2.1 สมบัติปิด ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ $C + D$ เป็นส่วนตัด

พิสูจน์ ให้ C, D เป็นส่วนตัด กำหนดเซต

$E = \{x \mid x = c + d \text{ สำหรับ } c \in C \text{ และ } d \in D\}$

1. จะแสดงว่า $E \neq \phi$ และ $E \neq Q$

1.1 จะแสดงว่า $E \neq \phi$

จาก $C \neq 0$ และ $D \neq 0$ ดังนั้น มี $c \in C$ และ $d \in D$

จะได้ว่า $c + d \in E$

ดังนั้น $E \neq \phi$

1.2 จะแสดงว่า $E \neq \phi$

จาก $C \neq Q$ และ $D \neq Q$

ดังนั้น มี $w, z \in Q$ โดย $w \notin C$ และ $z \notin D$

ถ้า $c \in C$ และ $d \in D$ จะได้ $c < w$ และ $d < z$

และได้ $c + d < w + z$ สำหรับ $c \in C$ และ $d \in D$

จึงได้ว่า $w + z \notin E$

ดังนั้น $E \neq Q$

2. จะแสดงว่า ถ้า $w \in Q$ และ $x \in E$ โดยที่ $w < x$ แล้ว $w \in E$

จาก $w < x$ สำหรับ $x \in E$

ให้ $x = c + d$ สำหรับ $c \in C$ และ $d \in D$

จะได้ $w < c + d$ และได้ $w - c < d$

โดยบทนิยาม 5.1.1 $w - c \in D$

พิจารณา $\qquad w = w + 0$

$$= w + (c - c)$$
$$= c + (w - c) \text{ เมื่อ } c \in C \text{ และ } (w - c) \in D$$

ดังนั้น $w \in E$

3. จะแสดงว่า ถ้า $x \in E$ จะมี $w \in E$ ซึ่ง $w > x$

จาก $x \in E$ จะได้ว่า $x = c + d$ สำหรับ $c \in C$ และ $d \in D$

โดยนิยาม 5.1.1 มี $c' \in C$ และ $d' \in D$

โดยที่ $c < c'$ และ $d < d'$

จึงได้ว่า $c + d < c' + d'$ และจาก $c' + d' \in E$

ดังนั้น $x < c' + d'$ และ $c' + d' \in E$

จากข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 ทำให้ เซต $E = \{x \mid x = c + d$ สำหรับ $c \in C$ และ $d \in D\}$ เป็นส่วนตัด

ทฤษฎีบท 5.2.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ

$$(C + D) + E = C + (D + E)$$

พิสูจน์ สำหรับ C, D และ E เป็นเป็นส่วนตัดใดๆ

1. จะแสดงว่า $(C + D) + E \subseteq C + (D + E)$

ให้ $x \in (C + D) + E$

โดยนิยาม $x = g + e$ สำหรับ $g \in C + D$ และ $e \in E$

$= (c + d) + e$ สำหรับ $c \in C$, $d \in D$ และ $e \in E$

จึงได้ว่า $= c + (d + e)$ สำหรับ $c \in C, d \in D$ และ $e \in E$

$= c + h$ สำหรับ $c \in C$ และ $h \in D + E$

นั่นคือ $x \in C + (D + E)$

ดังนั้น $(C + D) + E \subseteq C + (D + E)$

2. จะแสดงว่า $C + (D + E) \subseteq (C + D) + E$

ให้ $x \in C + (D + E)$

โดยนิยาม $x = c + h$ สำหรับ $c \in C$ และ $h \in D + E$

$= c + (d + e)$ สำหรับ $c \in C, d \in D$ และ $e \in E$

$= (c + d) + e$ สำหรับ $c \in C, d \in D$ และ $e \in E$

$= g + e$ สำหรับ $g \in C + D$ และ $e \in E$

นั่นคือ $x \in (C + D) + E$

ดังนั้น $C + (D + E) \subseteq (C + D) + E$

จากข้อ 1 และ2 จึงได้ว่า $(C + D) + E = C + (D + E)$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C, D และ E ใด ๆ $(C + D) + E = C + (D + E)$

ทฤษฎีบท 5.2.3 สมบัติการสลับที่ ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ $C + D = D + C$

พิสูจน์ สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ

1. จะแสดงว่า $C+D \subseteq D+C$

ให้ $x \in C+D$

จากนิยาม 5.2.1 $x = c+d$ สำหรับ $c \in C$ และ $d \in D$

$= d+c$ สำหรับ $d \in D$ และ $c \in C$

จากนิยาม 5.2.1 $x \in D+C$

นั่นคือ $C+D \subseteq D+C$

2. จะแสดงว่า $D+C \subseteq C+D$

ให้ $x \in D+C$

จากนิยาม 5.2.1 $x = d+c$ สำหรับบางค่า $d \in D$ และบางค่า $c \in C$

$= c+d$ สำหรับบางค่า $c \in C$ และบางค่า $d \in D$

จากนิยาม 5.2.1 $x \in C+D$

นั่นคือ $D+C \subseteq C+D$

จากข้อ 1 และข้อ 2 จึงได้ว่า $C+D = D+C$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ $C+D = D+C$

ทฤษฎีบท 5.2.4 ให้ C เป็นส่วนตัดใด ๆ มี D เพียงเซตเดียวซึ่ง $C+D = C$

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด C ใดๆ และให้ $D = C(0) = \{x \in Q \mid x < 0\}$

1. จะแสดงว่า $C+D \subseteq C$

ให้ $x \in C+D$ จึงได้ว่า $x = c+d$ เมื่อ บางค่า $c \in C$ และบางค่า $d \in D$

จาก $d \in D$ จึงได้ $c+d < c$ และ $c+d \in Q$

จาก C เป็นส่วนตัดโดยสมบัติข้อ 3 ในบทนิยาม

จึงได้ว่า $c+d \in C$

นั่นคือ $x \in C$

ดังนั้น $C+D \subseteq C$

2. จะแสดงว่า $C \subseteq C+D$

ให้ $x \in C$ จึงได้ $t > x$ สำหรับบางค่า $t \in C$

ให้ $x = s+t$ เมื่อ บางค่า $c \in C$ และบางค่า $d \in D$

$x \in C+D$

นั่นคือ $C \subseteq C+D$

จาก ข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า $C+D = C$

ดังนั้น สำหรับส่วนตัด C มีเซต D ซึ่ง $C+D = C$

จะแสดงว่ามี $D = C(0) = \{x \in Q \mid x < 0\}$ เพียงเซตเดียวซึ่ง $C+D = C$

ให้ $F \in R$ โดยที่ $C+F = C$

จะได้ $F = F+D = D+F = D$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C ใด ๆ มี D เพียงเซตเดียวซึ่ง $C+D=C$

นิยาม 5.2.2 ส่วนตัด $C(0)=\{x\in Q \mid x<0\}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 0^* และเรียกว่า 0^* เอกลักษณ์สำหรับการบวก

จากนิยาม 5.2.2 และทฤษฎีบท 5.2.4 สำหรับส่วนตัด C ใด ๆ จะ 0^* เพียงเซตเดียวซึ่ง $C+0^*=0^*+C=C$

ทฤษฎีบท 5.2.5 ส่วนตัด C ใด ๆ ให้ $-C=\{x\in Q \mid x<-t \text{ สำหรับ } \exists t\in C'\}$ จะได้ว่า $-C$ เป็นส่วนตัด

พิสูจน์ 1. จะแสดงว่า $-C\neq\phi$ และ $-C\neq Q$

1.1 จาก $C\neq Q$ จึงได้ว่า $C'\neq\phi$

จะมี $t\in C'$

ให้ $x=t+1$

จะได้ $x>t$

ดังนั้น $-x<-t$ สำหรับบางค่า $t\in C'$

นั่นคือ $-x\in -C$

ดังนั้น $-C\neq\phi$

1.2 จาก $c\in C$ แล้วจะมี $c<t$ สำหรับทุกค่า $t\in C'$

จึงได้ว่า $-c>-t$ สำหรับทุกค่า $t\in C'$

$-c\notin -C$

แต่ $-c\in Q$

ดังนั้น $-C\neq Q$

จาก 1.1 และ1.2 $-C\neq\phi$ และ $-C\neq Q$

2. จะแสดงว่า ถ้า $r\in Q$ และ $c\in -C$ โดยที่ $r<c$ แล้ว $r\in -C$

ให้ $c\in -C$ จึงได้ว่า $c<-t$ สำหรับบางค่า $t\in C'$

แต่ $r<c$; $r<c<-t$ สำหรับบางค่า $r\in Q$ และบางค่า $t\in C'$

จึงได้ $r<-t$ สำหรับบางค่า $t\in C'$

นั่นคือ $r\in -C$

3. สมมติว่า $c\in -C$ และ $q\in Q$ โดยที่ $q<c$

จาก $c\in -C$ จะได้ว่า $c<-t$ สำหรับบางค่า $t\in C'$

ดังนั้น $q<-t$ สำหรับบางค่า $t\in C'$

เพราะฉะนั้น $q\in -C$

จากข้อ 1 ข้อ 2 และข้อ 3 จะได้ว่า $-C$ เป็นส่วนตัด

ทฤษฎีบท 5.2.6 ให้ C เป็นส่วนตัดใดๆ และ $r\in Q^+$ จะมี $p\in C$ และ $q\in C'$ ซึ่ง $q-p=r$ และ q ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

พิสูจน์ เลือกจำนวนตรรกยะ c ใน C จำนวนหนึ่ง

ให้ $c_n = c + nr$ สำหรับทุกค่า $n \in N$

สมมติให้ $t \in C'$ ซึ่ง $c + nr < t$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

เนื่องจาก $r > 0$ และ $c + nr < t$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

ดังนั้น $n < \dfrac{t-c}{r}$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

พิจารณา $\dfrac{t-c}{r}$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก

ดังนั้น $u, v \in N - \{0\}$ ซึ่ง $\dfrac{t-c}{r} = \dfrac{u}{v}$

จะได้ว่า $n < \dfrac{u}{v}$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

หรือ $nv < u$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

ให้ $C = \{x \in N \mid nv < x, \forall n \geq 1\}$

จะได้ว่า $C \subset N$ และ $C \neq \phi$ เพราะว่า $u \in C$

โดย well – Ordering Principle

จะได้ว่า C มีสมาชิกที่เล็กที่สุด สมมติให้เป็น b (ดังนั้น $b \geq 1$ แล้ว $b - 1 \geq 0$)

ดังนั้น $(b-1) \notin C$

จึงได้ $nv \geq b - 1$ สำหรับบางค่า $n \in N$

$$b \leq nv + 1 \leq nv + v \leq (n+1)v$$

แต่ $b \in C$ แล้ว $b > (n+1)v$

เกิดขัดแย้ง กับที่สมมติว่า $t \in C'$ ซึ่ง $c + nr < t$ สำหรับทุกค่า $n \geq 1$

นั่นคือ มี $m \in N$ ซึ่ง $c + mr \geq t$ สำหรับทุกค่า $t \in C'$

ดังนั้น $c_m = c + mr \in C'$

ให้ $B = \{n \in N \mid c_n \in C'\}$

จะได้ว่า $B \neq \phi$ เพราะว่า $m \in B$

โดย well – Ordering Principle

จะได้ว่า B มีสมาชิกที่เล็กที่สุด ให้เป็น d

จึงได้ $d \geq 1$ เพราะว่าถ้า $d = 0$ จะทำให้ $c_d = c + 0r = c \in C'$

ซึ่งขัดแยงกับที่เลือก $c \in C$

ดังนั้น $d - 1 \geq 0$ และ $d - 1 < d$

จะได้ $(d-1) \notin B$

เพราะฉะนั้น $c_{d-1} \in C$ แต่ $c_d \in C'$

ถ้า c_d ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

ให้ $p = c_{d-1}$ และ $q = c_d$

จะได้ $p \in C$ และ $q \in C', q$ ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

และ
$$\begin{aligned} p-q &= c_{d-1}-c_d \\ &= [c+(d-1)r]-[c+cr] \\ &= r \end{aligned}$$

ถ้า c_d เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

ให้ $p = c_{d-1}+\dfrac{r}{2}$ และ $q = c_d+\dfrac{r}{2}$

จาก
$$\begin{aligned} p &= c_{d-1}+\frac{r}{2} \\ &= c+(d-1)r+\frac{r}{2} \\ &= c+dr-\frac{r}{2} \\ &= c_d-\frac{r}{2} \end{aligned}$$

แต่ c_d เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

ดังนั้น $p \in C$

$c_d \in C'$ และ $q > c_d$ แล้วจึงได้ $q \in C'$

จะได้ $p \in C, q \in C', q$ ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C' และ

$$\begin{aligned} p-q &= c_{d-1}+\frac{r}{2}-c_d-\frac{r}{2} \\ &= c_{d-1}-c_d \\ &= c+(d-1)-c-dr = r \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ C เป็นส่วนตัด และ $r \in Q^+$ จะมี $p \in C$ และ $q \in C'$ ซึ่ง $q-p=r$ และ q ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C'

ทฤษฎีบท 5.2.7 สำหรับส่วนตัด C จะมี $-C$ เพียงเซตเดียวโดยที่ $C+(-C)=0^*$

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด C ใด ๆ

1. จะแสดงว่า $C+(-C) \subseteq 0^*$

ให้ $x \in C+(-C)$ จึงได้ว่า $x = s+r$ สำหรับ $s \in C$ และ $r \in -C$

แต่ $r \in -C$ จึงได้ว่า $r < -t$ สำหรับ $t \in C'$

$r+s < s-t$ สำหรับ $t \in C'$

ดังนั้น $x < s-t$ สำหรับ $t \in C'$

แต่ $t \in C'$ จึงได้ว่า $t > s$ ทุกค่า $s \in C$

$t-s < 0$

จะได้ว่า $x < 0$

นั่นคือ $x \in 0^*$

ดังนั้น $C + (-C) \subseteq 0^*$

2. จะแสดงว่า $0^* \subseteq C + (-C)$

ให้ $x \in 0^*$ จะได้ว่า $x < 0$ ดังนั้น $-x > 0$

มี $p \in C$ และ $q \in C'$ โดยที่ $q - p = -x$ ....(1)

และ q ไม่ใช่สมาชิกที่เล็กที่สุดของ C' ....(2)

จาก(2); จะได้ว่า $s \in C'$ ซึ่ง $s < q$

นั่นคือ $-q < -s$ บางค่า $s \in C'$

ดังนั้น $-q \in -C$

จาก (1) จะได้ $x = p + (-q)$ โดยที่ $p \in C$ และ $-q \in -C$ ดังนั้น $x \in C + (-C)$

นั่นคือ $0^* \subseteq C + (-C)$

จากข้อ 1 และข้อ 2 จะได้ว่า $C + (-C) = 0^*$

ดังนั้น สำหรับส่วนตัด C ใด ๆ มี $-C$ ซึ่งทำให้ $C + (-C) = 0^*$

จะแสดงว่ามี $-C$ เพียงเซตเดียวซึ่ง $C + (-C) = 0^*$

ให้ D เป็นเซตจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $C + D = 0^*$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
D &= D + 0^* \\
&= D + [C + (-C)] \\
&= (C + D) + (-C) \\
&= 0^* + (-C) \\
&= -C
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สำหรับส่วนตัด C ใดๆ จะมี $-C$ เพียงเซตเดียวซึ่งทำให้ $C + (-C) = 0^*$

นิยาม 5.2.3 ส่วนตัด C จะมีส่วนตัด $-C = \{x \in Q \mid x < -t$ สำหรับบางค่า $t \in C'\}$ และเรียก $-C$ ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของดส่วนตัด C

จากนิยาม 5.2.3 และทฤษฎีบท 5.2.7 สำหรับส่วนตัด C จะมี $-C$ เพียงเซตเดียวซึ่ง $C + (-C) = 0^* = (-C) + C$ สำหรับทุกค่า C ที่เป็นเซตจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 5.2.8 ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $C = D$ แล้ว $C + E = D + E$

พิสูจน์ ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $C = D$

1. จะแสดงว่า $C+E\subseteq D+E$

ให้ $x\in C+E$

$x=c+d$ สำหรับ $c\in C$ และ $d\in D$

จาก $C=D$

จึงได้ว่า $c\in C$ แล้ว $c\in D$

มีบางค่า $d\in D$ ซึ่งทำให้ $c=d$

$$c+e=d+e$$

$$x=c+e$$

$$=d+e$$ โดยที่ $d\in D$ และ $e\in E$

จึงได้ว่า $x\in D+E$

ดังนั้น $C+E\subseteq D+E$

2. จะแสดงว่า $D+E\subseteq C+E$

ให้ $y\in D+E$

$y=d+e$ สำหรับ $d\in D$ และ $e\in E$

จาก $C=D$

จึงได้ว่า $d\in D$ แล้ว $d\in C$

มีบางค่า $c\in C$ ซึ่งทำให้ $c=d$

$$d+e=c+e$$

$$y=d+e$$

$$=c+e$$ สำหรับ $c\in C$ และ $e\in E$

จึงได้ $y\in C+E$

ดังนั้น $D+E\subseteq C+E$

จากข้อ 1 และ2 จึงได้ $C+E=D+E$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C,D และ E ใด ๆ ถ้า $C=D$ แล้ว $C+E=D+E$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C+D=C+E$ แล้ว $D=E$

พิสูจน์ ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ และ $C+D=C+E$

จาก $$C+D=C+E$$

จาก $C\in R$ จะมี $-C\in R;$ $(C+D)+(-C)=(C+E)+(-C)$

$$[C+(-C)]+D=[C+(-C)]+E$$

$$0^*+D=0^*+E$$

$$D=E$$

ดังนั้น ทุกเซจจำนวนจริง C,D และ E ใด ๆ ถ้า $C+D=C+E$ แล้ว $D=E$

ทฤษฎีบท 5.2.10 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $C+D=0^*$ แล้ว $C=-D$

พิสูจน์ ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ และ $C+D=0^*$

จาก $C+D=0^*$

มี $-D$; $(C+D)+(-D)=0^*+(-D)$

$$C+[D+(-D)]=-D$$

$$C+0^*=-D$$

$$C=-D$$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ ถ้า $C+D=0^*$ แล้ว $C=-D$

ทฤษฎีบท 5.2.11 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $C+D=D$ แล้ว $C=0^*$
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

นิยาม 5.2.4 ให้ C ส่วนตัด ใด ๆ C เป็นส่วนตัดบวกก็ต่อเมื่อ มี $r\in Q^+$ ซึ่ง $r\in C$ และ C เป็นส่วนตัดลบก็ต่อเมื่อ มี $s\in Q^-$ ซึ่ง $s\notin C$

ตัวอย่าง 5.2.1 ส่วนตัด $C(3)=\{x\in Q \mid x<3\}$ เป็นส่วนตัดบวก เพราะ มี $2\in Q^+$ และ $2\in C(3)$

ตัวอย่าง 5.2.2 ส่วนตัด $C(-5)=\{x\in Q \mid x<-5\}$ เป็นส่วนตัดลบ เพราะว่ามี $-2\in Q^-$ และ $-2\notin C(3)$

ข้อสังเกต

1. ถ้า C เป็นเป็นส่วนตัดบวก จะมี $r\in Q^+$ ซึ่ง $r\in C$ หรือกล่าวได้ว่าถ้า $x\in Q$ และ $x<r$ แล้ว $x\in C$ ดังนั้น จำนวนตรรกยะลบทุกตัว และศูนย์ไม่เป็นสมาชิกของ C

2. ถ้า C เป็นเป็นส่วนตัดลบ จะมี $r\in Q^-$ ซึ่ง $r\notin C$ หรือกล่าวได้ว่าถ้า $x\in Q$ และ $x>r$ แล้ว $x\notin C$ ดังนั้น จำนวนตรรกยะบวกทุกตัว และศูนย์ไม่เป็นสมาชิกของ C

ทฤษฎีบท 5.2.12 ไม่มีส่วนตัดใดที่เป็นทั้งเป็นส่วนตัดบวก และเป็นส่วนตัดลบ

พิสูจน์ สมมติว่ามีส่วนตัด C ซึ่ง C เป็นทั้งเป็นส่วนตัดบวกและเป็นส่วนตัดลบ
จาก C เป็นเป็นส่วนตัดบวก จะมี $r\in Q^+$ ซึ่ง $r\in C$
และจาก C เป็นเป็นส่วนตัดลบ จะมี $s\in Q^-$ ซึ่ง $s\notin C$
แต่ $s<r$ และ C เป็นส่วนตัดจะได้ $s\in C$
เกิดการขัดแย้ง

ดังนั้น ไม่มีส่วนตัดใด ๆ ที่เป็นทั้งส่วนตัดบวก และส่วนตัดลบ

ทฤษฎีบท 5.2.13 ส่วนตัด 0^* ไม่เป็นส่วนตัดบวกและส่วนตัดลบ

พิสูจน์ เนื่องจาก $0^*=\{x\in Q \mid x<0\}$

ดังนั้น ไม่มี $r \in Q^+$ ซึ่ง $r \in 0^*$

จะได้ว่า 0^* ไม่เป็นส่วนตัดบวก ....(1)

และ เพราะว่าจำนวนตรรกยะลบทุกจำนวนอยู่ใน 0^*

ดังนั้น ไม่มี $r \in Q^-$ ซึ่ง $r \notin 0^*$

จะได้ว่า 0^* ไม่เป็นส่วนตัดลบ ....(2)

ดังนั้น จาก (1) และ (2) จึงได้ว่า ส่วนตัด 0^* ไม่เป็นส่วนตัดบวก และส่วนตัดลบ

ทฤษฎีบท 5.2.14 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก แล้ว $-C$ เป็นส่วนตัดลบ

พิสูจน์ พิจารณา $-C = \{x \in Q \mid x < -t$ บางค่า $t \in C'\}$

ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก จะมี $r \in Q^+$ ซึ่ง $r \in C$

จะได้ว่า $r < t$ ทุกค่า $t \in C'$

ดังนั้น $-r > -t$ ทุกค่า $t \in C'$

เพราะฉะนั้น $-r \notin -C$

แต่ $r \in Q^+$ แล้ว $-r \in Q^-$

จะได้ว่า $-r \in Q^-$ และ $-r \notin -C$

นั่นคือ $-C$ เป็นส่วนตัดลบ

ดังนั้น ทุกส่วนตัดบวก C จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดลบ

ทฤษฎีบท 5.2.15 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.2.16 ให้ C เป็นส่วนตัดใด ๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อหนึ่งและข้อเดียวเท่านั้น

1. $C = 0^*$ 2. C เป็นส่วนตัดบวก 3. C เป็นส่วนตัดลบ

พิสูจน์ ตอนที่ 1 จะพิสูจน์ว่าข้อความทั้ง 3 เป็นจริงอย่างน้อย 1 ข้อความ

ถ้า $C \neq 0^*$ จะได้ว่า มี $x \in C$ แต่ $x \notin 0^*$ หรือมี $x \in 0^*$ แต่ $x \notin C$

1. ถ้ามี $x \in C$ โดยที่ $x \notin 0^*$

จะได้ว่า $x \in C$ และ $x \geq 0$

แต่ C เป็นส่วนตัด ดังนั้น $y \in C$ ซึ่ง $x < y$

จะได้ว่า $y \in C$ และ $y > 0$ (เพราะว่า $x < y$ และ $x \geq 0$)

นั่นคือ มี $y \in Q^+$ ซึ่ง $y \in C$

ดังนั้น C เป็นส่วนตัดบวก

2. ถ้ามี $x \in 0^*$ โดยที่ $x \notin C$

จะได้ว่า $x \in Q^-$ ซึ่ง $x \notin C$

ดังนั้น C เป็นส่วนตัดลบ

จึงได้ว่า ถ้า $C \neq 0^*$ จะได้ C เป็นส่วนตัดบวก หรือ C เป็นส่วนตัดลบ
ดังนั้น ข้อความทั้ง 3 เป็นจริงอย่างน้อย 1 ข้อความ

ตอนที่ 2 จะพิสูจน์ว่าข้อความทั้ง 3 จะเป็นจริงพร้อมกันมากกว่าหนึ่งข้อความไม่ได้

เนื่องจาก 0^* ไม่เป็นทั้งส่วนตัดบวก และส่วนตัดลบ

ดังนั้น ข้อความที่ 1 กับ 2 เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

และ ข้อความที่ 1 กับ 3 เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

และโดยทฤษฎีบท 5.2.15 จะได้ว่าข้อความที่ 2 และ3 เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้
จากตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สรุปได้ว่าข้อความทั้ง 3 เป็นจริงเพียงข้อความเดียวเท่านั้น

นิยาม 5.2.5 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ตัวดำเนินการลบ ของ C และ D กำหนดดังนี้

$$C - D = C + (D)$$

จากนิยาม 5.2.5 ผลลัพธ์จากการลบ คือ $C - D$ เป็นส่วนตัด ตัวดำเนินการลบไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มและการสลับที่

ทฤษฎีบท 5.2.17 ให้ C เป็นส่วนตัด ใด ๆ $-(-C) = C$

พิสูจน์ ให้ $C \in R$ จาก $C + (-C) = 0^*$

โดย ทฤษฎีบท 5.2.10 $\quad C = -(-C)$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C ใด ๆ $-(-C) = C$

ทฤษฎีบท 5.2.18 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ $-(C + D) = -C - D$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.2.19 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $-(C - D) = D - C$

พิสูจน์ ให้ C, D เป็นส่วนตัดใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} -(C - D) &= -[C + (-D)] \\ &= -C - (-D) \\ &= -C + D \\ &= D - C \end{aligned}$$
ดังนั้น ส่วนตัด C และ D ใด ๆ ถ้า $-(C - D) = D - C$

5.3 การคูณส่วนตัดบวก

ทฤษฎีบท 5.3.1 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวกแล้ว สำหรับจำนวนตรรกยะ $r > 1$ ใดๆ จะมี $c \in C$ ที่ทำให้ $cr \in C'$

พิสูจน์ .ให้ $s = r - 1 > 0$ สำหรับ $c \in C \cap Q^{+}$ ใดๆ
จาก $cs > 0$ จะมี $d \in C$ และ $d' \in C'$ ที่ทำให้ $d' = d + cs$
ถ้า $d > c$ จะได้ $d + ds > d + cs$ ดังนั้น $dr = d(1+s) \in C'$
ถ้า $c \geq d$ จะได้ $c + cs \geq d + cs$ ดังนั้น $cr = c(1+s) \in C'$
นั่นคือ มี $c \in C$ ที่ทำให้ $cr \in C'$

ตัวอย่าง 5.3.1 ให้ C เป็นส่วนตัดบวก จะได้ว่า
$C^{-1} = \{x \in Q^{+} \mid x < a^{-1} \text{ สำหรับ } a \in C' \text{ บางตัว }\} \cup \{0\} \cup Q^{-}$ เป็นส่วนตัดบวก แสดงได้ดังนี้

พิสูจน์ เนื่องจาก C เป็นส่วนตัดบวก ดังนั้น $a > 0$ ทุกๆ $a \in C'$ จะได้ว่า $a^{-1} > 0$
ดังนั้นมี $x \in Q^{+}$ ที่ $x < a^{-1}$ จะได้ว่า $x \in C^{-1}$ จะเห็นว่า $C^{-1} \neq \phi$
ถ้า $c \in C \cap Q^{+}$ จะได้ว่า $c < a$ ทุก ๆ $a \in C'$ ดังนั้น $c^{-1} > a^{-1}$ จะได้ว่า $c^{-1} \notin C^{-1}$
นั่นคือ $C^{-1} \neq Q$ แสดงว่า C^{-1} เป็นย่อยแท้ของ Q
1. พิจารณา $x \in C^{-1}$ คือ $x \leq 0$ หรือ $x \in Q^{+}$ และ $x < a^{-1}$ สำหรับ $a \in C'$ บางตัว
ให้ $y \in Q$ และ $y < x$ ถ้า $y \leq 0$ จะได้ว่า $y \in C^{-1}$
ถ้า $y > 0$ จะได้ $y < x < a^{-1}$ สำหรับ $a \in C^{-1}$ บางตัว
ดังนั้น $y \in C^{-1}$ สอดคล้องกับสมบัติของส่วนตัด
2. จาก $x \in C^{-1}$ คือ $x \leq 0$ หรือ $x \in Q^{+}$ และ $x < a^{-1}$ สำหรับ $a \in C'$ บางตัว
จะมี $y \in Q^{+}$ ซึ่ง $x < y < a^{-1}$
จะได้ $y \in C^{-1}$ สอดคล้องกับสมบัติของส่วนตัด
ดังนั้น C^{-1} เป็นส่วนตัด
และเนื่องจากมี $x \in Q^{+}$ ที่ $x \in C^{-1}$
ดังนั้น C^{-1} เป็นส่วนตัดบวก

นิยาม 5.3.1 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดบวกกำหนดการดำเนินการคูณดังนี้

$$C \cdot D = M \cup \{0\} \cup Q^{-}$$

เมื่อ $M = \{cd \mid c \in Q^{+} \cap C \text{ และ } d \in Q^{+} \cap D\}$

ทฤษฎีบท 5.3.1 การคูณส่วนตัดบวกมีสมบัติปิด

พิสูจน์ ให้ C และ D เป็นส่วนตัดบวก จะพบว่า $C \cdot D \neq \phi$ และ $C \cdot D \neq Q$
1. พิจารณา $x \in C \cdot D$ คือ $x \leq 0$ หรือ $x = cd$ เมื่อ $c \in Q^{+} \cap C$ และ $d \in Q^{+} \cap D$

ให้ $y \in Q$ และ $y < x$ ถ้า $y \leq 0$ จะได้ว่า $y \in C \cdot D$
ถ้า $y > 0$ ดังนั้น $x = cd$ ให้ $y = bd$ จะได้ $bd < cd$ จะได้ $b < c$
ได้ว่า $b \in C$ ดังนั้น $y \in C \cdot D$ สอดคล้องสมบัติส่วนตัด
2. พิจารณา $x \in C \cdot D$ ถ้า $x \leq 0$ จะมีสมาชิก $y = ab \in C \cdot D$ ที่ $y > x$
ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า $x = cd$ จะมี $a \in C$ ที่ทำให้ $a > c$ ซึ่งจะได้ $y = ad > cd = x$
นั่นคือ มี $y = ad \in C \cdot D$ ซึ่ง $y > x$ สอดคล้องสมบัติของส่วนตัด
ดังนั้น $C \cdot D$ เป็นส่วนตัด
และเนื่องจากมี $x = cd > 0$ จะได้ว่า $x \in M \subseteq C \cdot D$
ดังนั้น $C \cdot D$ เป็นส่วนตัดบวก

ทฤษฎีบท 5.3.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัดบวก

$$C \cdot (D \cdot E) = (C \cdot D) \cdot E$$

ทฤษฎีบท 5.3.3 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ให้ C และ D เป็นส่วนตัดบวก $C \cdot D = D \cdot C$

การพิสูจน์ ทฤษฎีบท 5.3.2 และ ทฤษฎีบท 5.3.3 เห็นได้ชัดจากสมบัติของการคูณจำนวนตรรกยะ

ทฤษฎีบท 5.3.4 การมีเอกลักษณ์การคูณ ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก จะได้ว่า

$$C \cdot C(1) = C(1) \cdot C = C$$

พิสูจน์ ให้ C เป็นส่วนตัดบวก
ให้ $x \in C \cdot C(1)$ จะได้ว่า $x \leq 0$ กรณีนี้จะได้ว่า $x \in C$
หรือ $x = cy$ เมื่อ $c \in C \cap Q^{+}$ และ $y \in Q^{+}, y < 1$
กรณีนี้ได้ $\qquad x = cy < c$
จะได้ $\qquad x \in C$
ดังนั้น $C \cdot C(1) \subseteq C$ ....(1)
ให้ $x \in C$ ถ้า $x \leq 0$ กรณีนี้ได้ $x \in C \cdot C(1)$
หรือ ถ้า $x > 0$ จะได้ว่ามี $c \in C$ ซึ่ง $c > x$
มี $y \in Q^{+}$ ซึ่ง $x = cy$ และ $y < 1$
ดังนั้น $x \in C \cdot C(1)$
จะได้ว่า $C \subseteq C \cdot C(1)$ ....(2)
จาก (1) และ (2) จะได้ $C \cdot C(1) = C$

นิยาม 5.3.1 เรียกเซต $C(1)$ เรียกว่า เอกลักษณ์สำหรับการคูณของส่วนตัดใช้สัญลักษณ์แทนด้วย 1^{*}

โดยทฤษฎีบท 5.3.4 และนิยาม 5.3.1 จึงได้ว่า สำหรับส่วนตัด C จะมี 1^{*} เพียงจำนวนเดียว ซึ่งทำให้ $C \cdot 1^{*} = C$

ทฤษฎีบท 5.3.4 สมบัติมีตัวผกผันสำหรับการคูณ ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก จะมีส่วนตัดบวก C^{-1} ที่มีสมบัติว่า $C\cdot C^{-1}=C^{-1}\cdot C=1^*$

พิสูจน์ ให้ C เป็นส่วนตัดบวก ให้ $C^{-1}=\{x\in Q\,|\,x<a^{-1}$ สำหรับ $a\in C'$ บางตัว $\}$

ให้ $x\in C\cdot C^{-1}$ จะได้ว่า $x\le 0$ กรณีจะได้ $x\in C(1)$

หรือได้ $x=cd$ เมื่อ $c\in C\cap Q^+$ และ $d\in C^{-1}\cap Q^+$

จะได้ $0<c<a$ และ $0<d<a^{-1}$ เมื่อ $a\in C'$

ดังนั้น $x=cd<aa^{-1}=1$

ได้ $x\in 1^*$

จะได้ว่า $C\cdot C^{-1}\subseteq 1^*$ ....(1)

ให้ $x\in 1^*$ ถ้า $x\le 0$ กรณีนี้ได้ $x\in C\cdot C^{-1}$

ถ้า $x>0$ และ $x<1$ จะมี $y\in Q^+$ และ $x<y<1$ ดังนั้น $x^{-1}>y^{-1}>1$

จะมี $c\in C\cap Q^+$ ที่ทำให้ $cy^{-1}\in C'$ จะได้ $cx^{-1}>cy^{-1}>c$

ให้ $d=cx^{-1}\in C'$ และ $e=cy^{-1}\in C'$

จะได้ $d^{-1}=c^{-1}x<c^{-1}y=e^{-1}$

จาก $d^{-1}<e^{-1}$ เมื่อ $e\in C'$ ดังนั้น $d^{-1}\in C^{-1}$

และจาก $x=cd^{-1}$ เมื่อ $c\in C\cap Q^+$ และ $d^{-1}\in C^{-1}$ ดังนั้น $x\in C\cdot C^{-1}$

ได้ $1^*\subseteq C\cdot C^{-1}$ ....(2)

ดังนั้น $C\cdot C^{-1}=1^*$ และได้ $C^{-1}\cdot C=C\cdot C^{-1}=1^*$

นิยาม 5.3.2 ถ้า C เป็นส่วนตัดโดยที่ $C\ne 0^*$ แล้วจะมีส่วนตัด $C^{-1}=\{x\in Q\,|\,x<a^{-1}$ สำหรับ $a\in C'$ บางตัว $\}$ โดยที่ $C\cdot C^{-1}=1^*$ เรียก C^{-1} ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของส่วนตัด C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย C^{-1} หรือ $\dfrac{1}{C}$

ทฤษฎีบท 5.3.5 สมบัติการแจกแจง ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดบวก

$$C(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$$

พิสูจน์ สำหรับ C,D และ E เป็นส่วนตัดบวกใดๆ

ให้ $x\in C\cdot(D+E)$ จะได้ $x\le 0$ หรือ $x=c(d+e)$ เมื่อ $c\in C,d\in D$ และ $e\in E$

ได้ $x=cd+ce$ ดังนั้น $x\in C\cdot D+C\cdot E$

จะได้ $C\cdot(D+E)\subseteq C\cdot D+C\cdot E$

ให้ $x\in C\cdot D+C\cdot E$ ดังนั้น $x\le 0$ หรือ $x=cd+ce$ เมื่อ $c\in C,d\in D$ และ $e\in E$

ได้ $$x=c(d+e)$$

ดังนั้น $x \in C\cdot(D+E)$

จะได้ $CD+CE \subseteq C(D+E)$

จึงได้ $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

ทฤษฎีบท 5.3.6 สมบัติการแจกแจง ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดบวก

$$(C+D)E=C\cdot E+D\cdot E$$

พิสูจน์ สำหรับ C,D และ E เป็นส่วนตัดบวกใดๆ

ให้ $x\in(C+D)\cdot E$ จะได้ $x\le 0$ หรือ $x=(c+d)e$ เมื่อ $c\in C, d\in D$ และ $e\in E$

ได้ $x=ce+de$ ดังนั้น $x\in C\cdot E+D\cdot E$

จะได้ $(C+D)E\subseteq C\cdot E+D\cdot E$

ให้ $x\in C\cdot E+D\cdot E$ ดังนั้น $x\le 0$ หรือ $x=ce+de$ เมื่อ $c\in C, d\in D$ และ $e\in E$

ได้ $x=(c+d)e$

ดังนั้น $x\in(C+D)\cdot E$

จะได้ $C\cdot E+D\cdot E+\subseteq C(D+E)$

จึงได้ $(C+D)E=C\cdot E+D\cdot E$

นิยาม 5.3.2 ถ้า C เป็นส่วนตัด ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ C ใช้สัญลักษณ์ $|C|$ กำหนดดังนี้

$$|C|=\begin{cases} C & \text{ถ้า } C \text{ เป็นส่วนตัดบวก} \\ -C & \text{ถ้า } C \text{ เป็นส่วนตัดลบ} \end{cases}$$

จากนิยาม จะพบว่า ถ้า C เป็นส่วนตัดแล้ว $|C|$ เป็นส่วนตัดบวก

นิยาม 5.3.3 ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ผลคูณของ C และ D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C\cdot D$ กำหนดดังนี้

$$C\cdot D=\begin{cases} |C||D| & \text{ถ้า } C \text{ และ } D \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน} \\ -(|C||D|) & \text{ถ้า } C \text{ และ } D \text{ มีเครื่องหมายเหมือนต่างกัน} \\ 0^* & \text{ถ้า } C \text{ หรือ } D \text{ เป็น } 0^* \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 5.3.7 สมบัติปิด ให้ C และ D ส่วนตัดใด ๆ $C\cdot D$ เป็นส่วนตัด

ทฤษฎีบท 5.3.8 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ให้ C,D และ E ส่วนตัดใด ๆ $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)$

พิสูจน์ แบ่งการพิสูจน์เป็น 9 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า $C=0^*$ หรือ $D=0^*$ หรือ $E=0^*$

พิจารณา $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)=0^*$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 2 ถ้า C,D,E เป็นส่วนตัดบวก

$$(C\cdot D)\cdot E=\{x\in Q\,|\,(x\le 0)\text{ หรือ } x=ye \text{ โดยที่ } y\in C\cdot D\ ,e\in E,y,e\in Q^+\}$$

แต่ $y\in C\cdot D$ โดยที่ $y\ge 0$ จะได้ว่า $y=cd$ โดยที่ $c\in C,\ d\in D,c,\ d\in Q^+$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E=\{x\in Q\,|\,x\le 0\text{ หรือ } x=(cd)e\text{ โดยที่ } c\in C,\ d\in D,e\in E,$
$c,d,e\in Q^+\}$

$=\{x\in Q\,|\,x\le 0\text{ หรือ } x=c(de)\text{ โดยที่ } c\in C,d\in D,e\in E,$
$c,d,e\in Q^+\}$

$=\{x\in Q\,|\,x\le 0\text{ หรือ } x=cz\text{ โดยที่ } c\in C,z\in D\cdot E,\ c,z\in Q^+\}$

$=C\cdot(D\cdot E)$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 3 ถ้า C,D,E เป็นส่วนตัดลบ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

กรณีที่ 4 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดบวก และ E เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $(C\cdot D)\cdot E=-[(C\cdot D)\cdot(-E)]$; $C\cdot D$ เป็นส่วนตัดบวก

$=-\{C\cdot[D\cdot(-E)]\}$; $C,D,-E$ เป็นส่วนตัดบวก

$=-[C\cdot[-(D\cdot E)]]$

$=-[-[C\cdot(D\cdot E)]]$

$=C\cdot(D\cdot E)$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 5 ถ้า C,E เป็นส่วนตัดบวก และ D เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $C\cdot(D\cdot E)=C\cdot[-(-D)\cdot E]$; $-D,E$ เป็นเป็นส่วนตัดบวก

$=C\cdot[(-D)\cdot(-E)]$

$=[C\cdot(-D)]\cdot(-E)$

$=(C\cdot D)\cdot E$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E=C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 6 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ และ D,E เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $C\cdot(D\cdot E)=-[(-C)\cdot(D\cdot E)]$; $-C,D,E$ เป็นส่วนตัดบวก

$=-[\{(-C)\cdot D\}\cdot E]$

$$=(C\cdot D)\cdot E$$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E = C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 7 ถ้า C เป็นเป็นส่วนตัดบวก และ D,E เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $C\cdot(D\cdot E) = C\cdot[(-D)\cdot(-E)]$

$=[C\cdot(-D)]\cdot(-E)$ จาก $C,-D,-E$ เป็นส่วนตัดบวก

$=-\{-[C\cdot(-D)]\}\cdot(-E)$

$=\{-[C\cdot(-D)]\}\cdot E$

$=(C\cdot D)\cdot E$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E = C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 8 ถ้า C,E เป็นส่วนตัดลบและ D เป็นเป็นส่วนตัดบวก

$C\cdot(D\cdot E) = C\cdot\{-[D\cdot(-E)]\}$

$=C\cdot\{-[D\cdot(-E)]\}$

$=(-C)\cdot\{-\{-[D\cdot(-E)]\}\}$

$=(-C)\cdot[D\cdot(-E)]$ เนื่องจาก $-C,D,-E$ เป็นส่วนตัดบวก

$=[(-C)\cdot D]\cdot(-E)$

$=[-\{-[(-C)\cdot D]\}]\cdot(-E)$

$=\{-[(-C)\cdot D]\}\cdot E$

$=(C\cdot D)\cdot E$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E = C\cdot(D\cdot E)$

กรณีที่ 9 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดลบและ E เป็นส่วนตัดบวก

$C\cdot(D\cdot E) = C\cdot[-(-D)\cdot E]$

$=(-C)\cdot\{-[-(-D)\cdot E]\}$

$=(-C)\cdot[(-D)\cdot E]$

$=[(-C)\cdot(-D)]\cdot E$ เนื่องจาก $(-C),(-D),E$ เป็นส่วนตัดบวก

$=(C\cdot D)\cdot E$

ดังนั้น $(C\cdot D)\cdot E = C\cdot(D\cdot E)$

ดังนั้นทั้ง 9 กรณีจะได้ว่า ทุกส่วนตัด C,D และ E ใด ๆ $C\cdot(D\cdot E)=(C\cdot D)\cdot E$

ทฤษฎีบท 5.3.9 สมบัติการสลับที่ ให้ C และ D ส่วนตัดใด ๆ แล้ว $C\cdot D = D\cdot C$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $C=0^*$ และ $D=0^*$

พิจารณา $C\cdot D = 0^*$

และ $\qquad D\cdot C=0^*$

ดังนั้น จาก (1)และ(2); $C\cdot D=D\cdot C$

กรณีที่ 2 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $C\cdot D=\{x\in Q\,|\,x\le 0$ หรือ $x=cd$ สำหรับ $c\in C,d\in D,c,d\in Q^+\}$

$=\{x\in Q\,|\,x\le 0$ หรือ $x=dc$ สำหรับ $d\in D,c\in C,c,d\in Q^+\}$

$=D\cdot C$

ดังนั้น $C\cdot D=D\cdot C$

กรณีที่ 3 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดลบ จึงได้ว่า $-C,-D$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $\quad C\cdot D=(-C)\cdot(-D)$

$=(-D)\cdot(-C)$ จาก $-C,-D$ เป็นส่วนตัดบวก

$=D\cdot C$

ดังนั้น $C\cdot D=D\cdot C$

กรณีที่ 4 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ และ D เป็นส่วนตัดบวก จะได้ว่า $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $\quad C\cdot D=-[(-C)\cdot D]$

$=-[D\cdot(-C)]$ จาก $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

$=D\cdot C$

ดังนั้น $C\cdot D=D\cdot C$

กรณีที่ 5 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวกและ D เป็นส่วนตัดลบ จะได้ว่า $-D$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $\quad C\cdot D=-[C\cdot(-D)]$

$=-[(-D)\cdot C]$ จาก $-D$ ส่วนตัดบวก

$=D\cdot C$

ดังนั้น $C\cdot D=D\cdot C$

ดังนั้น ทั้ง 5 กรณี จึงได้ว่าทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ แล้ว $C\cdot D=D\cdot C$

ทฤษฎีบท 5.3.10 ให้ C และ D ส่วนตัดใด ๆ $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $C=0^*$ หรือ $D=0^*$

พิจารณา จากนิยาม 5.3.3 $\qquad C\cdot(-D)=0^*$ ....(1)

$(-C)\cdot D=0^*$ ....(2)

$-(C\cdot D)=0^*$ ....(3)

จากสมการ$(1),(2)$และ(3)จึงได้ว่า $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

กรณีที่ 2 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดบวก จะได้ $-C,-D$ เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $\qquad C\cdot(-D)=-[C\cdot(-(-D))]$

$$=-(C\cdot D) \qquad \text{............}(1)$$

และ $\qquad (-C)\cdot D=-\left[\left(-(-C)\right)\cdot D\right]$

$$=-(C\cdot D) \qquad \text{............}(2)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

กรณีที่ 3 ถ้า C,D เป็นส่วนตัดลบ จะได้ $(-C),(-D)$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $\qquad C\cdot(-D)=-\left[(-C)\cdot(-D)\right]$

$$=-(C\cdot D) \qquad \text{............}(1)$$

และ $\qquad (-C)\cdot D=-\left[(-C)\cdot(-D)\right]$

$$=-(C\cdot D) \qquad \text{............}(2)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

กรณีที่ 4 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก และ D เป็นส่วนตัดลบจะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดลบ และ $-D$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $\qquad -(C\cdot D)=-\left\{-\left[C\cdot(-D)\right]\right\}$

$$=C\cdot(-D) \qquad \text{............}(1)$$

และ $\qquad (-C)\cdot D=\left[-(-C)\right]\cdot(-D)$

$$=C\cdot(-D) \qquad \text{............}(2)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

กรณีที่ 5 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบและ D เป็นส่วนตัดบวก จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวกและ $-D$ เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $\qquad -(C\cdot D)=-\left\{-\left[(-C)\cdot D\right]\right\}$

$$=(-C)\cdot D \qquad \text{............}(1)$$

และ $\qquad C\cdot(-D)=(-C)\cdot\left[-(-D)\right]$

$$=(-C)\cdot D \qquad \text{............}(2)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) และสมการ (2) จึงได้ว่า $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

ทั้ง 5 กรณี จะได้ว่าทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ $C\cdot(-D)=(-C)\cdot D=-(C\cdot D)$

ทฤษฎีบท 5.3.11 สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ ถ้า C เป็นส่วนตัดจะได้ว่า $C\cdot 1^*=1^*\cdot C=C$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $C=0^*$ จะได้ว่า $C\cdot 1^*=0^*$ ดังนั้น $C\cdot 1^*=C$

กรณีที่ 2 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก

จะแสดงว่า $C\cdot 1^*\subseteq C$

ให้ $x\in C\cdot 1^*$

ถ้า $x<0$ จะได้ว่า $x\in C$ เพราะ C เป็นส่วนตัดบวก

ถ้า $x = c1$ โดยที่บางค่า $c \in C$ บางค่า $1 \in 1^*, c, 1 \in Q^+$

จะได้ว่า $x = c1 \le c$ เพราะ $1 \in 1^*$ แล้ว $1 \le 1$

ดังนั้น $x \in C$ เพราะ $x \le 1$ และ $1 \in 1^*$

จึงได้ว่า $x \in C \cdot 1$ แล้ว $x \in C$

เพราะฉะนั้น $C \cdot 1^* \subseteq C$ ....(1)

จะแสดงว่า $C \subseteq C \cdot 1^*$

ให้ $x \in C$

ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า $x \in C \cdot 1$

ถ้า $x \ge 0$ จะมี $y \in C$ ซึ่ง $y > 0$

พิจารณา $0 \le x < y$ แล้ว $0 \le \dfrac{x}{y} < 1$ แล้ว $\dfrac{x}{y} \in 1^*$

เนื่องจาก $x = \dfrac{x}{y} \cdot y$ โดยที่ $\dfrac{x}{y} \in 1^*, y \in C, \dfrac{x}{y} \ge 0, y > 0$

ดังนั้น $x \in C \cdot 1^*$

เพราะฉะนั้น $C \subseteq C \cdot 1^*$ ....(2)

จาก(1) และ(2) จะได้ว่า $C \cdot 1^* = C$

กรณีที่ 3 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

โดยกรณีที่ 2 จะได้ว่า $(-C) \cdot 1^* = -C$

จาก$(-C) \cdot 1^* = -(C \cdot 1^*)$; $-(D \cdot C) = -C$

$$D \cdot C = C$$

ดังนั้น $D \cdot C = C$

จากกรณีที่ 1 ถึง กรณีที่ 3 จะได้ว่า สำหรับ ส่วนตัด C จะมี 1^* ซึ่งทำให้ $C \cdot 1^* = C$

ทฤษฎีบท 5.3.12 ให้ C เป็นส่วนตัดบวกใด ๆ ให้ $D = \{x \in Q \mid x < w^{-1}$ สำหรับ $\exists w \in C'\}$ จะได้ว่า D เป็นส่วนตัดบวก

พิสูจน์ 1. เนื่องจาก C เป็นส่วนตัดบวกจะมี $x \in Q^+$ โดยที่ $x \in C$

สมมติ $x^{-1} \in D$ จากนิยามของ D จะมี $y \in C'$ โดยที่ $x^{-1} < y^{-1}$

ดังนั้น $y < x$ จะได้ $y \in C$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ $y \in C'$

ดังนั้นที่สมมติว่า $x^{-1} \in D$ จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $x^{-1} \notin D$ จะได้ $D \ne Q$

2. ถ้า $y < x$ โดยที่ $x \in D$

จะได้ $y < x < w^{-1}$ เมื่อ $w \in C'$

ดังนั้น $y \in D$

3. ถ้า $x \in D$ โดยที่ $x < w^{-1}$ สำหรับ w บางตัวใน C'

โดยสมบัติหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ

จะมี $z \in Q$ โดยที่ $x < z < w^{-1}$

จะได้ว่า $z \in D$

ดังนั้น มี $z \in D$ โดยที่ $z > x$

จะแสดงว่า D เป็นส่วนตัดบวก

จากนิยามของ D ถ้า $w \in C'$ จะได้ $w \in Q^{+}$ และ $w^{-1} \in Q^{+}$

โดยสมบัติหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ

มี $x \in Q$ โดยที่ $0 < x < w^{-1}$

จะได้ว่า $x \in Q^{+}$ โดยที่ $x \in D$

ดังนั้น D เป็นส่วนตัดบวก

ดังนั้นทุกค่า C เป็นส่วนตัดบวก ใด ๆ มีเซต $D = \{x \in Q \mid x < w^{-1}$ สำหรับบางค่า $w \in C'\}$ ซึ่ง D เป็นส่วนตัดบวก

ทฤษฎีบท 5.3.13 ส่วนตัด $C \neq 0^{*}$ จะได้ว่ามีส่วนตัด C^{-1} ที่มีสมบัติว่า $C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = 1^{*}$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก ให้ $C^{-1} = \{x \in Q \mid x < w^{-1}$ สำหรับ $\exists w \in C'\}$

จากทฤษฎีบท 5.3.12 จะได้ C^{-1} เป็นส่วนตัดบวก

จะแสดงว่า $C \cdot C^{-1} = 1^{*}$

จาก ทั้ง C และ C^{-1} มีจำนวนตรรกยะที่น้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ทั้งหมดเป็นสมาชิก

ดังนั้นจะพิจารณาเฉพาะจำนวนตรรกยะบวกเท่านั้น

ถ้า $w \in C$ และ $y \in C^{-1}$ โดยที่ $w > 0$ และ $y > 0$

จะมี $w' \in C'$ โดยที่ $y < (w')^{-1}$

จะได้ $0 < wy < \dfrac{w}{w'}$

จาก $w < w'$ จะได้ $\dfrac{w}{w'} < 1$

ดังนั้น $wy < 1$

นั่นคือ $C \cdot C^{-1} \subseteq 1^{*}$ ....(1)

ถ้า $w \in C$ โดยที่ $w > 0$ และ $z \in 1^{*}$ โดยที่ $0 < z < 1$

จะได้ $1 - z > 0$ และ $(1-z)w > 0$

จะมี $v \in C$ โดยที่ $v + (1-z)w \in C'$

ให้ $v + (1-z)w = w'$

จาก $w < w'$ และ $v < w'$ จะได้

$0 < w' - v = (1-z)w < (1-z)w'$

$w' - v + zw' < (1-z)w' + zw' = w'$

จะได้ $zw' < v$ หรือ $\frac{v}{z} > w'$

และได้ $\frac{z}{v} < \frac{1}{w'}$

ดังนั้น $\frac{z}{v} \in C^{-1}$

ให้ $\frac{z}{v} = y$ จะได้ $z = vy$

จาก $v \in C$ จะได้ $z \in C \cdot C^{-1}$

ดังนั้น $1^* \subseteq C \cdot C^{-1}$ ....(2)

จาก (1) และ (2); ทำให้ $C \cdot C^{-1} = 1^*$

กรณีที่ 2 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

ให้ E เป็นส่วนตัดบวก โดยที่ $(-C) \cdot E = 1^*$

และให้ $C^{-1} = -E$ ซึ่งเป็นส่วนตัดลบ

จะได้ $$\begin{aligned} C \cdot C^{-1} &= (-C) \cdot (-C^{-1}) \\ &= (-C) \cdot E \\ &= 1^* \end{aligned}$$

ดังนั้น $C \cdot C^{-1} = 1^*$

ทฤษฎีบท 5.3.13 สมบัติการแจกแจง ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ

$$C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$$

พิสูจน์ แบ่งการพิสูจน์เป็น 9 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $C = 0^*$ หรือ $D = 0^*$ หรือ $E = 0^*$

1.1 ถ้า $C = 0^*$

พิจารณา $$\begin{aligned} C \cdot (D + E) &= 0^* \cdot (D + C) \\ &= 0^* \\ &= 0^* \cdot D + 0^* \cdot E \\ &= C \cdot D + C \cdot E \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $C = 0^*$ แล้ว $C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$

1.2 ถ้า $D = 0^*$

พิจารณา $C \cdot (D + E) = C \cdot (0^* + E)$

$= C \cdot E$

$= 0^* + C \cdot E$

$= C \cdot 0^* + C \cdot E$

$= C \cdot D + C \cdot E$

ดังนั้น ถ้า $D = 0^*$ แล้ว $C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$

1.3 ถ้า $E = 0^*$

พิจารณา $C \cdot (D + E) = C \cdot (D + 0^*)$

$= C \cdot D$

$= C \cdot D + 0^*$

$= C \cdot D + C \cdot 0^*$

$= C \cdot D + C \cdot E$

ดังนั้น ถ้า $E = 0^*$ แล้ว $C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$

จากข้อ 1.1 ถึง 1.3 ถ้า $C = 0^*$ หรือ $D = 0^*$ หรือ $E = 0^*$ แล้ว $C \cdot (D + E) = C \cdot D + C \cdot E$

กรณีที่ 2 ถ้า C, D, E เป็นส่วนตัดบวก

จะได้ว่า $C \cdot (D + E)$ เป็นส่วนตัดบวกและ $C \cdot D + C \cdot E$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $C + D = \{c + d \mid c \in C$ และ $d \in D\}$

2.1 ให้ $x \in C \cdot (D + E)$ จะแสดงว่า $x \in C \cdot D + C \cdot E$

ถ้า $x \leq 0$ จะได้ว่า $x \in C \cdot D + C \cdot E$ เพราะ $C \cdot D + C \cdot E$ เป็นส่วนตัดบวก

ถ้า $x = cy$ โดยที่ $c \in C, y \in (D + E), c, y \in Q^+$

จะได้ $x = c(d + e)$ โดยที่ $c \in C, d \in D, e \in E, c, (d + e) \in Q^+$

ดังนั้น $x = cd + ce$ โดยที่ $c \in C, d \in D, e \in E, c, (d + e) \in Q^+$

พิจารณา $d + e \in Q^+$ หรือ $d + e > 0$ เป็นกรณีย่อยดังนี้

2.1.1 ถ้า $d \geq 0$ และ $e \geq 0$ โดยที่ d และ e ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

จะได้ $cd \in C \cdot D$ และ $ce \in C \cdot E$

2.1.2 ถ้า $d > 0$ และ $e < 0$

จะได้ $cd \in C \cdot D$ และ $ce \in C \cdot E$ เพราะว่า $ce < 0$

2.1.3 ถ้า $d < 0$ และ $e > 0$

จะได้ $cd \in C \cdot D$ และ $ce \in C \cdot E$ เพราะว่า $cd < 0$

ในทุกกรณีจะได้ $x = cd + ce \in (C \cdot D + C \cdot E)$

จึงได้ว่า $x \in C \cdot (D + E)$ แล้ว $x \in (C \cdot D + C \cdot E)$

ดังนั้น $C \cdot (D + E) \subseteq C \cdot D + C \cdot E$ ....(1)

2.2 ให้ $x \in (C \cdot D + C \cdot E)$ จะแสดงว่า $x \in C \cdot (D + E)$

จะได้ว่า $x = y + z$ โดยที่ $y \in C \cdot D, z \in C \cdot E$

ถ้า $x \le 0$ จะได้ $x \in C\cdot(D+E)$ เพราะว่า $C\cdot(D+E) \in R^{+}$

ถ้า $x > 0$ จะได้ $y+z>0$

พิจารณา $y+z>0$ เป็นกรณีย่อยดังนี้

2.2.1 ถ้า $y \ge 0$ และ $z \ge 0$ โดยที่ y และ z ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

จาก $y \in C\cdot D, z \in C\cdot E, y \ge 0, z \ge 0$

จะได้ว่า $y = cd, z = se$ โดยที่ $c \in C, d \in D, s \in C, e \in E, c, d, e \ge 0$

1. ถ้า $c = s$

จะได้ว่า $x = y + z = cd + ce = c(d+e)$

ดังนั้น $x \in C\cdot(D+E)$ เพราะ $c \in C, (d+e) \in (D+E), c \ge 0,$ $d+e \ge 0$

2. ถ้า $0 \le c < s$

จะได้ว่า $0 \le \frac{c}{s} < 1$ ดังนั้น $0 \le \left(\frac{c}{s}\right)d < d$

ให้ $t = \left(\frac{c}{s}\right)d$ จะได้ว่า $cd = st$ เมื่อ $t \in D$ และ $t \ge 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x &= cd + se \\ &= st + se \\ &= s(t+e) \end{aligned}$$

โดยที่ $s \in C, t+e \in (D+E), s \ge 0, t+e \ge 0$

ดังนั้น $x \in C\cdot(D+E)$

3. ถ้า $0 \le s < c$ จะได้ $0 \le \frac{s}{c} < 1$ ดังนั้น $0 \le \left(\frac{s}{c}\right)e < e$

ให้ $r = \left(\frac{s}{c}\right)e$ จะได้ $se = cr$ โดย $r \in E$ และ $r \ge 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x &= cd + se \\ &= cd + cr \\ &= c(d+r) \end{aligned}$$

โดยที่ $c \in C, (d+r) \in (D+E), c \ge 0, d+r \ge 0$

ดังนั้น $x \in C\cdot(D+E)$

2.2.2 ถ้า $y > 0$ และ $z < 0$

จะได้ $y = cd$ โดยที่ $c \in C, d \in D, c > 0, d > 0$

พิจารณา $\frac{z}{c} < 0$ เพราะว่า $z < 0$ และ $C > 0$

จะได้ $\frac{z}{c} \in E$ เพราะว่า $E \in R^{+}$

ดังนั้น $x = y + z = cd + c\left(\frac{z}{c}\right) = c\left(d + \frac{z}{c}\right)$

โดยที่ $c \in C, \left(d + \frac{z}{c}\right) \in (D+E), c > 0$

ถ้า $\left(d + \frac{z}{c}\right) > 0$ จะได้ $x \in C \cdot (D+E)$

ถ้า $\left(d + \frac{z}{c}\right) < 0$ จะได้ $x < 0$ เพราะว่า $a > 0$

ดังนั้น $x \in C \cdot (D+E)$

2.2.3 ถ้า $y < 0$ และ $z > 0$ สามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกับข้อ 2 ว่า $x \in C \cdot (D+E)$

จากทั้ง 2.2.1 ถึง 2.2.3 ข้อ จึงได้ว่า $(C \cdot D + C \cdot E) \subseteq C \cdot (D+E)$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $C \cdot (D+E) = C \cdot D + C \cdot E$

กรณีที่ 3 ถ้า C, D, E เป็นส่วนตัดลบ

จะได้ว่า C เป็นส่วนตัดลบ และ $(D+E)$ เป็นส่วนตัดลบ

ดังนั้น
$$\begin{aligned} C \cdot (D+E) &= (-C) \cdot [-(D+E)] \\ &= (-C) \cdot [(-D + (-E))] \\ &= (-C) \cdot (-D) + (-C) \cdot (-E) \quad ; -C, -D, -E \text{ เป็นส่วนตัดบวก} \\ &= C \cdot D + C \cdot E \end{aligned}$$

ดังนั้น $C \cdot (D+E) = C \cdot D + C \cdot E$

กรณีที่ 4 ถ้า C, D เป็นส่วนตัดบวก และ E เป็นส่วนตัดลบ

4.1 ถ้า $(D+E)$ เป็นส่วนตัดบวกหรือเท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} C \cdot D &= C \cdot [D + (E + (-E))] \\ &= C \cdot [(D+E) + (-E)] \quad \text{เพราะว่า } -E \text{ เป็นส่วนตัดบวก} \\ &= C \cdot (D+E) + C \cdot (-E) \\ &= C \cdot (D+E) + \{-(C \cdot E)\} \end{aligned}$$

$$C \cdot (D+E) = C \cdot D - (-C \cdot E) = C \cdot D + C \cdot E$$

ดังนั้น ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดบวกหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่า $C \cdot (D+E) = C \cdot D + C \cdot E$

4.2 ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา
$$\begin{aligned} C \cdot D &= C \cdot [D + (E + (-E))] \\ &= C \cdot [(D+E) + (-E)] \\ &= -\{C \cdot [-(D+E)]\} + C \cdot (-E) \\ &= C \cdot (D+E) + \{-(C \cdot E)\} \end{aligned}$$

$$C\cdot(D+E)=C\cdot D-(-C\cdot E)=C\cdot D+C\cdot E$$

ดังนั้น ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ จะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

ดังนั้น จาก 4.1 และ4.2 จึงได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

กรณีที่ 5 ถ้า C,E เป็นส่วนตัดบวก และ D เป็นส่วนตัดลบ

5.1 ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดบวก หรือเท่ากับศูนย์

$$C\cdot E=C\cdot\left[E+\left(D+(-D)\right)\right]$$
$$=C\cdot\left[(E+D)+(-D)\right]$$ เพราะว่า $-D$ เป็นส่วนตัดบวก
$$=C\cdot(E+D)+C\cdot(-D)$$
$$=C\cdot(D+E)+\left\{-(C\cdot D)\right\}$$
$$C\cdot(D+E)=C\cdot E-(-C\cdot D)=C\cdot E+C\cdot D$$

ดังนั้นถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดบวกหรือเท่ากับศูนย์จะได้ว่า
$C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

5.2 ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ

$$C\cdot E=C\cdot\left[E+\left(D+(-D)\right)\right]$$
$$=C\cdot\left[(E+D)+(-D)\right]$$
$$=-\left\{C\cdot\left[-(E+D)\right]\right\}+C\cdot(-D)$$
$$=C\cdot(D+E)+\left\{-(C\cdot D)\right\}$$
$$C\cdot(D+E)=C\cdot E-\left\{-(C\cdot D)\right\}=C\cdot E+C\cdot D$$

ดังนั้น ถ้า $D+E$ $D+E$ เป็นส่วนตัดลบจะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

ดังนั้น จาก 5.1 และ5.2 จึงได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

กรณีที่ 6 ถ้า D,E เป็นส่วนตัดบวก และ C เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $C\cdot(D+E)=-(-C)\cdot(D+E)$
$$=-\left[(-C)\cdot D+(-C)\cdot E\right]$$;$-C$ เป็นส่วนตัดบวก
$$=-\left\{\left[-(C\cdot D)\right]+\left[-(C\cdot E)\right]\right\}$$
$$=-\left[-(C\cdot D+C\cdot E)\right]$$
$$=C\cdot D+C\cdot E$$

ดังนั้น ถ้า D,E เป็นส่วนตัดบวก และ C เป็นส่วนตัดลบ จะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

กรณีที่ 7 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก และ D,E เป็นส่วนตัดลบ

จะได้ว่า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา $C\cdot(D+E)=-C\cdot\left[-(D+E)\right]$
$$=-C\cdot\left[(-D)+(-E)\right]$$
$$=(-C)\cdot(-D)+(-C)\cdot(-E)$$

$$=C\cdot D+C\cdot E$$

ดังนั้น ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก และ D,E เป็นส่วนตัดลบ จะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

กรณีที่ 8 ถ้า D เป็นส่วนตัด และ C,E เป็นส่วนตัดลบ

8.1 ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดบวก หรือเท่ากับศูนย์

พิจารณา

$$\begin{aligned}
C\cdot E &= (-C)\cdot(-E)\\
&= (-C)\cdot\big[(-E)+\big(D+(-D)\big)\big]\\
&= (-C)\cdot\big\{\big[(-E)+(-D)\big]+D\big\}\\
&= (-C)\cdot\big[-(E+D)\big]+(-C)\cdot D\\
&= (-C)\cdot\big[-(D+E)\big]+(-C)\cdot D\\
&= -(-C)\cdot\big\{-\big[-(D+E)\big]\big\}+\big[-(C\cdot D)\big]\\
&= C\cdot(D+E)+\big[-(C\cdot D)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\cdot(D+E) &= C\cdot E-\big[-(C\cdot D)\big]\\
&= C\cdot E+C\cdot D\\
&= C\cdot D+C\cdot E
\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดบวก หรือเท่ากับศูนย์

จะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

8.2 ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ

พิจารณา

$$\begin{aligned}
C\cdot E &= (-C)\cdot(-E)\\
&= (-C)\cdot\big\{-E+\big[D+(-D)\big]\big\}\\
&= (-C)\cdot\big\{\big[-E+(-D)\big]+D\big\}\\
&= (-C)\cdot\big[-(E+D)\big]+(-C)\cdot D\\
&= (-C)\cdot\big[-(D+E)\big]+(-C)\cdot D\\
&= C\cdot(D+E)+\big[-(C\cdot D)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\cdot(D+E) &= C\cdot E-\big[-(C\cdot D)\big]\\
&= C\cdot E+C\cdot D\\
&= C\cdot D+C\cdot E
\end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $D+E$ เป็นส่วนตัดลบ จะได้ว่า $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

จาก 8.1 และ8.2 ถ้า D เป็นส่วนตัดบวก และ C,R เป็นส่วนตัดลบจะได้ว่า

$C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

กรณีที่ 9 ถ้า $E\in R^{+}$ เป็นส่วนตัดบวก และ C,D เป็นส่วนตัดลบให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ดังนั้น ทั้ง 9 กรณีจึงได้ว่า ทุกจำนวนจริง C,D และ E ใด ๆ $C\cdot(D+E)=C\cdot D+C\cdot E$

ทฤษฎีบท 5.3.14 ให้ C เป็นส่วนตัดใด ๆ $C \cdot 0^{*} = 0^{*}$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

นิยาม 5.3.6 ห้ C เป็นส่วนตัด ใด ๆ $C^{-1} = -\left(-C\right)^{-1}$

นิยาม 5.3.7 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ ซึ่ง $D \neq 0^{*}$ จะได้ว่า $C \cdot D^{-1} = \dfrac{C}{D}$

ทฤษฎีบท 5.3.15 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C \cdot D = 0^{*}$ แล้ว $C = 0^{*}$ หรือ $D = 0^{*}$

พิสูจน์ ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ
ถ้า $C = 0^{*}$ และ $D = 0^{*}$ จะแสดงว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
กรณีที่ 1 ถ้า C และ D เป็นส่วนตัดบวก แล้ว $C \cdot D$ เป็นส่วนตัดบวก จึงได้ว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
กรณีที่ 2 ถ้า C และ D เป็นส่วนตัดลบ แล้ว $C \cdot D$ เป็นส่วนตัดบวก จึงได้ว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
กรณีที่ 3 ถ้า C เป็นส่วนตัดบวก และ D เป็นส่วนตัดลบ แล้ว $C \cdot D$ เป็นส่วนตัดลบ
จึงได้ว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
กรณีที่ 4 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ และ D เป็นส่วนตัดบวกแล้ว $C \cdot D$ เป็นส่วนตัดลบ
จึงได้ว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
ทั้ง 4 กรณี จะได้ว่า $C \cdot D \neq 0^{*}$
เนื่องจากข้อความ ถ้า $C \cdot D = 0^{*}$ แล้ว $C = 0^{*}$ หรือ $D = 0^{*}$
สมมูลกับข้อความ ถ้า $C \neq 0^{*}$ และ $D \neq 0^{*}$ แล้ว $C \cdot D \neq 0^{*}$
ดังนั้นทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ ถ้า $C \cdot D = 0^{*}$ แล้ว $C = 0^{*}$ หรือ $D = 0^{*}$

5.4 ความสัมพันธ์ลำดับ

นิยาม 5.4.1 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ จะกล่าวว่า C น้อยกว่า D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C < D$ ก็ต่อเมื่อ $D - C$ เป็นส่วนตัดบวก และกล่าวว่า C มากกว่า D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C > D$ ถ้า $D < C$
สัญลักษณ์ $C \leq D$ หมายความว่า $C < D$ หรือ $C = D$
สัญลักษณ์ $C \geq D$ หมายความว่า $C > D$ หรือ $C = D$

ทฤษฎีบท 5.4.1 ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C < D$ และ $D < E$ แล้ว $C < E$

พิสูจน์ ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ
ถ้า $C < D$ และ $D < E$ จะได้ว่า
มี $x, y \in Q$ ซึ่ง $x \in D$ และ $x \notin C$ ....(1)
และ $y \in E$ และ $y \notin D$ ....(2)
จาก (1) และ (2); $x \in D$ และ $y \notin D$ จะได้ว่า $x < y$
จากที่ $x < y$ และ $y \in E$ จะได้ $x \in E$

ดังนั้น $x \in E$ และ $x \notin C$
จึงได้ว่า $C < E$
ดังนั้น ทุกส่วนตัด C, D และ E ใด ๆ ถ้า $C < D$ และ $D < E$ แล้ว $C < E$

ทฤษฎีบท 5.4.2 สมบัติไตรวิภาค สำหรับส่วนตัด C และ D ใด ๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวคือ

1. $C = D$
2. $C < D$
3. $C > D$

พิสูจน์ ตอนที่ 1 จะพิสูจน์ว่าข้อความทั้งสมาชิกเป็นจริงอย่างน้อย 1 ข้อความ

ถ้า $C \neq D$ จะได้ว่า $C \not\subset D$ และ $D \not\subset C$

จะมี $x \in Q$ และ $x \in C$ และ $x \notin D$ หรือ $y \in Q$ และ $y \in D$ และ $y \notin C$

จะได้ว่า $D < C$ หรือ $C < D$

ดังนั้น ข้อความทั้งสามเป็นจริงอย่างน้อย 1 ข้อความ

ตอนที่ 2 จะพิสูจน์ว่าข้อความทั้งสามจะเป็นจริงพร้อมกันมากกว่าหนึ่งข้อความไม่ได้

2.1 จะแสดงว่า $C = D$ และ $C < D$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

ให้ $C = D$ และ $C < D$

จาก $C < D$ จะมี $x \in Q$ ซึ่ง $x \in D$ และ $x \notin C$

นั่นคือ $C \neq D$ ขัดแย้งที่กำหนดไว้

ดังนั้น $C = D$ และ $C < D$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

2.2 จะแสดงว่า $C = D$ และ $D < C$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

ให้ $C = D$ และ $D < C$

จาก $D < C$ จะมี $x \in Q$ ซึ่ง $x \in C$ และ $x \notin D$

นั่นคือ $C \neq D$ ขัดแย้งที่กำหนดไว้

ดังนั้น $C = D$ และ $D < C$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

2.3 จะแสดงว่า $C < D$ และ $D < C$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

ให้ $C < D$ และ $D < C$

จะมี $x, y \in Q$ ซึ่ง $x \in D, x \notin C$ และ $y \in C, y \notin D$

จาก $x \in D$ และ $y \notin D$ จะได้ว่า $x < y$ ....(1)

จาก $y \in C$ และ $x \notin C$ จะได้ว่า $y < x$ ....(2)

จาก (1) และ (2) เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น จึงได้ว่า $C < D$ และ $D < C$ เป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

ดังนั้น จาก 2.1 ถึง 2.3 ข้อความทั้งสามจะเป็นจริงพร้อมกันไม่ได้

จากการพิสูจน์ตอนที่ 1 และตอนที่ 2 สรุปได้ว่าข้อความทั้งสามเป็นจริงเพียงข้อเดียว

ทฤษฎีบท 5.4.3 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ $C < D$ ก็ต่อเมื่อ $C \subseteq D$ และ $C \neq D$

พิสูจน์ สำหรับส่วนตัด C และ D ใด ๆ

ให้ $C < D$ จะได้ $D - C$ เป็นส่วนตัดบวก

พิจารณา $y + x \in (D - C)$ โดยที่ $y + x > 0$

เมื่อ $y \in D$ และ $x < -x'$ สำหรับ บางค่า $x' \in C'$

จาก $y > -x$ และ $-x > x'$ จะได้ $y > x'$

ดังนั้น $y \in C'$ นั่นคือ $y \notin C$

จาก $y \in D$ จะได้ $D \neq C$

และถ้า z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน C จะได้ $z < x'$

จะได้ว่า $z < y$ นั่นคือ $z \in D$

ดังนั้น $C \subseteq D$ แต่ $C \neq D$ ....(1)

ถ้า $C \subseteq D$ แต่ $C \neq D$

จะได้ ถ้า $x \in C$ แล้ว $x \in D$ และมี $y \in D$ โดยที่ $y \notin C$

ดังนั้น $y \in C'$

ถ้า $z, w \in D$ โดยที่ $y < z < w$

จะได้ $-z \in (-C)$ เพราะว่า $y \in C'$ และ $-z < -y$

ดังนั้น $w - z \in Q^+$ และ $w - z \in D - C$

นั่นคือ $C < D$ ....(2)

จาก(1)และ (2) จึงได้ว่าทุกส่วนตัด C และ D ใด ๆ $C < D$ ก็ต่อเมื่อ $C \subseteq D$ และ $C \neq D$

ทฤษฎีบท 5.4.4 ให้ C เป็นส่วนตัด ใด ๆ

1. C เป็นส่วนตัดบวก ก็ต่อเมื่อ $C > 0^*$
2. C เป็นส่วนตัดลบก็ต่อเมื่อ $C < 0^*$

พิสูจน์ 1. สำหรับ C เป็นส่วนตัดบวก จึงได้ว่า $-C$ เป็นส่วนตัดลบ

$-C + 0^*$ เป็นส่วนตัดลบ

$-(-C + 0^*)$ เป็นส่วนตัดบวก

$C - 0^*$ เป็นส่วนตัดบวก

นิยาม 5.4.1 $\qquad 0^* < C$

จึงได้ว่า $\qquad C > 0^*$

ดังนั้น C เป็นส่วนตัดบวก ก็ต่อเมื่อ $C > 0^*$

2. สำหรับ C เป็นส่วนตัดลบ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.4.5 ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ ถ้า $C<D$ แล้ว $C+E<D+E$

พิสูจน์ สำหรับ C,D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ

ให้ $C<D$ จะมี $x\in Q$ ซึ่ง $x\in D$ และ $x\notin C$

จาก $x\in D$ เนื่องจาก D เป็นส่วนตัด

จะมี $y\in D$ ซึ่ง $y>x$

พิจารณา E เป็นส่วนตัดและ $y-x>0$

จะมี $p\in E,q\in E'$ ซึ่ง $y-x=q+p$

$$y+p=x+q$$

เนื่องจาก $y\in D$ และ $q\in E$ จะได้ว่า

$$(y+p)\in(D+E) \qquad ....(1)$$

จาก $x\notin C$ จะได้ $x>c$ สำหรับทุกค่า $c\in C$

จาก $q\in E'$ จะได้ $q>e$ สำหรับทุกค่า $e\in E$

ดังนั้น $x+q>c+e$ สำหรับทุกค่า $c\in C$ และทุกค่า $e\in E$

$x+q>z$ สำหรับทุกค่า $z\in C+E$

$y+p>z$ สำหรับทุกค่า $z\in C+E$ (เพราะว่า $y+p=x+q$)

จะได้ว่า $(y+p)\notin(C+E)$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $(y+p)\in Q$

ซึ่ง $(y+p)\in(D+E)$ และ $(y+p)\notin(C+E)$

จึงได้ว่า $C+E<D+E$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C,D และ E ใด ๆ ถ้า $C<D$ แล้ว $C+E<D+E$

ทฤษฎีบท 5.4.6 ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ

1. $C<D$ ก็ต่อเมื่อ $C-D<0^*$
2. $C>D$ ก็ต่อเมื่อ $C-D>0^*$

พิสูจน์ 1. ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ

ให้ $C<D$

จากทฤษฎีบท 5.4.5 $C+(-D)<D+(-D)$

$$C-D<0^*$$

ดังนั้น ถ้า $C<D$ แล้ว $C-D<0^*$ ....(1)

ให้ $C-D<0^*$

$$C+(-D)<0^*$$

จากทฤษฎีบท 5.4.5 $[C+(-D)]+D<0^*+D$

$$C+[(-D)+D]<D$$

$$C+0^* < D$$
$$C < D$$

ดังนั้น ถ้า $C-D<0^*$ แล้ว $C<D$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ว่า $C<D$ ก็ต่อเมื่อ $C-D<0^*$

2. สำหรับ $C>D$ ก็ต่อเมื่อ $C-D>0^*$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 5.4.7 ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C<D$ และ $E>0^*$ แล้ว $C\cdot E<D\cdot E$

พิสูจน์ ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ

ให้ $C<D$ และ $E>0^*$ จึงได้ว่า E เป็นส่วนตัดบวก

จากทฤษฎีบท 5.4.6 ข้อ 1 $C-D<0^*$

จากทฤษฎีบท 5.4.4 ข้อ 2 $C-D$ เป็นส่วนตัดลบ

$(C-D)\cdot E$ เป็นส่วนตัดลบ

จากทฤษฎีบท 5.4.4 ข้อ 2 $[C+(-D)]\cdot E<0^*$

$$[C\cdot E+(-D)\cdot E]<0^*$$
$$[C\cdot E+\{-(D\cdot E)\}]<0^*$$
$$(C\cdot E-D\cdot E)<0^*$$

จากทฤษฎีบท 5.4.6 ข้อ 1 $C\cdot E<D\cdot E$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C,D และ E ใด ๆ ถ้า $C<D$ และ $E>0^*$ แล้ว $C\cdot E<D\cdot E$

ทฤษฎีบท 5.4.8 .ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C<D$ และ $E<0^*$ แล้ว $C\cdot E>D\cdot E$

พิสูจน์ สำหรับ C,D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ

ให้ $C<D$ และ $E<0^*$

จากทฤษฎีบท 5.4.6 ข้อ 1 $C-D<0^*$

จากทฤษฎีบท 5.4.4 ข้อ 2 $C-D$ เป็นส่วนตัดลบ

$(C-D)\cdot E$ เป็นส่วนตัดบวก

จากทฤษฎีบท 5.4.4 ข้อ 1 $(C-D)\cdot E>0^*$

$$[C+(-D)]\cdot E>0^*$$
$$[C\cdot E+(-D)\cdot E]>0^*$$
$$(C\cdot E-D\cdot E)>0^*$$

จากทฤษฎีบท 5.4.6 ข้อ 2 $C\cdot E>D\cdot E$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C,D และ E ใด ๆ ถ้า $C<D$ และ $E<0^*$ แล้ว $C\cdot E>D\cdot E$

นิยาม 5.4.3 ให้ C, D และ E เป็นส่วนตัด ใด ๆ

1. $C < D < E$ ก็ต่อเมื่อ $C < D$ และ $D < E$
2. $C \le D < E$ ก็ต่อเมื่อ $C \le D$ และ $D < E$
3. $C < D \le E$ ก็ต่อเมื่อ $C < D$ และ $D \le E$
4. $C \le D \le E$ ก็ต่อเมื่อ $C \le D$ และ $D \le E$

ทฤษฎีบท 5.4.8 ให้ C เป็นส่วนตัดใดๆ และจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r \in C$ ก็ต่อเมื่อ $r^* < C$

พิสูจน์ ให้ C เป็นส่วนตัดและ r เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ

ให้ $r \in C$

จะได้ว่า $r \in C$ และ $r \notin r^*$ เพราะว่า $r^* = \{x \in Q \mid x < r\}$

นั่นคือ $r^* < C$

ดังนั้น ถ้า $r \in C$ แล้ว $r^* < C$ ....(1)

ให้ $r^* < C$

จะมี $x \in Q$ ซึ่ง $x \in C$ และ $x \notin r^*$

จาก $x \notin r^*$ จะได้ $x \ge r$

เนื่องจาก $x \in C$ และ $r \le x$

จึงได้ว่า $r \in C$

ดังนั้น ถ้า $r^* < C$ แล้ว $r \in C$ ....(2)

ดังนั้น จาก(1) และ(2)ทุกส่วนตัด C และจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ $r \in C$ ก็ต่อเมื่อ $r^* < C$

นิยาม 5.4.4 ถ้า L เป็นเซตของส่วนตัด และมีส่วนตัด B ที่มีสมบัติว่า $C \le B$ ทุกๆ ส่วนตัด $C \in L$ แล้ว กล่าวว่า B เป็นขอบเขตบนของ L และกล่าวว่า L เป็นเซตที่มีขอบเขตบน

ถ้า U เป็นขอบเขตบนของ L ที่มีสมบัติว่า $U \le B$ ทุกๆ ส่วนตัด B ที่เป็นขอบเขตบนของ L แล้วจะกล่าวว่า U เป็นขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของ L

ทฤษฎีบท 5.4.9 ถ้า L เป็นเซตของส่วนตัดที่มีขอบเขตบนแล้ว จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด

พิสูจน์ ให้ $U(L)$ เป็นเซตขอบเขตบนของ L และให้ $U = \bigcap_{B \in U(L)} B$

ให้ $C \in L$ ดังนั้น $C \le B$ ได้ว่า $C \subseteq B$ ทุกๆ $B \in U(L)$

ดังนั้น $C \subseteq U$

ได้ว่า $C \le U$ ทุกๆ $C \in L$ นั่นคือ U เป็นขอบเขตบนของ L

และ $U \subseteq B$ คือ $U \le B$ ทุก ๆ ขอบเขตบน $B \in U(L)$

ดังนั้น U เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ L

สมบัติข้างต้นนี้เรียกว่า สมบัติความบริบูรณ์ (completeness property) :ซึ่งไม่มีในเซตจำนวนตรรกยะ

5.5 การกำหนดจำนวนจริง

เซตของส่วนตัดและตัวดำเนินการบวก และการคูณมีสมบัติครอบคลุมสมบัติของจำนวนตรรกยะทั้งหมด และมีสมบัติอื่นเพิ่มเติม ถ้ามีการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเซตของส่วนตัดตรรกยะและเซตจำนวนตรรกยะ โดยให้ $C(r) \leftrightarrow r$

เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะ และจะพบว่า

$$C(r)+C(s)=C(r+s) \leftrightarrow r+s$$

และ $$C(r)\cdot C(s)=C(rs) \leftrightarrow rs$$

แสดงว่า เซตของส่วนตัดตรรกยะจะสมสัณฐาน (isomorphic) กับเซตจำนวนตรรกยะ

ในกรณีไม่ใช่ส่วนตัดตรรกยะ จะเรียกว่า ส่วนตัดอตรรกยะ กำหนดจำนวนที่มีชื่อว่า จำนวนอตรรกยะ (irrational number) มาจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับส่วนตัดอตรรกยะ ดังตัวอย่าง

$$\left\{x \in Q \mid x^2 < 2\right\} \cup Q^- \leftrightarrow \sqrt{2}$$

$$\left\{x \in Q \mid x^3 < 5\right\} = \left\{x \in Q \mid x < \sqrt[3]{5}\right\} \leftrightarrow \sqrt[3]{5}$$

จำนวนตรรกยะประกอบกับจำนวนอตรรกยะ เรียก จำนวนจริง (real number) ดังนั้น เซตของส่วนตัดทั้งหมดจะสมสัณฐานกับเซตของจำนวนจริง ใช้สัญลักษณ์ R และใช้ $a,b,c,x,y,...$ แทนจำนวนจริง สมบัติต่างๆ ของส่วนตัดก็จะเป็นสมบัติของจำนวนจริง

สัจพจน์ของจำนวนจริง

เซตจำนวนจริงประกอบด้วยจำนวน และตัวดำเนินการทวิภาค คือ การบวก " $+$ " และการคูณ " $\times$ " มีสมบัติดังนี้

1. ตัวดำเนินการบวก ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ผลบวกของ a กับ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย " $a+b$ " จะเป็นจำนวนจริง เพียงจำนวนเดียว และมีสมบัติดังนี้ สำหรับจำนวนจริง a,b และ c ใดๆ

1.1 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $a+(b+c)=(a+b)+c$

1.2 สมบัติการสลับที่ $a+b=b+a$

1.3 มีจำนวนจริงศูนย์ 0 เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+0=0+a=a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a (เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก)

1.4 สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง b เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+b=0$ เรียกจำนวน b ว่าจำนวนลบ (negative) ของ a ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $-a$ จะได้ว่า $a+(-a)=-a+a=0$

2. ตัวดำเนินการคูณ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงผลคูณของ a และ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย " $a\times b$ " หรือ " $a\cdot b$ " หรือ " ab " จะเป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเพียงจำนวนเดียว และมีสมบัติดังต่อไปนี้ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

2.1 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

2.2 สมบัติการสลับที่ $a\cdot b = b\cdot a$

2.3 มีจำนวนจริง 1 เพียงจำนวนเดียว ที่มีสมบัติว่า $a\cdot 1 = 1\cdot a = a$ เรียก 1 ว่าแอกลักษณ์สำหรับการคูณของจำนวนจริง

2.4 สำหรับจำนวนจริง a ที่ไม่ใช่ 0 จะมีจำนวนจริง b เพียงจำนวนเดียว ที่มีสมบัติว่า $a\cdot b = 1$ เรียก b ว่าตัหผกผัน (inverse) ของ a ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย a^{-1} หรือ $\dfrac{1}{a}$ จะได้ว่า $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$

3. สมบัติการแจกแจง $a(b+c) = ab + ac$

เซตที่มีสมาชิกและตัวดำเนินการสองตัว ซึ่งทีสมบัติ ทั้ง 9 ข้อข้างต้น เรียกเซตนั้นว่า สนาม (field) โดยที่เซตของจำนวนจริงและการดำเนินการบวก และการดำเนินการคูณมีสมบัติเป็นสนาม ยังมีสมบัติเป็นสนามลำดับ (ordered field) และสมบัติความบริบูรณ์ (completeness axiom)

5.6 ความสัมพันธ์ลำดับของจำนวนจริง

เซตจำนวนจริงบวก ให้ P เป็นเซตจำนวนจริงบวก (positive real number) :ซึ่งเป็นเซตย่อยแท้ของจำนวนจริง โดยเซต P มีสมบัติดังนี้

1. ถ้า $x, y\in P$ แล้ว $x+y\in P$ และ $xy\in P$
2. สำหรับจำนวนจริง x แต่ละตัว จะสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้เพียงข้อเดียว

2.1 $x\in P$ 2.2 $-x\in P$ 2.3 $x=0$

ถ้า $x\in P$ จะกล่าวว่า x เป็นจำนวนบวก และถ้า $-x\in P$ กล่าวว่า x เป็นจำนวนลบ และจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทของส่วนตัดที่ว่า จำนวน x เป็นจำนวนลบ ก็ต่อเมื่อ $-x$ เป็นจำนวนบวก

นิยาม 5.6.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า a น้อยกว่า b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a<b$ ถ้า $b-a\in P$ และกล่าวว่า a มากกว่า b ใช้สัญลักษณ์ $a>b$ ถ้า $a-b\in P$

สัญลักษณ์ $a\le b$ หมายความว่า $a<b$ หรือ $a=b$

$a\ge b$ หมายความว่า $a>b$ หรือ $a=b$

เรียกความสัมพันธ์น้อยกว่า หรือมากกว่า ว่า ความสัมพันธ์อันดับ (order relation)

เซตจำนวนบวกเป็นเซตย่อยแท้สามารนิยามการ น้อยกว่า และมากกว่าได้ จึงกล่าวได้ว่าจำนวนจริงมีสมบัติเป็น สนามอันดับ (ordered field)

นิยาม 5.6.2 ค่าสมบูรณ์ (absolute value) ให้ a เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ ของ a ใช้สัญลักษณ์ $|a|$ กำหนดโดย

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{ถ้า } a<0 \\ a & \text{ถ้า } a\ge 0 \end{cases}$$

ค่าสัมบูรณ์ $|a|$ เป็นจำนวนที่ไม่มีเครื่องหมายของ a

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ .ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ

1. $|-a| = |a|$ และ $|a-b| = |b-a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. $-|a| \le a \le |a|$
5. $|a+b| \le |a|+|b|$
   - 5.1 $|a+b| = |a|+|b|$ เมื่อ $ab > 0$
   - 5.2 $|a+b| < |a|+|b|$ เมื่อ $ab < 0$
6. $|a|-|b| \le |a-b|$

ช่วงเปิดและช่วงปิด

นิยาม 5.6.2 กำหนดสัญลักษณ์เซตย่อยของจำนวนจริง ดังนี้ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ช่วงเปิด (open interval) $(a,b) = \{x \in R \,|\, a < x < b\}$

ช่วงปิด (closed interval) $[a,b] = \{x \in R \,|\, a \le x \le b\}$

ช่วงกึ่งเปิดทางซ้าย (half-oper on the left) $(a,b] = \{x \in R \,|\, a < x \le b\}$

ช่วงกึ่งเปิดทางขวา (half-oper on the right) $[a,b) = \{x \in R \,|\, a \le x < b\}$

ช่วงกึ่งอนันต์ (semi-infinite intervals)

เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่า b $(-\infty,b) = \{x \in R \,|\, x < b\}$

เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่า b $(-\infty,b] = \{x \in R \,|\, x \le b\}$

เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า a $(a,\infty) = \{x \in R \,|\, x > a\}$

เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ a $[a,\infty) = \{x \in R \,|\, x \ge a\}$

ช่วงอนันต์ (infinite interval) $(-\infty,\infty) = \{x \,|\, x \in R\}$

5.7 เซตมีขอบเขต

จำนวนน้อยที่สุด จำนวนมากที่สุด

นิยาม 5.7.1 ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีจำนวนจริง $a \in A$ ที่มีสมบัติว่า $a \le x$ ทุก ๆ จำนวน $x \in A$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด หรือ ค่าต่ำสุด (minimum) ของ A และถ้ามีจำนวนจริง $b \in A$ ที่มีสมบัติว่า $x \le b$ ทุกๆ จำนวน

$x \in A$ แล้วจะกล่าวว่า b เป็นจำนวนที่มากที่สุด หรือ ค่าสูงสุด (maximum) ของ A ใช้สัญลักษณ์ $\min A$ แทนค่าต่ำสุดของ A และ $\max A$ แทนค่าสูงสุดของ A

ตัวอย่าง 5.7.1 $A=\{x\in R \mid 0\le x<1\}$ พบว่า $\min A=0$ ไม่มีค่าสูงสุด

$B=\{x\in R \mid \sqrt{2}\le x\le 7\}$ พบว่า $\min B=\sqrt{2}$ และ $\max B=7$

$C=\{x\in R \mid x^2=\sqrt{5}\}$ พบว่า $\min C=-\sqrt{5}$ และ $\max C=\sqrt{5}$

ทฤษฎีบท 5.7.1 ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงถ้า A มีค่าต่ำสุดแล้ว จะมีเพียงค่าเดียว และถ้า A มีค่าสูงสุดแล้ว จะมีเพีงค่าเดียว

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นค่าต่ำสุดของ A
จาก a เป็นค่าต่ำสุดของ A และ $b\in a$ จะได้ว่า $a\le b$
จาก b เป็นค่าต่ำสุดของ A และ $a\in A$ จะได้ว่า $a\ge b$
ดังนั้น $a=b$
นั่นคือ ค่าต่ำสุดของ A มีเพียงค่าเดียว
สำหรับค่าสูงสุด ใช้การพิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

เซตมีขอบเขต

นิยาม 5.7.2 ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่ไม่ใช้เซตว่าง ถ้ามีจำนวนจริง b ที่มีสมบัติว่า

1. ถ้ามี $x\le b$ ทุก ๆ จำนวน $x\in A$ แล้ว กล่าวว่า b เป็นของเขตบน (upper bound) ของ A
2. ถ้ามีจำนวนจริง a ที่มีสมบัติว่า $x\ge a$ ทุก ๆ จำนวน $x\in A$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นของเขตล่าง (lower bound) ของ A

ในกรณีที่ A มีขอบเขตบนและมีขอบเขตล่าง กล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขต

นิยาม 5.7.3 ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตที่มีขอบเขตบน กล่าวว่า b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุด (least upper bound) ของ A ถ้า b เป็นขอบเขตบนของ A และ $b\le y$ ทุก ๆ y ที่เป็นขอบเขตบนของ A และกล่าวว่า a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุด (greatest lower bound) ของ A ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A และ $a\ge x$ ทุก ๆ x ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

ทฤษฎีบท 5.7.2 สำหรับเซตของจำนวนจริง A จะได้ว่า a เป็นค่าต่ำสุดของ A ก็ต่อเมื่อ a เป็นขอบเขตล่างของ A และ b เป็นค่าสูงสุดของ A ก็ต่อเมื่อ b เป็นขอบเขตบนของ A และ $b\in A$

ทฤษฎีบท 5.7.3 ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่างแล้ว จะมีขอบเขตล่างมากที่สุดเพียงค่าเดียว และถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตบนแล้ว จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุดเพียงค่าเดียว

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของ A
จาก a เป็นขอบเขตล่าง และ b เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของ A จะได้ว่า $a \le b$
จาก b เป็นขอบเขตล่าง และ a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของ A จะได้ว่า $a \ge b$
ดังนั้น $a = b$
นั่นคือ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ A มีเพียงจำนวนเดียว
สำหรับขอบเขตบนน้อยที่สุด ใช้การพิสูจน์ทำนองเดียวกัน

สัจพจน์ความบริบูรณ์

ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตล่างแล้ว จะมีขอบเขตล่างที่มากที่สุด และถ้า A มีขอบเขตบนแล้ว จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด

สำหรับ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ A (greatest lower bound of A) ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{glb}(A)$ หรือ $\inf A$ (infimum of A)

ขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A (least upper bound of A) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{lub}\, A$ หรือ $\sup A$ (supremum of A)

เนื่องจากเซตจำนวนจริงสมสัณฐานกับเซตส่วนตัด ซึ่งในเซตส่วนตัดได้แสดงแล้วว่า ส่วนตัดมีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด จึงยอมรับได้เลยว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.7.4 สมบัติของขอบเขตล่าง และขอบเขตบน ถ้า A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขต จะได้ว่า

1. ถ้า $x \in A$ แล้ว $\inf \le x \le \sup A$
2. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ $y \le \inf A$ และ z เป็นขอบเขตบนของ A ก็ต่อเมื่อ $z \ge \sup A$
3. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x < y$ แล้ว $x \notin A$
4. $a = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นขอบเขตล่างของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y < a + \varepsilon$
   และ $b = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ b เป็นขอบเขตบนของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y > b - \varepsilon$

ทฤษฎีบท 5.7.5 ให้ x เป็นจำนวนจริง จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $x < n$

พิสูจน์ สมมติว่าไม่มี n ที่มีสมบัติว่า $x < n$ จึงได้ว่า $x \ge n$ ทุกๆ จำนวนเต็มบวก n
ดังนั้น x เป็นขอบเขตบนของเซตจำนวนเต็มบวก และเซตจำนวนเต็มบวกเป็นเซตที่มีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด ให้ b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ เซตจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า มีจำนวน $n \in Z^{+}$ ที่ $n > b - \frac{1}{2}$ ดังนั้น $n+1 > n + \frac{1}{2} > b$

แต่ $n+1 \in Z^{+}$ ขัดแย้งกับที่สมมติว่า b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ เซตจำนวนเต็มบวก ดังนั้น Z^{+} เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน และจะมีจำนวนเต็ม n ที่มีสมบัติว่า $x < n$

ทฤษฎีบท 5.7.6 สมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง (Archimedean property of real numbers)
ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $x < ny$

พิสูจน์ พิจารณาจำนวนจริง $\frac{x}{y} > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติ $\frac{x}{y} < n$
ดังนั้น $x < ny$

บทแทรก 5.7.1 สำหรับจำนวนจริงบวก x ใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $x > \frac{1}{n}$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง 1 และ x จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $1 < nx$
ดังนั้น $x > \frac{1}{n}$

บทแทรก 5.7.2 สำหรับจำนวนจริงบวก x ใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า
$n-1 \le x < n$

พิสูจน์ พิจารณาเซต $S = \{k \in Z^{+} \mid k > x\}$
จะได้ว่า S มีจำนวนน้อยที่สุด ให้ $n = \min S$
จะได้ว่า $n > x$ สมมติ $n-1 > x$
จะได้ว่า $n-1 \in S$ และจาก $n-1 < n$ จึงขัดแย้งกับที่กำหนดว่า $n = \min S$
ดังนั้น $n-1 \le x < n$

ทฤษฎีบท 5.7.7 สมบัติความหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ
ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $x < y$ จะมีจำนวนตรรกยะ r ที่มีสมบัติว่า
$x < r < y$

พิสูจน์ จาก $x < y$ ดังนั้น $y - x > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $1 < n(y-x)$
จะได้ว่า $nx + 1 < ny$
โดยบทแทรก 5.7.2 จะได้ว่า มีจำนวนเต็มบวก m ที่มีสมบัติว่า $m-1 \le nx < m$
ดังนั้น $m \le nx + 1 < ny$ และ $nx < m < ny$
ให้ $r = \frac{m}{n}$ จะได้ $x < r < y$

ทฤษฎีบท 5.7.8 สมบัติความหนาแน่นของจำนวนอตรรกยะ

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $x<y$ จะมีจำนวนอตรรกยะ z ที่มีสมบัติว่า $x<z<y$

ทฤษฎีบท 5.7.9 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a<b+\varepsilon$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε แล้ว $a\le b$

พิสูจน์ สมมติว่า $a>b$ จะได้ว่า $a-b>0$ ดังนั้น มีจำนวนเต็ม n ที่มีสมบัติว่า $a-b>\frac{1}{n}$
ได้ $a>b+\frac{1}{n}$ ขัดแย้งกับ $a<b+\varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon=\frac{1}{n}$
ดังนั้น $a\le b$

5.8 สรุป

1. การสร้างจำนวนจริงนักคณิตศาสตร์ได้สร้างโดยใช้ส่วนตัดเดเดคินด์ ซึ่งมีนิยามดังนี้ สำหรับเซต C ที่เป็นเซตย่อยแท้ที่ไม่เป็นเซตว่างของจำนวนตรรกยะ Q เรียกเซต C ว่าส่วนตัดเดเดคินด์ เมื่อเซต C สอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1.1 $C\ne\phi$ และ $C\ne Q$

1.2 ถ้า $x\in Q$ และ $c\in C$ โดยที่ $x<c$ แล้ว $x\in C$

1.3 ถ้า $c\in C$ จะมี $x\in C$ ซึ่ง $x>c$

2. การบวกส่วนตัด สำหรับ C และ D ที่เป็นส่วนตัด ใด ๆ ผลบวกของ C และ D คือ $C+D=\{x\,|\,x=c+d$ สำหรับ $c\in C$ และ $d\in D\}$

3. สมบัติการบวก ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัดใดๆ

3.1 สมบัติการปิด; $C+D$ เป็นส่วนตัด และมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

3.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม; $(C+D)+E=C+(D+E)$

3.3 สมบัติการสลับ; $C+D=D+C$

3.4 สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก; $C+0^*=0^*=0^*+C$ โดยเรียก 0^* ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

3.5 สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก; $C+(-C)=0^*=(-C)+C$ โดยเรียก $-C$ ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ C

3.6 การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน; ถ้า $C=D$ แล้ว $C+E=D+E$

3.7 การตัดออกสำหรับการบวก; ถ้า $C+D=C+E$ แล้ว $D=E$

4. การลบส่วนตัด สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดใดๆ ตัวดำเนินการลบของ C และ D กำหนดดังนี้ $C-D=C+(-D)$

5. การคูณส่วนตัดบวก สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดบวกใดๆ กำหนดตัวดำเนินการคูณดังนี้ $C\cdot D = M\cup\{0\}\cup Q^-$ เมื่อ $M=\{cd \mid c\in Q^+\cap C$ และ $d\in Q^+\cap D\}$

6. สมบัติการคูณส่วนตัดบวก ให้ C,D และ E เป็นเป็นตัดบวก

6.1 สมบัติการปิด; $C\cdot D$ เป็นส่วนตัดบวก

6.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม; $(C\cdot D)\cdot E = C\cdot(D\cdot E)$

6.3 สมบัติการสลับที่; $C\cdot D = D\cdot C$

6.4 สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ; $C\cdot 1^* = C = 1^*\cdot C$ โดยเรียก 1^* ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

6.5 สมบัติการมีตักผกผันสำหรับการคูณ; $C\cdot C^{-1} = 1^* = C^{-1}\cdot C$ โดยเรียก C^{-1} ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ C

6.6 สมบัติการแจกแจง: $C\cdot(D+E) = C\cdot D + C\cdot E$

7. ค่าสัมบูรณ์ของส่วนตัด สำหรับ C เป็นส่วนตัดใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ C ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|C|$ กำหนดดังนี้

$$|C| = \begin{cases} C & \text{ถ้า } C \text{ เป็นส่วนตัดบวก} \\ -C & \text{ถ้า } C \text{ เป็นส่วนตัดลบ} \end{cases}$$

8. การคูณส่วนตัด ให้ C และ D เป็นส่วนตัด ผลคูณของ C และ D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C\cdot D$ กำหนดดังนี้

$$C\cdot D = \begin{cases} |C||D| & \text{ถ้า } C \text{ และ } D \text{ มีเครื่องหมายเหมือนกัน} \\ -(|C||D|) & \text{ถ้า } C \text{ และ } D \text{ มีเครื่องหมายเหมือนต่างกัน} \\ 0^* & \text{ถ้า } C \text{ หรือ } D \text{ เป็น } 0^* \end{cases}$$

9. สมบัติการคูณส่วนตัด ให้ C,D และ E เป็นส่วนตัด

9.1 สมบัติปิด : $C\cdot D$ เป็นส่วนตัด

9.2 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม: $C\cdot(D\cdot E) = (C\cdot D)\cdot E$

9.3 สมบัติการสลับที่ : $C\cdot D = D\cdot C$

9.4 สมบัติทีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ : ถ้า C เป็นส่วนตัด จะได้ว่า $C\cdot 1^* = 1^*\cdot C = C$

9.5 สมบัติมีตัวผกผันสำหรับการคูณ : ถ้า C เป็นส่วนตัดที่ไม่ใช่ 0^* จะได้ว่ามีส่วนตัด C^{-1} ที่มีสมบัติว่า $C\cdot C^{-1} = C^{-1}\cdot C = 1^*$

9.6 สมบัติการแจกแจง ; $C\cdot(D+E) = C\cdot D + C\cdot E$ และ $(C+D)\cdot E = C\cdot E + C\cdot D$

10. ความสัมพันธ์ลำดับ ให้ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ จะกล่าวว่า C น้อยกว่า D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C < D$ ก็ต่อเมื่อ $D - C$ เป็นส่วนตัดบวก และกล่าวว่า C มากกว่า D ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $C > D$ ถ้า $D < C$

สัญลักษณ์ $C \leq D$ หมายความว่า $C < D$ หรือ $C = D$

สัญลักษณ์ $C \geq D$ หมายความว่า $C > D$ หรือ $C = D$

11.สัจพจน์ของจำนวนจริง เซตจำนวนจริงประกอบด้วยจำนวน และตัวดำเนินการทวิภาค คือ การบวก “ $+$ ” และการคูณ “ $\times$ ” มีสมบัติดังนี้

1. ตัวดำเนินการบวก ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ผลบวกของ a กับ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $a+b$ ” จะเป็นจำนวนจริง เพียงจำนวนเดียว และมีสมบัติดังนี้ สำหรับจำนวนจริง a,b และ c ใดๆ

1.1 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $a+(b+c)=(a+b)+c$

1.2 สมบัติการสลับที่ $a+b=b+a$

1.3 มีจำนวนจริงศูนย์ 0 เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+0=0+a=a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a (เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก)

1.4 สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง b เพียงจำนวนเดียวที่มีสมบัติว่า $a+b=0$ เรียกจำนวน b ว่าจำนวนลบ ของ a ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $-a$ จะได้ว่า $a+(-a)=-a+a=0$

2. ตัวดำเนินการคูณ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงผลคูณของ a และ b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย “ $a\times b$ ” หรือ “ $a\cdot b$ ” หรือ “ ab ” จะเป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งเพียงจำนวนเดียว และมีสมบัติดังต่อไปนี้ ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

2.1 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

2.2 สมบัติการสลับที่ $a\cdot b=b\cdot a$

2.3 มีจำนวนจริง 1 เพียงจำนวนเดียว ที่มีสมบัติว่า $a\cdot 1=1\cdot a=a$ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของจำนวนจริง

2.4 สำหรับจำนวนจริง a ที่ไม่ใช่ 0 จะมีจำนวนจริง b เพียงจำนวนเดียว ที่มีสมบัติว่า $a\cdot b=1$ เรียก b ว่าตัวผกผัน ของ a ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย a^{-1} หรือ $\frac{1}{a}$ จะได้ว่า $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$

3. สมบัติการแจกแจง $a(b+c)=ab+ac$

เซตที่มีสมาชิกและตัวดำเนินการสองตัว ซึ่งทีสมบัติ ทั้ง 9 ข้อข้างต้น เรียกเซตนั้นว่า สนาม โดยที่เซตของจำนวนจริงและการดำเนินการบวก และการดำเนินการคูณมีสมบัติเป็นสนาม ยังมีสมบัติเป็นสนามลำดับ และสมบัติความบริบูรณ์

12.ความสัมพันธ์ลำดับของจำนวนจริง

เซตจำนวนจริงบวก

ให้ P เป็นเซตจำนวนจริงบวก :ซึ่งเป็นเซตย่อยแท้ของจำนวนจริง โดยเซต P มีสมบัติดังนี้

1. ถ้า $x,y\in P$ แล้ว $x+y\in P$ และ $xy\in P$

2. สำหรับจำนวนจริง x แต่ละตัว จะสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้เพียงข้อเดียว

2.1 $x\in P$ 2.2 $-x\in P$ 2.3 $x=0$

ถ้า $x \in P$ จะกล่าวว่า x เป็นจำนวนบวก และถ้า $-x \in P$ กล่าวว่า x เป็นจำนวนลบ และจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทของส่วนตัดที่ว่า จำนวน x เป็นจำนวนลบ ก็ต่อเมื่อ $-x$ เป็นจำนวนบวก

13. ความสัมพันธ์อันดับ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง กล่าวว่า a น้อยกว่า b ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a < b$ ถ้า $b - a \in P$ และกล่าวว่า a มากกว่า b ใช้สัญลักษณ์ $a > b$ ถ้า $a - b \in P$ สัญลักษณ์ $a \le b$ หมายความว่า $a < b$ หรือ $a = b$

$a \ge b$ หมายความว่า $a > b$ หรือ $a = b$

เรียกความสัมพันธ์น้อยกว่า หรือมากกว่า ว่า ความสัมพันธ์อันดับ

เซตจำนวนบวกเป็นเซตย่อยแท้สามารนิยามการ น้อยกว่า และมากกว่าได้ จึงกล่าวได้ว่า จำนวนจริงมีสมบัติเป็น สนามอันดับ

14. ค่าสมบูรณ์ ให้ a เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ ของ a ใช้สัญลักษณ์ $|a|$ กำหนดโดย

$$|a| = \begin{cases} -a & \text{ถ้า } a < 0 \\ a & \text{ถ้า } a \ge 0 \end{cases}$$

ค่าสัมบูรณ์ $|a|$ เป็นจำนวนที่ไม่มีเครื่องหมายของ a

15. สมบัติของค่าสัมบูรณ์ .ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ

15.1 $|-a| = |a|$ และ $|a-b| = |b-a|$

15.2 $|ab| = |a||b|$

15.3 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

15.4 $-|a| \le a \le |a|$

15.5 $|a+b| \le |a| + |b|$

15.5.1 $|a+b| = |a| + |b|$ เมื่อ $ab > 0$

15.5.2 $|a+b| < |a| + |b|$ เมื่อ $ab < 0$

15.6 $|a| - |b| \le |a-b|$

16. ช่วงเปิดและช่วงปิด เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ช่วงเปิด $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

ช่วงปิด $[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$

ช่วงกึ่งเปิดทางซ้าย $(a,b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$

ช่วงกึ่งเปิดทางขวา $[a,b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$

ช่วงกึ่งอนันต์

เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่า b $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$

เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่า b $(-\infty,b]=\{x\in R\,|\,x\le b\}$

เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า a $(a,\infty)=\{x\in R\,|\,x>a\}$

เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ a $[a,\infty)=\{x\in R\,|\,x\ge a\}$

ช่วงอนันต์ $(-\infty,\infty)=\{x\,|\,x\in R\}$

17. จำนวนน้อยที่สุด จำนวนมากที่สุด ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีจำนวนจริง $a\in A$ ที่มีสมบัติว่า $a\le x$ ทุก ๆ จำนวน $x\in A$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด หรือ ค่าต่ำสุด ของ A และถ้ามีจำนวนจริง $b\in A$ ที่มีสมบัติว่า $x\le b$ ทุกๆ จำนวน $x\in A$ แล้วจะกล่าวว่า b เป็นจำนวนที่มากที่สุด หรือ ค่าสูงสุด ของ A ใช้สัญลักษณ์ $\min A$ แทนค่าต่ำสุดของ A และ $\max A$ แทนค่าสูงสุดของ A

18. เซตมีของเขต ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่ไม่ใช้เซตว่าง ถ้ามีจำนวนจริง b ที่มีสมบัติว่า 1. ถ้ามี $x\le b$ ทุก ๆ จำนวน $x\in A$ แล้ว กล่าวว่า b เป็นของเขตบน ของ A

2. ถ้ามีจำนวนจริง a ที่มีสมบัติว่า $x\ge a$ ทุก ๆ จำนวน $x\in A$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นของเขตล่างของ A

ในกรณีที่ A มีขอบเขตบนและมีขอบเขตล่าง กล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขต

19. ขอบเขตบนน้อยที่สุด ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตที่มีขอบเขตบน กล่าวว่า b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A

20. ขอบเขตล่างมากที่สุด ถ้า b เป็นขอบเขตบนของ A และ $b\le y$ ทุก ๆ y ที่เป็นขอบเขตบนของ A และกล่าวว่า a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุด ของ A ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A และ $a\ge x$ ทุก ๆ x ที่เป็นขอบเขตล่างของ A

21. สัจพจน์ความบริบูรณ์ ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตล่างแล้ว จะมีขอบเขตล่างที่มากที่สุด และถ้า A มีขอบเขตบนแล้ว จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด

สำหรับ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ A ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{glb}(A)$ หรือ $\inf A$

ขอบเขตบนน้อยที่สุดของ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{lub}\,A$ หรือ $\sup A$

เนื่องจากเซตจำนวนจริงสมสัณฐานกับเซตส่วนตัด ซึ่งในเซตส่วนตัดได้แสดงแล้วว่า ส่วนตัดมีขอบเขตบน จะมีขอบเขตบนน้อยที่สุด จึงยอมรับได้เลยว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์

22. สมบัติของขอบเขตล่าง และขอบเขตบน ถ้า A เป็นเซตย่อยไม่ว่างของจำนวนจริงที่มีขอบเขต จะได้ว่า

1. ถ้า $x\in A$ แล้ว $\inf \le x\le \sup A$
2. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ $y\le \inf A$ และ z เป็นขอบเขตบนของ A ก็ต่อเมื่อ $z\ge \sup A$
3. y เป็นขอบเขตล่างของ A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x<y$ แล้ว $x\notin A$

4. $a = \inf A$ ก็ต่อเมื่อ a เป็นขอบเขตล่างของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y < a + \varepsilon$

และ $b = \sup A$ ก็ต่อเมื่อ b เป็นขอบเขตบนของ A และสำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวน $y \in A$ ที่ $y > b - \varepsilon$

23. สมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่มีสมบัติว่า $x < ny$

24. สมบัติความหนาแน่นของจำนวนตรรกยะ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $x < y$ จะมีจำนวนตรรกยะ r ที่มีสมบัติว่า $x < r < y$

25. สมบัติความหนาแน่นของจำนวนอตรรกยะ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $x < y$ จะมีจำนวนอตรรกยะ z ที่มีสมบัติว่า $x < z < y$

แบบฝึกหัด 5

1. กำหนดเซต $C=\{x\in Q \mid x<12\}$ จงแสดงว่าเซต C เป็นส่วนตัด
2. จงแสดงว่า $C=\{x\in Q \mid x\le 0$ หรือ $(x>0$ และ $x^2<2)\}$ เป็นส่วนตัด
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2.11 สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ ถ้า $C+D=D$ แล้ว $C=0^*$
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2.15 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบ จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวก
5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2.18 สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดใด ๆ $-(C+D)=-C-D$
6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.4.4 สำหรับ C เป็นส่วนตัดใด ๆ C เป็นส่วนตัดลบก็ต่อเมื่อ $C<0^*$

บทที่ 6
จำนวนเชิงซ้อน

บทนี้จะกล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อน ก็เริ่มจากการศึกษานิยามและสมบัติเบื้องตัน นิยามการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีบทสำหรับการบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อน ทฤษฎีบทสำหรับซ้อน การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อน สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน i ระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก ระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว ทฤษฎีบทของเดอร์มัว และการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

6.1 นิยามและสมบัติเบื้องต้น

พิจารณาสมการ $x^2+1=0$ สำหรับ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งพบว่าไม่สามารถหาค่า x ที่เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการดังกล่าวได้ นักคณิตศาสตร์จึงต้องขยายจำนวนจริงออก เพื่อหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้นให้ได้ จึงเป็นที่มาของจำนวนเชิงซ้อน

แนวคิดในการสร้างจำนวนเชิงซ้อน คือ จากที่มีสัญลักษณ์ $\sqrt{}$ มีความหมายว่า $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ ถ้า $x>0$ ดังนั้น ถ้าพิจารณาค่า $x=-1$ คือ $\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$ ซึ่งจะกำหนดให้ $i=\sqrt{-1}$ ซึ่งทำให้ $i^2=-1$

จากสมการ $x^2+1=0$ หรือ $x^2=-1$ จึงได้ว่ามีค่า $x=i$ เป็นผลเฉลยของสมการ ซึ่งจำนวน i ไม่ใช่จำนวนจริงและเรียกจำนวนนี้ว่าจำนวนจินตภาพ

นิยาม 6.1.1 สำหรับ a และ b ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ให้ z แทนจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ซึ่ง $z=(a,b)$

เรียกจำนวนจริง a ว่า ส่วนจริง (real part) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{Re}(z)$

เรียกจำนวนจริง b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{Im}(z)$

การกำหนดจำนวนเชิงซ้อน ให้ C แทนเซตจำนวนเชิงซ้อน คือ $C=\{(a,b) \mid a\in R$ และ $y\in R\}$

นิยาม 6.1.2 จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ ส่วนจริงแล้วส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองเท่ากัน นั่นคือ ถ้า $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$

$z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$

ทฤษฎีบท 6.1.1 ความสัมพันธ์ “ $=$ ” มีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ

1. สมบัติสะท้อน ; $z_1 = z_1$
2. สมบัติสมมาตร; ถ้า $z_1 = z_2$ แล้ว $z_2 = z_1$
3. สมบัติการถ่ายทอด; ถ้า $z_1 = z_2$ และ $z_2 = z_3$ แล้ว $z_1 = z_3$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2)$ และ $z_3 = (a_3, b_3)$ ใด ๆ

1. จาก $z_1 = (a_1, b_1)$ เนื่องจาก $a_1 = a_1$ และ $b_1 = b_1$

จึงได้ว่า $z_1 = z_1$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ “ $=$ ” มีสมบัติการสะท้อน

2. ถ้า $\qquad z_1 = z_2$

จากนิยาม $\qquad a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$

$\qquad a_2 = a_1$ และ $b_2 = b_1$

จึงได้ว่า $\qquad z_2 = z_1$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ “ $=$ ” มีสมบัติการสมมาตร

3. ถ้า $z_1 = z_2$ และ $z_2 = z_3$

จาก $z_1 = z_2$ จึงได้ว่า $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$ ....(1)

และ $z_2 = z_3$ จึงได้ว่า $a_2 = a_3$ และ $b_2 = b_3$ ....(2)

จาก (1) และ (2);

จึงได้ว่า $\qquad a_1 = a_3$ และ $b_1 = b_3$

นั่นคือ $z_1 = z_3$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ “ $=$ ” มีสมบัติการการถ่ายทอด

จากข้อ 1,ข้อ 2 และข้อ 3 จึงได้ว่า ความสัมพันธ์ “ $=$ ” มีสมบัติเป็นความสัมพันธ์สมมูล

6.2 การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 6.2.1 ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เมื่อ a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนดการดำเนินการบวก และการคูณบนเซตจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ การบวก $z_1 + z_1 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

การคูณ $\quad z_1 \cdot z_1 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

ข้อสังเกต 1. $(a, 0) + (0, b) = (a, b)$

2. $(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$
3. $z \cdot z$ หรือ zz นิยามเขียน z^2 และ $z^3 = z^2 \cdot z$

ทฤษฎีบท 6.2.1 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ z_1+z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

สำหรับ a_1,a_2,b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $z_1+z_2=(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

เนื่องจาก a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จึงได้ว่า a_1+a_2 และ b_1+b_2 เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ (a_1+a_2,b_1+b_2) เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ z_1+z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 6.2.2 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ z_1+z_2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.3 จำนวนเชิงซ้อน z_1,z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ และ $z_3=(a_3,b_3)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

สำหรับ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 และ b_3 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}
z_1+(z_2+z_3) &= (a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)]\\
&= (a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)\\
&= (a_1+(a_2+a_3),b_1+(b_2+b_3))\\
&= ((a_1+a_2)+a_3,(b_1+b_2)+b_3)\\
&= (a_1+a_2,b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\
&= [(a_1,b_1)+(a_2,b_2)]+(a_3,b_3)\\
&= (z_1+z_2)+z_3
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1,z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

ทฤษฎีบท 6.2.4 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $z_1+z_2=z_2+z_1$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.5 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน u และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+u=z$ เรียก u ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

พิสูจน์ ให้จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ และ $u=(0,0)$ ใด ๆ

สำหรับ a,b และ 0 ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะแสดงว่ามีจำนวนเชิงซ้อน u ซึ่งทำให้ $z+u=z$

พิจารณา $z+u=(a,b)+(0,0)$

$$=(a+0,b+0)$$
$$=(a,b)=z$$

จึงได้ว่า มีจำนวนเชิงซ้อน u ซึ่งทำให้ $z+u=z$

จะแสดงว่า มีจำนวนเชิงซ้อน u เพียงจำนวนเดียว ซึ่งทำให้ $z+u=z$

ให้ $u_1=(a_1,b_1)$ ซึ่งมีสมบัติว่า $z+u_1=z$

พิจารณา
$$z+u_1=z$$
$$(a,b)+(a_1,b_1)=(a,b)$$
$$(a+a_1,b+b_1)=(a,b)$$
$$a+a_1=a \qquad ....(1)$$

และ
$$b+b_1=b \qquad ....(2)$$

จากสมการ (1); เป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $a_1=0$

และ สมการ (2); เป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $b_1=0$

นั่นคือ $a_1=b_1=0$

จึงได้ว่า $u_1=u$

แสดงว่า u เป็นจำนวนเชิงซ้อนเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ $z+u=z$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ มีจำนวนเชิงซ้อน u และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+u=z$

นิยาม 6.2.2 เขียนจำนวนเชิงซ้อน $(0,0)$ ด้วย 0 และเรียกว่า เอกลักษณ์สำหรับการบวก

ทฤษฎีบท 6.2.6 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน v และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+v=u$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $-z$ เรียกว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ z

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b),u=(0,0)$ และ $-z=(-a,-b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับ $a,b\in R$

จะแสดงว่ามีจำนวนเชิงซ้อน $(-z)$ ซึ่งมีสมบัติว่า $z+(-z)=u$

พิจารณา
$$z+(-z)=(a,b)+(-a,-b)$$
$$=(a+(-a),b+(-b))$$
$$=(0,0)=u$$

จึงได้ว่า มีจำนวนเชิงซ้อน $(-z)$ ซึ่งมีสมบัติว่า $z+(-z)=u$

จะแสดงว่า ทุกจำนวนเชิงซ้อน z มีจำนวนเชิงซ้อน $-z$ เพียงจำนวนเดียวซึ่ง $z+(-z)=u$

ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน สำหรับ $a_1,b_1\in R$ ที่มีสมบัติว่า $z+z_1=u$

พิจารณา
$$z+z_1=u$$
$$(a,b)+(a_1,b_1)=(0,0)$$
$$(a+a_1,b+b_1)=(0,0)$$

จึงได้ว่า $a+a_1=0$ ....(1)

$b+b_1=0$ ....(2)

จากสมการ (1); สำหรับจำนวนจริงจึงได้ว่า $a_1=-a$

จากสมการ (2); สำหรับจำนวนจริงจึงได้ว่า $b_1=-b$

จึงได้ว่า $z_1=-z$

นั่นคือ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z มี จำนวนเชิงซ้อน $-z$ เพียงจำนวนเดียวซึ่งมีสมบัติว่า $z+(-z)=u$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ มีจำนวนเชิงซ้อน $-z$ เพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+(-z)=u$

นิยาม 6.2.3 จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริง กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $-z=(-a,-b)$ และเรียกว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ z

ทฤษฎีบท 6.2.7 จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ ถ้า $z_1+z_3=z_2+z_3$ แล้ว $z_1=z_2$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1), z_2=(a_2,b_2)$ และ $z_3=(a_3,b_3)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สำหรับ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 และ b_3 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ให้ $$z_1+z_3=z_2+z_3$$

$$(a_1,b_1)+(a_3,b_3)=(a_2,b_2)+(a_3,b_3)$$

$$(a_1+a_3,b_1+b_3)=(a_2+a_3,b_2+b_3)$$

จากการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

$a_1+a_3=a_2+a_3$ ....(1)

และ $b_1+b_3=b_2+b_3$ ....(2)

จากสมการ (1); $a_1=a_2$ ....(3)

จากสมการ (2); $b_1=b_2$ ....(4)

จากสมการ (3) และ (4); $z_1=z_2$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ ถ้า $z_1+z_3=z_2+z_3$ แล้ว $z_1=z_2$

ทฤษฎีบท 6.2.8 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $-(-z)=z$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สำหรับ a และ b ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา $$-(-z)=-(-a,-b)$$

$$=(-(-a),-(-b))$$

$$=(a,b)=z$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $-(-z)=z$

ทฤษฎีบท 6.2.9 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $-(z_1+z_2)=(-z_1)+(-z_2)$
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.10 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.11 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $z_1 \cdot z_2$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.12 จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)=(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ และ $z_3=(a_3,b_3)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
สำหรับ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 และ b_3 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\begin{aligned}
z_1\cdot(z_2\cdot z_3) &= (a_1,b_1)\cdot\left[(a_2,b_2)\cdot(a_3,b_3)\right]\\
&= (a_1,b_1)\cdot(a_2a_3-b_2b_3, a_2b_3+a_3b_2)\\
&= \left(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+a_3b_2), a_1(a_2b_3+a_3b_2)+b_1(a_2a_3-b_2b_3)\right)\\
&= \left(a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3-a_3b_1b_2, a_1a_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1-b_1b_2b_3\right)\\
&= \left(a_1a_2a_3-a_3b_1b_2-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3, a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1a_3b_2+a_2a_3b_1\right)\\
&= \left((a_1a_2-b_1b_2)\cdot a_3-(a_1b_2+a_2b_1)\cdot b_3, (a_1a_2-b_1b_2)\cdot b_3+(a_1b_2+a_2b_1)\cdot a_3\right)\\
&= (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)\cdot(a_3,b_3)\\
&= \left[(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)\right]\cdot(a_3,b_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)=(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3$

ทฤษฎีบท 6.2.13 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.14 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน w และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z\cdot w=z$ เรียก w ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ และ $w=(1,0)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สำหรับ $a,b\in R$
จะแสดงว่ามีจำนวนเชิงซ้อน w ที่มีสมบัติว่า $z\cdot w=z$
พิจารณา

$$\begin{aligned}
z\cdot w &= (a,b)\cdot(1,0)\\
&= (a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)\\
&= (a,b)=z
\end{aligned}$$

นั่นคือ มีจำนวนเชิงซ้อน w ที่มีสมบัติว่า $z\cdot w=z$
จะแสดงว่า มีจำนวนเชิงซ้อน w ที่มีสมบัติว่า $z\cdot w=z$ เพียงจำนวนเดียว

ให้ $w_1=(x,y)$ สำหรับ $x,y\in R$ ที่มีสมบัติว่า $z\cdot w_1=z$

พิจารณา
$$z\cdot w_1=z$$
$$(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$$
$$(a\cdot x-b\cdot y,a\cdot y+b\cdot x)=(a,b)$$
$$ax-by=a \qquad \text{............}(1)$$
$$ay+bx=b \qquad \text{............}(2)$$

นำสมการ (1) บวกสมการ (2); $ax-by+ay+bx=a+b$
$$(x+y)a+(x-y)b=a+b$$
$$x+y=1 \text{ ....}(3)$$
$$x-y=1 \text{ ....}(4)$$

จากสมการ (3) และ (4); $x=1,y=0$

จึงได้ว่า $w_1=(1,0)=w$

นั่นคือ $w=w_1$

จึงได้ว่ามีจำนวนเชิงซ้อน w ที่มีสมบัติว่า $z\cdot w=z$ เพียงจำนวนเดียว ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ มีจำนวนเชิงซ้อน w เพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z\cdot w=z$

นิยาม 6.2.4 จำนวนเชิงซ้อน $(1,0)$ ใช้สัญลักษณ์ด้วย 1 และเรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

ทฤษฎีบท 6.2.15 จำนวนเชิงซ้อน $z\neq 0$ ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน v และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z\cdot v=1$

พิสูจน์ จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$, $v=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$ สำหรับ $a,b\in R$ และ $a,b\neq 0$

จะแสดงว่ามีจำนวนเชิงซ้อน v ที่มีสมบัติว่า $z\cdot v=1$

พิจารณา
$$z\cdot v=(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$
$$=\left(a\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)-b\cdot\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right),a\cdot\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)+b\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2},-\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1$$

นั่นคือ มีจำนวนเชิงซ้อน v ที่มีสมบัติว่า $z\cdot v=1$

จะแสดงว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z จะมี v เพียงจำนวนเดียวซึ่ง $z\cdot v=1$

ให้ จำนวนเชิงซ้อน $z_1=(x,y)$ สำหรับ $x,y\in R$ มีสมบัติว่า $z\cdot z_1=1$

ให้
$$z\cdot z_1=1$$

$$(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$$
$$(ax-by,ay+bx)=(1,0)$$
$$ax-by=1 \qquad \text{...........}(1)$$
$$bx+ay=0 \qquad \text{...........}(2)$$

นำ b คูณสมการ (1); $\quad abx-b^2y=b \qquad$ ....(3)

นำ a คูณสมการ (2); $\quad abx+a^2y=0 \qquad$ ....(4)

นำสมการ (3) ลบสมการ (4);

$$\left(abx-b^2y\right)-\left(abx+a^2y\right)=b$$
$$\left(-a^2-b^2\right)y=b$$
$$y=-\frac{b}{a^2+b^2}$$ แทนค่าในสมการ (2)

จากสมการ (2); $\quad bx+a\left(-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)=0$

$$bx=\frac{ab}{a^2+b^2}$$
$$x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

จึงได้ว่า $z_1=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)=v$

นั่นคือ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z จะมี v เพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z\cdot v=1$
ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน $z\neq 0$ ใด ๆ มีจำนวนเชิงซ้อน v เพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z\cdot v=1$

นิยาม 6.2.5 จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ โดยที่ $a,b\in R$ และ $a,b\neq 0$ กำหนดจำนวนเชิงซ้อง

$$z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$ และเรียกว่า z^{-1} ตัวผกผันสำหรับการคูณของ z

จากนิยาม 6.2.5 และทฤษฎีบท 6.2.15 จะได้ว่าสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z จะมีจำนวนเชิงซ้อน z^{-1} เพียงจำนวนเดียวซึ่ง $z\cdot z^{-1}=1=z^{-1}\cdot z$ และเรียก z^{-1} ตัวผกผันสำหรับการคูณของ z สำหรับแต่ละ $z\in C$

ทฤษฎีบท 6.2.16 จำนวนเชิงซ้อน z_1,z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ และ $z_3=(a_3,b_3)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
สำหรับ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 และ b_3 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=(a_1,b_1)\cdot\left[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)\right]$$
$$=(a_1,b_1)(a_2+a_3,b_2+b_3)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_1\left(a_2+a_3\right)-b_1\left(b_2+b_3\right), a_1\left(b_2+b_3\right)+b_1\left(a_2+a_3\right)\right) \\
&= \left(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3, a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3\right) \\
&= \left(\left(a_1a_2-b_1b_2\right)+\left(a_1a_3-b_1b_3\right), \left(a_1b_2+a_2b_1\right)+\left(a_1b_3+a_3b_1\right)\right) \\
&= \left(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1\right)+\left(a_1a_3-b_1b_3, a_1b_3+a_3b_1\right) \\
&= \left(a_1,b_1\right)\cdot\left(a_2,b_2\right)+\left(a_1,b_1\right)\cdot\left(a_3,b_3\right) \\
&= z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ $z_1\cdot\left(z_2+z_3\right)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

ทฤษฎีบท 6.2.17 จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใด ๆ $\left(z_1+z_2\right)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.18 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\left(-z_1\right)\cdot\left(-z_2\right)=z_1\cdot z_2$

พิสูจน์ ให้ $z_1=\left(a_1,b_1\right)$, และ $z_2=\left(a_2,b_2\right)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
สำหรับ a_1, a_2, b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ
พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\left(-z_1\right)\cdot\left(-z_2\right) &= \left(-a_1,-b_1\right)\cdot\left(-a_2,-b_2\right) \\
&= \left(\left(-a_1\right)\left(-a_2\right)-\left(-b_1\right)\left(-b_2\right), \left(-a_1\right)\left(-b_2\right)+\left(-b_1\right)\left(-a_2\right)\right) \\
&= \left(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2\right) \\
&= \left(a_1,b_1\right)\cdot\left(a_2,b_2\right)=z_1\cdot z_2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\left(-z_1\right)\cdot\left(-z_2\right)=z_1\cdot z_2$

ทฤษฎีบท 6.2.19 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\left(-z_1\right)\cdot z_2=-\left(z_1\cdot z_2\right)$
ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.20 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $z\cdot 0=0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

6.3 การลบและการหารจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 6.3.1 ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ กำหนดการดำเนินการลบ (subtraction) และการหาร (division) บนเซตจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

การลบ $z_1-z_2=z_1+\left(-z_2\right)$

การหาร $z_1\div z_2=z_1\cdot z_2^{-1}=\dfrac{z_1}{z_2}$ เมื่อ $z_2\neq 0$

โดยการเกิดของจำนวนลบและตัวผกผันสำหรับการคูณของจำนวนเชิงซ้อน จะเห็นได้ชัดว่าการลบและการหารมีสมบัติปิด คือผลลบและผลหารจะยังคงเป็นจำนวนเชิงซ้อน

ทฤษฎีบท 6.3.1 จำนวนเชิงซ้อน $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ ใด ๆ เมื่อ $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ แล้ว $z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$

พิจารณา
$$\begin{aligned} z_1-z_2 &= z_1+(-z_2) \\ &=(a_1,b_1)+(-a_2,-b_2) \\ &=(a_1-a_2,b_1-b_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)$

ทฤษฎีบท 6.3.2 จำนวนเชิงซ้อน $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ ใด ๆ เมื่อ $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ แล้ว $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

สำหรับ a_1,a_2,b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1\cdot z_2^{-1} \\ &=(a_1,b_1)\cdot\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2},-\frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) \\ &=\left(a_1\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)-b_1\left(-\frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}\right),a_1\left(-\frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)+b_1\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}\right)\right) \\ &=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$

6.4 สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 6.4.1 จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)=a+bi$ สังยุค (conjugate) ของจำนวน z ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\overline{z}$ กำหนดดังนี้ $\overline{z}=\overline{(a,b)}=(a,-b)$

ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{Re}(z)$ แทนส่วนจริง และ $\mathrm{Im}(z)$ แทนส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน z จะได้ว่า $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ และ $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}(z)$

ทฤษฎีบท 6.4.1 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2}&=\overline{(a_1,b_1)+(a_2,b_2)}\\&=\overline{(a_1+a_2,b_1+b_2)}=\left(a_1+a_2,-(b_1+b_2)\right)\\&=(a_1+a_2,-b_1-b_2)=\left(a_1+a_2,-b_1+(-b_2)\right)\\&=(a_1,-b_1)+(a_2,-b_2)\\&=\overline{(a_1,b_1)}+\overline{(a_2,b_2)}\\&=\overline{z}_1+\overline{z}_2\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 จะได้ว่า $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$

ทฤษฎีบท 6.4.2 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.4.3 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\overline{z_1\cdot z_2}&=\overline{(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)}\\&=\overline{(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)}\\&=\left(a_1a_2-b_1b_2,-(a_1b_2+a_2b_1)\right)\\&=(a_1a_2-b_1b_2,-a_1b_2-a_2b_1)\\&=\left(a_1a_2-(-b_1)(-b_2),a_1(-b_2)+(-b_1)a_2\right)\\&=(a_1,-b_1)\cdot(a_2,-b_2)\\&=\overline{(a_1,b_1)}\cdot\overline{(a_2,b_2)}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 จะได้ว่า $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$

ทฤษฎีบท 6.4.4 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ เมื่อ $z_2\neq(0,0)$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}&=\overline{\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)}\\&=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},-\left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

$$= (a_1, -b_1)\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$$

$$= \overline{(a_1,b_1)} \cdot \left[\overline{(a_2,b_2)}\right]^{-1}$$

$$= \overline{z}_1 \cdot (\overline{z}_2)^{-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}_2}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 จะได้ว่า $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq (0,0)$

ทฤษฎีบท 6.4.5 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $\overline{\overline{z}} = z$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.4.6 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $\overline{(-z)} = -\overline{z}$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.4.7 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $2\operatorname{Re}(z) = z + \overline{z}$

พิสูจน์ ให้ $z = (a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a และ b เป็นจำนวนจริง

พิจารณา $$2\operatorname{Re}(z) = 2a$$

$$= (2a, 0)$$

$$= (a+a, b+(-b))$$

$$= (a,b)+(a,-b)$$

$$= (a,b)+\overline{(a,b)} = z+\overline{z}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $2\operatorname{Re}(z) = z + \overline{z}$

ทฤษฎีบท 6.4.8 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $2\operatorname{Im}(z)i = z - \overline{z}$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

6.5 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 6.5.1 จำนวนเชิงซ้อน $z = (a,b) = a + bi$ สำหรับจำนวนจริง a และ b ค่าสัมบูรณ์ (absolute value หรือ modulus) ของจำนวนเชิงซ้อนใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|z|$ กำหนดดังนี้ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

ทฤษฎีบท 6.5.1 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
z\cdot\overline{z} &= (a,b)\cdot\overline{(a,b)} \\
&= (a,b)(a,-b) \\
&= (aa-b(-b),a(-b)+ba) \\
&= (a^2+b^2,0) \\
&= a^2+b^2 \\
&= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=|z|^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

ทฤษฎีบท 6.5.2 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $|-z|=|z|$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สำหรับ $a,b\in R$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|-z| &= |(-a,-b)| \\
&= |-a+(-b)i| \\
&= \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} \\
&= \sqrt{a^2+b^2} \\
&= |z|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $|-z|=|z|$

ทฤษฎีบท 6.5.3 จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ $|\overline{z}|=|z|$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.5.4 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)| \\
&= |(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)| \\
&= |(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)| \\
&= \sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{(a_1a_2)^2-2(a_1a_2)(b_1b_2)+(b_1b_2)^2+(a_1b_2)^2+2(a_1b_2)(a_2b_1)+(a_2b_1)^2} \\
&= \sqrt{a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2} \\
&= \sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)}\cdot\sqrt{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \\
&= |z_1|\cdot|z_2|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

ทฤษฎีบท 6.5.5 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq (0,0)$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$ และ $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|z_1 \cdot z_2^{-1}\right| \\
&= \left|(a_1, b_1)\cdot\left(\frac{a_2}{a_2^2+b_2^2}, -\frac{b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}, \frac{-a_1b_2+a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}\right)\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)^2 + \left(\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2 + \left(a_2b_1-a_1b_2\right)^2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(a_1a_2\right)^2 + 2\left(a_1a_2\right)\left(b_1b_2\right) + \left(b_1b_2\right)^2 + \left(a_2b_1\right)^2 - 2\left(a_2b_1\right)\left(a_1b_2\right) + \left(a_1b_2\right)^2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\left(a_1a_2\right)^2 + \left(b_1b_2\right)^2 + \left(a_2b_1\right)^2 + \left(a_1b_2\right)^2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_2^2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a_1^2\left(a_2^2+b_2^2\right) + b_1^2\left(b_2^2+a_2^2\right)}{\left(a_2^2+b_2^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_2^2+b_2^2}} = \frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

ทฤษฎีบท 6.5.6 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\cdot\overline{z}_2+z_2\cdot\overline{z}_1$$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.5.7 จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

พิสูจน์ ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณา
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\cdot\overline{z}_2+z_2\cdot\overline{z}_1\\&=|z_1|^2+(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2)+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2\\&\le|z_1|^2+2(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2|z_1||\overline{z}_2|+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

6.6 จำนวนเชิงซ้อน i

นิยาม 6.6.1 เขียนจำนวนเชิงซ้อน $(a,0)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ a และเขียนจำนวนเชิงซ้อน $(0,1)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ i

ทฤษฎีบท 6.6.1 จำนวนเชิงซ้อน i และ $-i$ คือรากของสมการ $x^2=-1$

พิสูจน์ จาก
$$\begin{aligned}i^2&=i\cdot i\\&=(0,1)\cdot(0,1)\\&=(0\cdot0-1\cdot1,0\cdot1+1\cdot0)\\&=(-1,0)\\&=-1\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}(-i)^2&=(-i)\cdot(-i)\\&=(0,-1)\cdot(0,-1)\\&=(0\cdot0-(-1)(-1),0(-1)+(-1)0)\\&=(-1,0)\\&=-1\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน i และ $-i$ คือรากของสมการ $x^2=-1$

ทฤษฎีบท 6.6.2 จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ สามารถเขียนในรูป $a+bi$ ได้เพียงแบบเดียวสำหรับ a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

พิสูจน์ ให้ จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ สำหรับ $a,b\in R$

โดยที่
$$\begin{aligned}(a,b)&=(a,0)+(0,b)\\&=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\\&=a+bi\end{aligned}$$

ให้ $z=(a,b)$ สามารถเขียนรูป $z=c+di$ อีกหนึ่งแบบ โดยที่ $c,d\in R$
$$\begin{aligned}c+di&=(c,0)+(d,0)\cdot(0,1)\\&=(c,0)+(0,d)\\&=(c,d)\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $(a,b)=z=(c,d)$

นั่นคือ $a=c$ และ $b=d$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ สามารถเขียนในรูป $a+bi$ ได้เพียงแบบเดียว

จาก $z=(a,b)=a+bi$ เรียก a ว่าส่วนจริง ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{Re}(z)$ สำหรับ b เรียกว่าส่วนจินตภาพ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{Im}(z)$ และเรียก i ว่าหน่วยจินตภาพ (imaginary unit) ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ จึงสามารถเขียนในรูป
$$z=(a,b)=a+bi=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)i$$

6.7 ระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

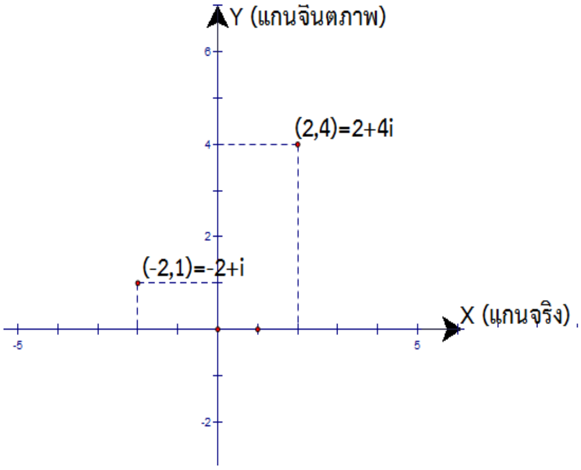
จำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ พบว่าคู่อันอับ $(a,b)=(\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z))$ ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยจุด ๆ หนึ่งในระนาบ R^2 กล่าวคือ ทุก ๆ จำนวนเชิงซ้อนซึ่งแทนด้วยคู่อันดับ (a,b) จะสมนัยกับจุด (a,b) เพียงจุดเดียวบนระนาบ XY ในระบบพิกัดฉาก

จุดกำเนิด $(0,0)$ ในบนระนาบ XY ในระบบพิกัดฉาก แทนจำนวนเชิงซ้อน $0+0i$

จุดทุกจุดบนแกน X มีพิกัดคือ $(x,0)$ และสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน $x+0i=x$ เรียกแกน X นี้ว่าแกนจริง

จุดทุกจุดบนแกน Y มีพิกัดคือ $(0,y)$ และสมนัยกับจำนวนเชิงซ้อน $0+yi=yi$ เรียกแกน Y นี้ว่าแกนจินตภาพ

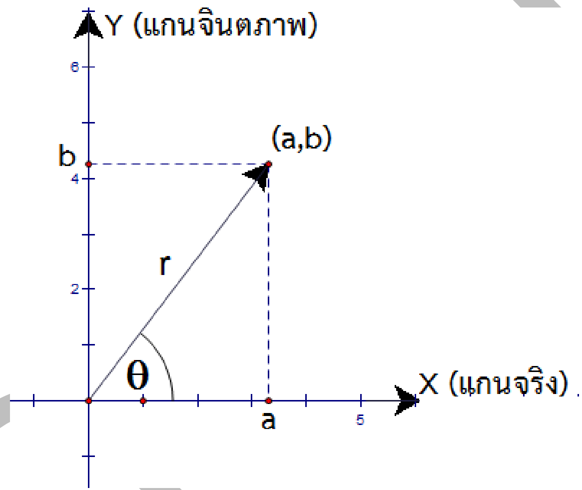
เรียกระนาบ XY ว่าระนาบเชิงซ้อน ดังภาพที่ 6.7.1



ภาพที่ 6.7.1 ระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดฉาก

6.8 ระนาบเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดจุด (a,b) บนระนาบและแทนจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ ดังภาพที่ 6.8.1



ภาพที่ 6.8.1 จุด (a,b) แทนจำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$

จากภาพ 6.8.1พิกัดจุด (a,b) เป็นระบบพิกัดฉากสามารถแปลงเป็นพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) ได้ดังนี้ ให้ $r=\sqrt{a^2+b^2}$ และ $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ แปลงกลับ $a=r\cos\theta$ และ $b=r\sin\theta$
จาก $z=a+bi$ แทนค่า $z=a+bi=r\cos\theta+r\sin\theta i$ หรือ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

นิยาม 6.8.1 จำนวนเชิงซ้อน z ที่เขียนในรูป $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว โดยที่ r คือ ค่าสัมบูรณ์ หรือมอดูลัส ของ z และ เรียกมุม θ ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z ใช้สัญลักษณ์ $\theta=\arg(z)$

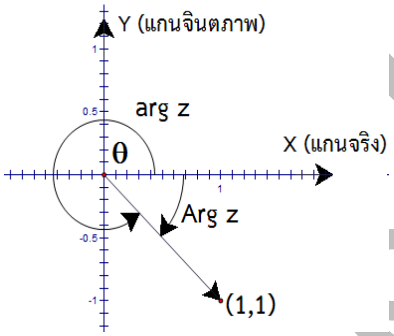
นิยาม 6.8.2 ค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ ของจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ (principal value of arg z) ยกเว้นศูนย์ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $Arg(z)$ หมายถึงค่าของ $\arg(z)$ เพียงค่าเดียวซึ่ง $-\pi < \arg(z) < \pi$

ตัวอย่าง 6.8.1 ให้ $z = 1 - i$ จงเขียนในรูปพิกัดเชิงขั้ว หาค่า $\arg(z)$ และ $Arg(z)$

วิธีทำ จาก $z = 1 + i$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\tan\theta = \dfrac{1}{1} = 1$ พิจารณาภาพ



จากภาพ $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$

ดังนั้น $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$ หรือ $z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi\right)\right]$

$\arg(z) = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi$ และ $Arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$

6.9 ทฤษฎีบทของเดอร์มัว

ทฤษฎีบท 6.9.1 จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

พิจารณา
$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \left[r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\right]\cdot\left[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\right]\left[(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 i\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1 i\sin\theta_2\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1 i\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right] \\
&= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$

ทฤษฎีบท 6.9.2 จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)} \\
&= \frac{r_1\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{r_2(1)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]
\end{aligned}$$

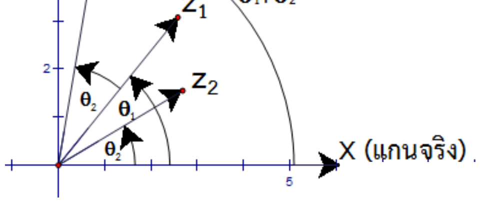
ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

ข้อสังเกต

1. จาก

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \\
|z_1 \cdot z_2| &= |r_1 \cdot r_2|\left|\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right| \\
&= r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}$$

จะได้ $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ดังภาพที่ 6.9.1



ภาพที่ 6.9.1 $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

จะเห็นว่า ความยาวของรังสี $z_1 \cdot z_2$ จะเท่ากับผลบวกของความยาวของรังสี z_1 บวกกับความยาวของรังสี z_2 และมุมที่รังสี $z_1 \cdot z_2$ ทำกับแกน X จะเท่ากับผลบวกของมุมที่ z_1 และ z_2 ทำกับแกน X นอกจากนี้การเท่ากันของ $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ หมายถึง กรณีที่บวกด้วย $2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มด้วย ดังนั้น $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$

2. จาก $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

พิจารณา $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]\right|$$

จะได้ $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \frac{|r_1|}{|r_2|}$$

และ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

ทฤษฎีบท 6.9.3 จำนวนเชิงซ้อน $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 1 ถ้า $n = 0$

พิจารณา $z^0 = r^0(\cos(0\theta) + i\sin(0\theta))$

จาก $z^0 = 1$ และ $r^0(\cos(0\theta) + i\sin(0\theta)) = 1(1 + i(0)) = 1$

จึงได้ว่า $z^0 = r^0(\cos(0\theta) + i\sin(0\theta))$

ดังนั้น ถ้า $n = 0$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

กรณีที่ 2 ถ้า $n > 0$ จะแสดงโดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

1. เมื่อ $n = 1$

พิจารณา $z^1 = r^1(\cos(1)\theta + i\sin(1)\theta)$

จึงได้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ดังนั้น ถ้า $n = 1$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ เป็นจริง

2. ให้ $n = k$ เป็นจริง นั่นคือ $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$

จะแสดงว่า $n = k+1$ เป็นจริง ต้องแสดงว่า $z^{k+1} = r^{k+1}\left[\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\right]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= \left[r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\right] \cdot \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right] \\ &= (r^k \cdot r)\left[(\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\right] \\ &= r^{k+1}\left[\cos k\theta\cos\theta + \cos k\theta i\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i\sin k\theta i\sin\theta\right] \end{aligned}$$

$$= r^{k+1}\left[\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i\left(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta\right)\right]$$
$$= r^{k+1}\left[\cos\left(k\theta+\theta\right) + i\sin\left(k\theta+\theta\right)\right]$$
$$= r^{k+1}\left[\cos\left(k+1\right)\theta + i\sin\left(k+1\right)\theta\right]$$

ดังนั้นที่ $n = k+1$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า $n > 0$ แล้ว $z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$ เป็นจริง

กรณีที่ 3 ถ้า $n < 0$

พิจารณา $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$

$$= \frac{1}{r^{-n}\left[\cos\left(-n\theta\right) + i\sin\left(-n\theta\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{r^{-n}\left[\cos\left(-n\theta\right) + i\sin\left(-n\theta\right)\right]}\cdot\frac{\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}{\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}$$
$$= \frac{r^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}{\left[\cos\left(n\theta\right) - i\sin\left(n\theta\right)\right]\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}$$
$$= \frac{r^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}{\cos^2\left(n\theta\right) + \sin^2\left(n\theta\right)} = \frac{r^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]}{1}$$
$$= r^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right]$$

ดังนั้น $z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$

จากกรณีที่ 1 กรณีที่ 2 และกรณีที่ 3 จึงได้ว่า ทุกจำนวนเชิงซ้อน $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มแล้ว $z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$

ทฤษฎีบท 6.9.4 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ เรียกสมการนี้ว่า สูตรของเดอโมวีร์ (De Moivre's formula)

พิสูจน์ ให้ $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

ถ้า $r = 1$ จะได้ว่า $z = 1\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

พิจารณา $z^n = 1^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$

$$= 1\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

ดังนั้น $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

ทฤษฎีบท 6.9.5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ แล้ว $z^{-n} = r^{-n}\left[\cos\left(-n\theta\right) + i\sin\left(-n\theta\right)\right]$

พิสูจน์ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

พิจารณา
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$
$$\left(\frac{1}{z}\right)^n = \left(\frac{1}{r}\right)^n\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$$
$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$$
$$z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$$

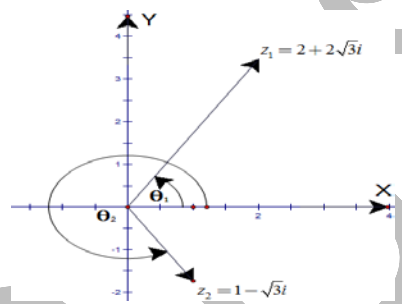
ดังนั้น $z^{-n} = r^{-n}\left[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\right]$

ตัวอย่าง 6.9.1 จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ และ $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ จงหา $z_1 \cdot z_2$ และ $\dfrac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ จาก $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$

จึงได้ $r_1 = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

พิจารณากราฟ



และ $\tan\theta_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ จึงได้ว่า $\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$

จาก $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

จึงได้ $r_2 = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

จากรูป $\theta_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

จาก
$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \\
&= (4)(2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right)\right] \\
&= 8\left[\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right] \\
&= 8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) \\
&= 8(1 + i(0)) = 8
\end{aligned}$$

ดังนั้น $z_1 \cdot z_2 = 8$

จาก
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$
$$= \left(\frac{4}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

ดังนั้น $\dfrac{z_1}{z_2} = -1 + \sqrt{3}i$

6.10 การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 6.10.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w^n = z$ จะกล่าวว่า w เป็นรากที่ n ของ z

ทฤษฎีบท 6.10.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้วรากที่ n ของ z คือจำนวนเชิงซ้อน $w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

พิสูจน์ จำนวนเชิงซ้อน $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ใด ๆให้ w เป็นรากที่ n ของ z นั่นคือ $w^n = z$

ถ้า $z \neq 0$ ให้ $w = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ โดย r_0 และ θ_0 ยังไม่ทราบค่า

จาก
$$w^n = z$$
$$\left[r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)\right]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$r_0^n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0) = r(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

นั่นคือ
$$r_0^n = r$$
$$r_0 = \sqrt[n]{r}$$

และ
$$n\theta_0 = \theta + 2k\pi \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

จึงได้ว่า
$$w = \sqrt[n]{z}$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

ถ้า $z = 0$ รากที่ n ของ z คือ $w = 0$

ตัวอย่าง 6.10.1 จงหารากที่ 4 ของจำนวนเชิงซ้อน $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

วิธีทำ จาก $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ เปลี่ยนเป็นเชิงขั้ว

จาก $r = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$\tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ แล้ว $\theta = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$ จะได้รากทั้ง 4 ดังนี้

เมื่อ $k = 0;$ ได้ $$w_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(0)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(0)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k = 1;$ ได้ $$w_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(1)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(1)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k = 2;$ ได้ $$w_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(2)\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2(2)\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k=3$; ได้ $$w_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(3)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2(3)\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right]$$

6.11 สรุป

1. เซตจำนวนเชิงซ้อนกำหนดโดย $C=\{(a,b)\mid a\in R \text{ และ } b\in R\}$ กำหนดให้ $z\in C$ และ $a,b\in R$ สามารถเขียน z ในรูป $z=(a,b)$ หรือ $z=a+bi$

เรียก a ว่าส่วนจริง ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\operatorname{Re}(z)$

b ว่าส่วนจินตภาพ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\operatorname{Im}(z)$

i มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$ หรือ i^2 มีค่าเท่ากับ -1

2. การบวก การคูณ การลบ และการหารจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน $z_1=(a_1,b_1), z_2=(a_2,b_2)$ และ $z_3=(a_3,b_3)$ โดยที่ $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in R$

2.1 การเท่ากัน; $z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$

2.2 การบวก ; $z_1+z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

2.3 การลบ ; $z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)$

2.4 การคูณ; $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1)$

2.5 การหาร ; $\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)$

3. สมบัติการบวกของจำนวนเชิงซ้อน ให้ z_1,z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

3.1 การปิด; $z_1,z_2\in C$ แล้ว $z_1+z_2\in C$

3.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว; z_1+z_2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

3.3 การเปลี่ยนหมู่; $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

3.4 การสลับที่; $z_1+z_2=z_2+z_1$

3.5 การมีเอกลักษณ์; สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ มี 0 และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+0=z$ เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

3.6 การมีตัวผกผัน; สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน $-z$ และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z+(-z)=0$ เรียก $-z$ ว่าตัวผกผันสำหรับการบวกของ z

3.7 การตัดออก; ถ้า $z_1=z_3$ และ $z_2=z_3$ แล้ว $z_1=z_2$

4. สมบัติการคูณจำนวนเชิงซ้อน ให้ z_1,z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

4.1 การปิด; $z_1,z_2\in C$ แล้ว $z_1\cdot z_2\in C$

4.2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว; $z_1 z_2$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

4.3 การเปลี่ยนหมู่; $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

4.4 การสลับที่; $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

4.5 การมีเอกลักษณ์; สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ มี 1 และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z \cdot 1 = z$ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก

4.6 การมีตัวผกผัน; สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ จะมีจำนวนเชิงซ้อน $\dfrac{1}{z}$ หรือ z^{-1} และมีเพียงจำนวนเดียวซึ่งทำให้ $z \cdot z^{-1} = 1$ เรียก z^{-1} ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ z

4.7 การแจกแจง ; $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

5. สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ แล้วสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน z คือ $\overline{z} = (a, -b)$

6. สมบัติสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

6.1 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

6.2 $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

6.3 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

6.4 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

6.5 $\overline{\overline{z}}_1 = z_1$

6.6 $\overline{(-z_1)} = -\overline{z}_1$

6.7 $2\operatorname{Re}(z_1) = z_1 + \overline{z}_1$

6.8 $2\operatorname{Im}(z_1)i = z_1 - \overline{z}_1$

7. จำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ ค่าสัมบูรณ์ของ z คือ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

8. สมบัติของค่าสัมบูรณ์ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใด ๆ

8.1 $z_1 \cdot \overline{z}_1 = |z_1|^2$

8.2 $|-z_1| = |z_1|$

8.3 $|\overline{z}_1| = |z_1|$

8.4 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

8.5 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ เมื่อ $z_2 \neq (0, 0)$

8.6 $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1$

8.7 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

9. จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้ว ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สามารถแปลงจำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้วได้ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ โดยที่ r คือค่าสัมบูรณ์ของ z และ เรียกมุม θ ว่าอาร์กิวเมนต์ของ z ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\arg(z)$ และค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ของ z ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $Arg(z)$ หมายถึงค่าของ $\arg(z)$ เพียงค่าเดียวซึ่ง $-\pi < \arg(z) < \pi$

10. ทฤษฎีบทของเดอร์มัว ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

10.1 $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$

10.2 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$

10.3 $z_1^n = r_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)$

10.4 $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)^n = \cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1$

10.5 $z_1^{-n} = r_1^{-n}\left[\cos(-n\theta_1) + i\sin(-n\theta_1)\right]$

11. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $n \in Z^+$ จำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w^n = z$ จะกล่าวว่า w เป็นรากที่ n ของ z โดยที่ $w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

แบบฝึกหัด 6

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.2 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $z_1 + z_2$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.4 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.9 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $-(z_1 + z_2) = (-z_1) + (-z_2)$
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.10 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.11 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $z_1 \cdot z_2$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว
6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.13 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.17 สำหรับ $z_1, z_2, z_3 \in C$ จะได้ว่า $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$
8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.19 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $(-z_1) \cdot z_2 = -(z_1 \cdot z_2)$
9. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.20 สำหรับ $z \in C$ จะได้ว่า $z \cdot 0 = 0$
10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.2 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$
11. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.5 สำหรับ $z \in C$ จะได้ว่า $\overline{\overline{z}} = z$
12. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.6 สำหรับ $z \in C$ จะได้ว่า $\overline{(-z)} = -\overline{z}$
13. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.8 สำหรับ $z \in C$ จะได้ว่า $2\,\mathrm{Im}(z)i = z - \overline{z}$
14. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.5.3 สำหรับ $z \in C$ จะได้ว่า $|\overline{z}| = |z|$
15. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.5.6 สำหรับ $z_1, z_2 \in C$ จะได้ว่า $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z}_2 + z_2 \cdot \overline{z}_1$
16. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $z = -3 + 3i$ ในรูปเชิงขั้ว
17. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ ในรูปเชิงขั้ว
18. กำหนดให้ $z_1 = 5\left(\cos\frac{17\pi}{18} + i\sin\frac{17\pi}{18}\right), z_2 = 9\left(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}\right)$ จงหา $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ และ $(z_1)^2$
19. จงหารากที่ 4 ของจำนวนเชิงซ้อน $z = 4 + 4i$

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ก่อสุข วีระถาวร. (2549). **ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

กัลยาณี ไชยวรินทรกุล. (2530). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. (2552). **ทฤษฎีจำนวน**. กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์.

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง. (2535). **แนวคิดหลักมูลทางคณิตศาสตร์ 2**. กรุงเทพฯ:รุ่งศิลป์การพิมพ์

รัตนพร บ่อคำ. (2551). **ประวัติของจำนวนและตัวเลข.** วารสารวิทยาศาสตร์. 9(1-2); 42 – 50.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2553). **พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.** กรุงเทพ ฯ: นานมีบุ๊คส์พับลิเคชั่นส์.

วสันต์ จินดารัตนาภรณ์. (2542). **ระบบจำนวน**. เชียงใหม่ :สถาบันราชภัฏเชียงใหม่.

สมสวาท สุดสาคร. (2533). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ :มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. (2536). **ระบบจำนวน.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ :จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สุนทรี ศาสตรสาระ. (ม.ป.ป.). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ :วิทยาลัยครูสวนสุนันทา.

สุภา สุจริตพงศ์. (2523). **โครงสร้างของระบบจำนวน.** กรุงเทพฯ :จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อำพล ธรรมเจริญ. (2550). **ระบบจำนวน.** กรุงเทพฯ :พิทักษ์การพิมพ์.

Ahlfors,L V. (1981). **Complex Analysis.** New York :Mc Graw-Hill book Company.

Apostol, T M. (1973). **Mathematical Analysis.** Reading Massachusetts :Addison-Wesley Publishing Company.

Asmar, N H. (2002). **Applied Complex Analysis with Particle Differential Equations.** New Jersey: Prentice Hall.

Churchill, R.V. (1976). **Complex Variables and Applications.** Tokyo,Japan :Tosho Printing Co.

Cohen,L W. & Ehrlich, G. (1977). **The Structure of the Real Number System.** New York :Robert E. Krieger Publishing Company.

Duncan, J. (1968). **The Element of Complex Analysis.** New York :John Wiley&Sons.

Goffman, C. (1957). **Real Function.** New York: Rinehart&Company. Incorporated.

Hayes, Charles A. Jr. (1964). **Concept of Real Analysis.** New York: John Wiley&Sons.

Larsen, M D. (1970). **Fundamental Concept of Modern Mathematics.** New York: Addison-Wesley.

McFarland, D. (1968). **Introduction to modern mathematics.** Massachusetts: D.C. Heath and Company.

Parker,F.D. (1966). **The structure of number systems.** Englewood Cliffs, New Jersey :Prentice Hll.

Rudin,W. (1964). **Principles of Mathematical Analysis.** New York: Mc Graw-Hill.

Saff, E.B. (2003). **Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science.** New Jersey: Prentice Hall.

Spooner, G A. & Mentzer, R L. (1968). **Introduction to Number Systems.** New Jersey :Prentice- Hell.

Thurston, H.A. (1956). **The Number System.** New York :Dover.

Wilder, G.E. (1972). **The Structure of Mathematics.** Lexington, Massachusetts, Xerox College Publishing Company.

Youse, B K. (1965). **The Number System.** California :Dickenson Publishing Company.

ดัชนี

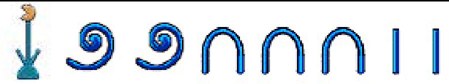
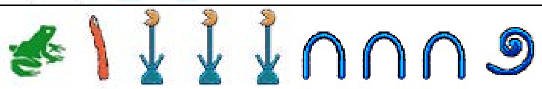
ดัชนี

ดัชนี (ต่อ)

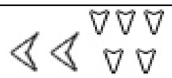
ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกหัด 1

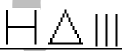
1. จงเปลี่ยนตัวเลขอียิปต์โบราณที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลข เลขฮินดูอารบิค

	ตัวเลขอียิปต์โบราณ	เลข ฮินดู – อารบิค
1.1		1232
1.2		22300
1.2		113130

2. จงเปลี่ยนตัวเลขบาบิโลเนียที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลขฮินดูอารบิค

	ตัวเลขบาบิโลเนีย	เลขฮินดู – อารบิค
2.1		25
2.2		149
2.3		213

3. จงเปลี่ยนตัวเลขกรีกโบราณที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลขฮินดูอารบิค

	เลขกรีกโบราณ	เลขฮินดูอารบิค
3.1		113
3.2		1156
3.3		15059

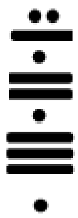
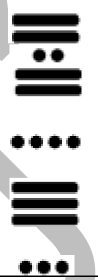
4. จงเปลี่ยนตัวเลขโรมันที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลขฮินดูอารบิค

	เลขโรมัน	เลขฮินดูอารบิค
4.1	XXVII	27
4.2	CLII	152
4.3	CMLVII	957

5. จงเปลี่ยนตัวเลขไอโอนิกกรีกที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลข ฮินดู – อารบิค

	เลขไอโอนิกกรีก	เลขฮินดูอารบิค
5.1	TZB	309
5.2	ΦΛΜ	570
5.3	ΩΚθ	829

6. จงเปลี่ยนตัวเลขมายันที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลขฮินดูอารบิค

6.1		6.2		6.3	
ตัวเลขมายัน	เลขฮินดูอารบิค	ตัวเลขมายัน	เลขฮินดูอารบิค	ตัวเลขมายัน	เลขฮินดูอารบิค
	49422		54681		1.53×10^{6}

7. จงเปลี่ยนตัวเลขจีนที่กำหนดให้ข้างล่างนี้ด้วยเลขฮินดูอารบิค

7.1		7.2		7.3	
เลขจีน	เลขฮินดูอารบิค	เลขจีน	เลขฮินดูอารบิค	เลขจีน	เลขฮินดูอารบิค
二百三十九	239	二千十三	2013	二千五百五十六	2556

8. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

8.1 $2+4+6+...+2n=n(n+1)$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ สำหรับ $n\in N$

1. พิจารณา $P(1)$ แทน $n=1$ จะได้

$$2=1(1+1)$$

$$2=2$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $2+4+6+...+2k=k(k+1)$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $2+4+6+...+2k+2(k+1)=(k+1)[(k+1)+1]$

$$\begin{aligned}2+4+6+...+2k+2(k+1)&=2+4+6+...+2k+2k+2\\&=(2+4+6+...+2k)+2k+2\\&=k(k+1)+2(k+1)\\&=(k+1)(k+2)\\&=(k+1)[(k+1)+1]\end{aligned}$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $n\in N$

8.2 $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

1. พิจารณา $P(1)$ แทน $n=1$ จะได้

$$1=\frac{1}{2}(1)[(1)+1]$$

$$1=1$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $1+2+3+...+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$

พิจารณา $1+2+3+\ldots+k+k+1=(1+2+3+\ldots+k)+k+1$

$$=\left[\frac{1}{2}k(k+1)\right]+k+1$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $n\in N$

8.3 $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

1. พิจารณา $P(1)$ แทน $n=1$ จะได้

$$[2(1)-1]^3=(1)^2\left[2(1)^2-1\right]$$

$$1=1$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+[2(k+1)-1]^3=(k+1)^2\left[2(k+1)^2-1\right]$

พิจารณา $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3+[2(k+1)-1]^3=k^2(2k^2-1)+[2(k+1)-1]^3$

$$=2k^4-k^2+(2k+1)^3$$

$$=2k^4-k^2+8k^3+12k^2+6k+1$$

$$=(k^2+2k+1)(2k^2+4k+1)$$

$$=(k+1)^2\left[2(k^2+2k+1)-1\right]$$

$$=(k+1)^2\left[2(k+1)^2-1\right]$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $n\in N$

8.4 $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2$

1. พิจารณา $P(1)$ แทน $n=1$ จะได้

$$(1)^3=\frac{1}{4}\left[1(1+1)\right]^2$$

$$1=1$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{1}{4}\left[k(k+1)\right]^2$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}\left\{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\right\}^2$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3 &= \frac{1}{4}\left[k(k+1)\right]^2+(k+1)^3 \\
&= \frac{\left[k(k+1)\right]^2+4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4} \\
&= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(k+1)(k+2)\right]^2 \\
&= \frac{1}{4}\left\{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\right\}^2
\end{aligned}$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $n\in N$

8.5 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

1. พิจารณา $P(1)$ แทน $n=1$ จะได้

$$(1)(1+1)=\frac{1}{3}(1)(1+1)(1+2)$$

$$2=2$$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. สมมติ $P(k)$ เป็นจริงซึ่งจะได้ว่า$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยแสดงว่า

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\\&=\frac{[(k+1)(k+2)](k+3)}{3}\\&=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]\end{aligned}$$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น ข้อความ $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ เป็นจริงเสมอสำหรับ $n\in N$

เฉลยแบบฝึกหัด 2

1. ทฤษฎีบท 2.4.2 สำหรับ $m,n \in N$ จะได้ว่า $m \times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใดๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง

$S = \{n \in N \mid m \times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว $\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m \times 1$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิจารณา $m \times 1 = m$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนธรรมชาติ และมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ $m \times 1$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $m \times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $m \times n^*$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิจารณา $m \times n^* = m \times n + m$

ผลบวกของจำนวนธรรมชาติมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

จึงได้ว่า $m \times n + m$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ $m \times n^*$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น $n^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ $m \times n$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

2. ทฤษฎีบท 2.4.6 สำหรับ $m,n \in N$ จะได้ว่า $m \times n = n \times m$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m ใดๆ ให้ $S \subseteq N$ ซึ่ง $S = \{n \mid m \times n = n \times m\}$

1. ต้องการ $1 \in S$ ต้องแสดงว่า $m \times 1 = 1 \times m$

จากทฤษฎีบท 2.4.4 $m \times 1 = 1 \times m$

ดังนั้น $1 \in S$

2. ให้ $n \in S$ ดังนั้น $m \times n = n \times m$ ต้องการ $n^* \in S$ ต้องแสดงว่า $m \times n^* = n^* \times m$

พิจารณา
$$\begin{aligned} m \times n^* &= (m \times n) + m \\ &= (n \times m) + m \\ &= (n^* \times m) \end{aligned}$$

ดังนั้น $m^* \in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S = N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ $m \times n = n \times m$

3. ทฤษฎีบท 2.4.8 สำหรับ $m,n,p\in N;$ จะได้ว่า $m\times(n\times p)=(m\times n)\times p$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ ให้ $S\subseteq N$ ซึ่ง

$$S=\{p\in N \mid m\times(n\times p)=(m\times n)\times p\}$$

1. ต้องการ $1\in S$ ต้องแสดงว่า $m\times(n\times 1)=(m\times n)\times 1$

พิจารณา $$m\times(n\times 1)=m\times n$$
$$=(m\times n)\times 1$$

ดังนั้น $1\in S$

2. ให้ $p\in S$ ดังนั้น $m\times(n\times p)=(m\times n)\times p$

ต้องการ $p^*\in S$ ต้องแสดงว่า $m\times(n\times p^*)=(m\times n)\times p^*$

พิจารณา $$m\times(n\times p^*)=m\times(n\times p+n)$$
$$=(m\times n\times p)+(m\times n)$$
$$=(m\times n)\times p^*$$

ดังนั้น $p^*\in S$

โดยสัจพจน์ข้อ 5 ได้ว่า $S=N$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใดๆ $m\times(n\times p)=(m\times n)\times p$

4. ทฤษฎีบท 2.5.3 สำหรับ $m,n,p\in N$ ถ้า $m<n$ แล้ว $m\times p<n\times p$

พิสูจน์ สำหรับ m,n และ p ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ กำหนดให้ $m<n$

ต้องการ $m\times p<n\times p$ ต้องแสดงว่า $(m\times p)$+จำนวนธรรมชาติ$=n\times p$

ให้ $m<n$ จากนิยาม 2.5.1 ต้องมีจำนวนธรรมชาติ a ซึ่งทำให้

$$m+a=n$$

สำหรับจำนวนธรรมชาติ p ใดๆ $$(m+a)\times p=n\times p$$
$$(m\times p)+(a\times p)=n\times p$$

เนื่องจาก $(a\times p)\in N$; $$m\times p<n\times p$$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ m,n และ p ใดๆ ถ้า $m<n$ แล้ว $m\times p<n\times p$

5. ทฤษฎีบท 2.5.6 ตอนที่ 1 กรณีที่ 1.3

พิสูจน์ กรณีที่ 1.3 สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ

สมมติว่า m และ n สอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2 และ 3 คือ $m>n$ และ $m<n$

จาก $m>n$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ p

ซึ่งทำให้ $$m=n+p \qquad \text{............}(1)$$

และ $m<n$ โดยนิยามจะมีจำนวนธรรมชาติ q

ซึ่งทำให้ $n = m + q$ ....(2)

แทนค่า $n = m + q$ ในสมการ (1);

$$m = (m+q) + p$$
$$m = m + (q+p)$$
$$m^* = [m + (q+p)]^*$$
$$m^* = m + (q+p)^*$$
$$m + 1 = m + (q+p)^*$$
$$1 = (q+p)^*$$

จึงได้ว่า 1 เป็นพจน์ตามหลังของจำนวนธรรมชาติ $(q+p)$ โดยสัจพจน์ข้อ 3 เป็นไปไม่ได้ ดังนั้น สำหรับจำนวนธรรมชาติ m และ n ใดๆ จะสอดคล้องสมบัติไตรวิภาคข้อ 2 และ 3 พร้อมกันไม่ได้

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

1. ทฤษฎีบท 3.1.4 สำหรับจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ $(p,p)\sim(q,q)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ

เนื่องจาก $\quad p+q=p+q$

โดยนิยาม 3.1.1 $\quad (p,p)\sim(q,q)$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ $(p,p)\sim(q,q)$

2. ทฤษฎีบท 3.1.5 สำหรับจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ $(p+q,q)\sim(p^*,1)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ

เนื่องจาก $\quad p+q=p+q$

สมบัติการสลับ $\quad p+q=q+p$

สัจพจน์ข้อ 4 $\quad (p+q)^*=(q+p)^*$

นิยาม 2. $\quad (p+q)+1=q+p^*$

โดยนิยาม 3.1.1 $\quad (p+q,q)\sim(p^*,1)$

ดังนั้น ทุกจำนวนธรรมชาติ p และ q ใดๆ $(p+q,q)\sim(p^*,1)$

3. ทฤษฎีบท 3.2.3 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a+b$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ m,n,p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิจารณา $\quad a+b=[m,n]+[p,q]$

$\quad =[m+p,n+q]$

เนื่องจาก $m+p$ และ $n+q$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

จึงได้ว่า $[m+p,n+q]$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a+b$ เป็นจำนวนเต็ม

4. ทฤษฎีบท 3.2.11 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม

พิสูจน์สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ m,n,p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิจารณา $\quad a\cdot b=[m,n]\cdot[p,q]$

$\quad =[m\cdot p+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot p]$

เนื่องจากจำนวนธรรมชาติสอดคล้องสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ

จึงได้ $m\cdot p+n\cdot q$ และ $m\cdot q+n\cdot p$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทำให้ $[m\cdot p+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot p]$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม

5. ทฤษฎีบท 3.2.12 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a\cdot b$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว

พิสูจน์สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ โดยที่ m,n,p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิจารณา

$$\begin{aligned} a\cdot b &= [m,n]\cdot[p,q] \\ &= [m\cdot p+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot p] \end{aligned}$$

เนื่องจากผลบวกและผลคูณจำนวนธรรมชาติมีผลลัพธ์จำนวนเดียว

จึงได้ $m\cdot p+n\cdot q$ และ $m\cdot q+n\cdot p$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว

ทำให้ $[m\cdot p+n\cdot q, m\cdot q+n\cdot p]$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a\cdot b$ มีผลลัพธ์จำนวนเดียว

6. ทฤษฎีบท 3.2.17 สำหรับจำนวนเต็ม $a,b,c\in Z$ ถ้า $a\cdot b=c\cdot b$ และ $b\in Z^-$ แล้ว $a=c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ให้ $a=[m,n], b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ โดยที่ m,n,p,q,r และ s เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

กรณีที่ 2 ถ้า $b\in Z^-$ โดยนิยาม จะมี $y\in N$ ซึ่งทำให้ $b=[p,p+y]$

ให้

$$\begin{aligned} a\cdot b &= c\cdot b \\ [m,n][p,p+y] &= [r,s][p,p+y] \\ [m\cdot p+n\cdot(p+y), m\cdot(p+y)+n\cdot p] &= [r\cdot p+s\cdot(p+y), r\cdot(p+y)+s\cdot p] \\ [m\cdot p+n\cdot p+n\cdot y, m\cdot p+m\cdot y+n\cdot p] &= [r\cdot p+s\cdot p+s\cdot y, r\cdot p+r\cdot y+s\cdot p] \\ (m\cdot p+n\cdot p+n\cdot y)+(r\cdot p+r\cdot y+s\cdot p) &= (m\cdot p+m\cdot y+n\cdot p)+(r\cdot p+s\cdot p+s\cdot y) \\ n\cdot y+r\cdot y &= m\cdot y+s\cdot y \\ (n+r)\cdot y &= (m+s)\cdot y \\ n+r &= m+s \\ m+s &= n+r \\ [m,s] &= [r,s] \\ a &= c \end{aligned}$$

7. ทฤษฎีบท 3.2.18 สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $a=b$ แล้ว $a\cdot c=b\cdot c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ

ให้ $a=[m,n], b=[p,q]$ และ $c=[r,s]$ โดยที่ m,n,p,q,r และ s เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

จาก $$a=b$$
$$[m,n]\sim[p,q]$$
$$m+q=n+p \qquad ....(1)$$
นำ $r\times(1)$; $$m\cdot r+q\cdot r=n\cdot r+p\cdot r \qquad ....(2)$$
$s\times(1)$; $$m\cdot s+q\cdot s=n\cdot s+p\cdot s \qquad ....(3)$$
นำสมการ $(2)+$ สมการ (3); $(m\cdot r+q\cdot r)+(n\cdot s+p\cdot s)=(n\cdot r+p\cdot r)+(m\cdot s+q\cdot s)$
$$(m\cdot r+n\cdot s)+(p\cdot s+q\cdot r)=(n\cdot s+n\cdot r)+(p\cdot r+q\cdot s)$$
$$[m\cdot r+n\cdot s, m\cdot s+n\cdot r]\sim[p\cdot r+q\cdot s, p\cdot s+q\cdot r]$$
$$[m,n]\cdot[r,s]\sim[p,q]\cdot[r,s]$$
$$a\cdot c=b\cdot c$$
ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆถ้า $a=b$ แล้ว $a\cdot c=b\cdot c$

8. ทฤษฎีบท 3.2.22 ผลบวกของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มลบ

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มลบ a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มลบ สำหรับ m และ n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ x

ซึ่งทำให้ $a=[m,m+x]$

และ $b=[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ p และ q ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ y ซึ่งทำให้ $b=[p,p+y]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a+b &= [m,n]+[p,q] \\ &= [m,m+x]+[p,p+y] \\ &= [m+p,(m+x)+(p+y)] \\ &= [m+p,m+p+(x+y)] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a+b$ เป็นจำนวนเต็มลบ

ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มลบสองจำนวนใดๆเป็นจำนวนเต็มลบ

9. ทฤษฎีบท 3.2.24 ผลคูณของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็มลบ a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มลบ สำหรับ m และ n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ x ซึ่งทำให้ $a=[m,m+x]$

และ $b=[p,q]$ เป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ p และ q ที่เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ y ซึ่งทำให้ $b=[p,p+y]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a\cdot b &= [m,n]\cdot[p,q] \\ &= [m,m+x]\cdot[p,p+y] \\ &= [m\cdot p+(m+x)\cdot(p+y), m\cdot(p+y)+x\cdot p] \\ &= [m\cdot p+m\cdot p+m\cdot y+x\cdot p+x\cdot y, m\cdot p+m\cdot y+x\cdot p] \\ &= [m\cdot p+m\cdot y+x\cdot p+(m\cdot p+x\cdot y), m\cdot p+m\cdot y+x\cdot p] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า $a\cdot b$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ผลคูณของจำนวนเต็มลบสองจำนวนใดๆเป็นจำนวนเต็มบวก

10. ทฤษฎีบท 3.2.26 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ a^2 ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ (a^2 หมายถึง $a\cdot a$)

กรณีที่ 3 ให้ $a=[m,n]$ เป็นจำนวนเต็มลบ โดยนิยาม มีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่งทำให้ $a=[m,m+p]$

พิจารณา
$$\begin{aligned} a^2 &= a\cdot a \\ &= [m,m+p]\cdot[m,m+p] \\ &= [m\cdot m+(m+p)\cdot(m+p), m\cdot(m+p)+(m+p)\cdot m] \\ &= [m^2+m^2+m\cdot p+m\cdot p+p^2, m^2+m\cdot p+m^2+m\cdot p] \\ &= [m^2+m^2+m\cdot p+m\cdot p+(p^2), m^2+m^2+m\cdot p+m\cdot p] \end{aligned}$$

จึงได้ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มบวก

11. ทฤษฎีบท 3.2.25 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ ถ้า $a\cdot b=0$ แล้ว $a=0$ หรือ $b=0$
กรณีที่ 2 ถ้า $a\neq 0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a=[m,n]$ และ $b=[p,q]$ ใดๆ โดยที่ m,n,p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ

กรณีที่ 2 ถ้า $a\neq 0$ ดังนั้น $a>0$ หรือ $a<0$ ให้นักศึกษาพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

2.1 ถ้า $a>0$ จากนิยาม จะมีจำนวนเต็ม x ใดๆ
ซึ่งทำให้ $a=[n+x,n]$

ให้ $a\cdot b=0$

$$[n+x,n]\cdot[p,q]\sim[r,r] \text{ สำหรับ } r \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติใดๆ}$$
$$[(n+x)\cdot p+n\cdot q,(n+x)\cdot q+n\cdot p]\sim[r,r]$$
$$[n\cdot p+x\cdot p+n\cdot q,n\cdot q+x\cdot p+n\cdot p]\sim[r,r]$$
$$n\cdot p+x\cdot p+n\cdot q+r=n\cdot q+x\cdot q+n\cdot p+r$$
$$x\cdot p=x\cdot q$$
$$p=q$$

ดังนั้น $b=0$

2.2 ถ้า $a<0$ จากนิยาม จะมีจำนวนเต็ม x ใดๆ

ซึ่งทำให้ $a=[m,m+x]$

ถ้า
$$a\cdot b=0$$
$$[m,m+x][p,q]\sim[r,r] \text{ โดยที่ } r \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ}$$
$$[m\cdot p+m\cdot q+x\cdot q,m\cdot q+m\cdot p+x\cdot p]\sim[r,r]$$
$$[m\cdot p+(m+x)\cdot q,m\cdot q+(m+x)\cdot p]\sim[r,r]$$
$$m\cdot p+m\cdot q+x\cdot q+r=m\cdot q+m\cdot p+x\cdot p+r$$
$$x\cdot q=x\cdot p$$
$$q=p$$

ดังนั้น $b=0$

จาก 2.1 และ 2.2 จึงได้ว่า ให้ $a\cdot b=0$ ถ้า $a\neq 0$ แล้ว $b=0$

12. ทฤษฎีบท 3.2.33 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}(-a)\cdot(-b)&=-[a\cdot(-b)]\\&=-[-(a\cdot b)]\\&=a\cdot b\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

13. ทฤษฎีบท 3.2.34 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}(a+b)^2&=(a+b)\cdot(a+b)\\&=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b\\&=a^2+a\cdot b+a\cdot b+b^2\\&=a^2+(1+1)a\cdot b+b^2\\&=a^2+2a\cdot b+b^2 \quad \text{ให้ } 1+1=2\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$

14 ทฤษฎีบท 3.3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ $a-a=0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ

พิจารณา $a-a=a+(-a)$

$=0$ สมบัติการมีตัวผกผันสำหรับการบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ $a-a=0$

15. ทฤษฎีบท 3.3.5 สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a=b$ ก็ต่อเมื่อ $a-b=0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a=b$

สำหรับจำนวนเต็ม b มี $-b$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง

$$a+(-b)=b+(-b)$$

$$a-b=0$$

จึงได้ว่า ถ้า $a=b$ แล้ว $a-b=0$

$\Leftarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ

ให้ $a-b=0$

$$(a-b)+b=0+b$$

$$[a+(-b)]+b=b$$

$$a+[(-b)+b]=b$$

$$a+0=b$$

$$a=b$$

จึงได้ว่า ถ้า $a=b$ แล้ว $a-b=0$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a และ b ใดๆ $a=b$ ก็ต่อเมื่อ $a-b=0$

16. ทฤษฎีบท 3.4.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ a จำนวนเต็มลบ ก็ต่อเมื่อ $a<0$

พิสูจน์ $\Rightarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ ให้ a จำนวนเต็มลบ

พิจารณา $a-0=a$ เป็นจำนวนเต็มลบ

จึงได้ว่า $a>0$

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว $a>0$

$\Leftarrow$ สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ ให้ $a>0$

โดยนิยาม $a-0$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 3.3.1 $a-0=a$

จึงได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มบวก

นั่นคือ ถ้า $a>0$ แล้ว a เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a ใดๆ a จำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $a>0$

17. ทฤษฎีบท 3.4.6 สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $b<c$ และ $a<0$ แล้ว $a\cdot b>a\cdot c$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ให้ $b<c$ และ $a<0$

จาก $a<b$ โดยนิยาม 3.4.1; $a-b\in I^-$

และ $a<0$ โดยทฤษฎีบท 3.4.3 ; $a\in I^-$

จาก ทฤษฎีบท 3.2.21 ผลคูณของจำนวนเต็มลบสองจำนวนเป็นจำนวนเต็มบวก

จึงได้ว่า $a\cdot(b-c)\in I^+$

$$a\cdot b-a\cdot c\in I^+$$

โดยนิยาม 3.4.2; $a\cdot b>a\cdot c$

ดังนั้น จำนวนเต็ม a,b และ c ใดๆ ถ้า $b<c$ และ $a<0$ แล้ว $a\cdot b>a\cdot c$

เฉลยแบบฝึกหัด 4

1. ทฤษฎีบท 4.1.3 สำหรับ $a,b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$ จะได้ว่า $(a\cdot b,b) \sim (a\cdot c,c) \sim (a,1)$

พิสูจน์ สำหรับ $a,b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$

เนื่องจาก $a\cdot b\cdot c = a\cdot b\cdot c$

$a\cdot b\cdot c = b\cdot a\cdot c$

$(a\cdot b)\cdot c = (b\cdot a)\cdot c$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a\cdot b,b) \sim (a\cdot c,c)$ ....(1)

เนื่องจาก $a\cdot b = a\cdot b$

$(a\cdot b)\cdot 1 = a\cdot b$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a\cdot b,b) \sim (a,1)$ ....(2)

เนื่องจาก $a\cdot c = a\cdot c$

$a\cdot c = c\cdot a$

$(a\cdot c)\cdot 1 = c\cdot a$

โดยนิยาม 4.1.1 $(a\cdot c,c) \sim (a,1)$ ....(3)

จาก $(1),(2)$ และ (3) จึงได้ว่า $(a\cdot b,b) \sim (a\cdot c,c) \sim (a,1)$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม a,b และ c โดยที่ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ จะได้ว่า $(a\cdot b,b) \sim (a\cdot c,c) \sim (a,1)$

2. ทฤษฎีบท 4.1.4 สำหรับ $b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$ จะได้ว่า $(b,b) \sim (c,c) \sim (1,1)$

พิสูจน์ สำหรับ $b,c \in Z$ โดยที่ $b,c \neq 0$

เนื่องจาก $b\cdot c = b\cdot c$

โดยนิยาม 4.1.1 $(b,b) \sim (c,c)$ ....(1)

เนื่องจาก $b = b$

$b\cdot 1 = b\cdot 1$

โดยนิยาม 4.1.1 $(b,b) \sim (1,1)$ ....(2)

เนื่องจาก $c = c$

$c\cdot 1 = c\cdot 1$

โดยนิยาม 4.1.1 $(c,c) \sim (1,1)$ ....(3)

จาก $(1),(2)$ และ (3) จึงได้ว่า $(b,b) \sim (c,c) \sim (1,1)$

ดังนั้น ทุกจำนวนเต็ม b และ c โดยที่ $b \neq 0$ และ $c \neq 0$ จะได้ว่า $(b,b) \sim (c,c) \sim (1,1)$

3. ทฤษฎีบท 4.2.3 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r+s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ สำหรับ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

พิจารณา $r+s=[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]$

เนื่องจากผลบวกและผลคูณของจำนวนเต็มมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

จึงได้ว่า $a\cdot d+b\cdot c$ และ $b\cdot d$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ $[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r+s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

4. ทฤษฎีบท 4.2.5 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r+s=s+r$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ สำหรับ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} r+s &= [a,b]+[c,d] \\ &= [a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d] \\ &= [c\cdot b+d\cdot a, d\cdot b] \\ &= [c,d]+[a,b]=s+r \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r+s=s+r$

5. ทฤษฎีบท 4.2.10 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r\cdot s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ สำหรับ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

พิจารณา $r\cdot s=[a\cdot c, b\cdot d]$

เนื่องจากจำนวนเต็มสอดคล้องสมบัติปิดสำหรับการคูณ และ $b\cdot d \neq 0$

จึงได้ว่า $a\cdot c$ และ $b\cdot d$ เป็นจำนวนเต็ม

นั่นคือ $[a\cdot c, b\cdot d]$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r\cdot s$ เป็นจำนวนตรรกยะ

6. ทฤษฎีบท 4.2.11 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r\cdot s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ สำหรับ $a,b,c,d \in Z$ และ $b,d \neq 0$

พิจารณา $r\cdot s=[a\cdot c, b\cdot d]$

เนื่องจากผลคูณของจำนวนเต็มมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว และ $b\cdot d \neq 0$

จึงได้ว่า $a\cdot d+b\cdot c$ และ $b\cdot d$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ $[a\cdot d+b\cdot c, b\cdot d]$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $r\cdot s$ ได้ผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

7. ทฤษฎีบท 4.2.17 สำหรับ $r,s,t\in Q;\ (s+t)\cdot r=(s\cdot r)+(t\cdot r)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ $r=[a,b], s=[c,d]$ และ $t=[e,f]$ สำหรับ $a,b,c,d,e,f\in Z$ และ $b,d,f\neq 0$

$$
\begin{aligned}
(s+t)\cdot r &= ([c,d]+[e,f])\cdot[a,b]\\
&=[c\cdot f+d\cdot e, d\cdot f]\cdot[a,b]\\
&=[\{(c\cdot f)+(d\cdot e)\}\cdot a,(d\cdot f)\cdot b]\\
&=[(c\cdot f)\cdot a+(d\cdot e)\cdot a, d\cdot f\cdot b]\\
&=[c\cdot f\cdot a+d\cdot e\cdot a, d\cdot f\cdot b]\\
&=[c\cdot f\cdot a+d\cdot e\cdot a, d\cdot f\cdot b]\\
&=[c\cdot f\cdot a+d\cdot e\cdot a, d\cdot f\cdot b]\cdot[b,b]\\
&=[c\cdot a\cdot f\cdot b+e\cdot a\cdot d\cdot b, d\cdot b\cdot f\cdot b]\\
&=[c\cdot a, d\cdot b]+[e\cdot a, f\cdot b]\\
&=[c,d]\cdot[a,b]+[e,f]\cdot[a,b]\\
&=s\cdot r+t\cdot r
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\forall r,s,t\in Q;\ (s+t)\cdot r=(s\cdot r)+(t\cdot r)$

8. ทฤษฎีบท 4.2.21 สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $-(-r)=r$

พิสูจน์ ให้จำนวนตรรกยะ $r=[a,b], -r=[-a,b]$ และ $-1=[-x,x]$ สำหรับ $a,b,x\in Z$ โดยที่ $b,x\neq 0$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
-(-r) &= (-1)(-r)\\
&=[-x,x][-a,b]\\
&=[(-x)\cdot(-a), x\cdot b]\\
&=[x\cdot a, x\cdot b]=[a,b]\\
&=r
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\forall r\in Q;\ -(-r)=r$

9. ทฤษฎีบท 4.2.24 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $(-r)\cdot s=r\cdot(-s)=-(r\cdot s)$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(-r)\cdot s &= \{(-1)\cdot r\}\cdot s\\
&=(-1)\cdot(r\cdot s)\\
&=-(r\cdot s)
\end{aligned}
$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} r\cdot(-s) &= r\cdot\{(-1)\cdot s\} \\ &= (-1)(r\cdot s) \\ &= -(r\cdot s) \end{aligned}$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $(-r)\cdot s = r\cdot(-s) = -(r\cdot s)$

10. ทฤษฎีบท 4.2.28 สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $(-r)^{-1} = -r^{-1}$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ให้ $-1 = [-x, x]$ สำหรับจำนวนเต็ม x เมื่อ $x \neq 0$

$$\begin{aligned} (-r)^{-1} &= \{(-1)\cdot(r)\}^{-1} \\ &= r^{-1}\cdot(-1)^{-1} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $-1 = [-x, x] \sim [x, -x] = (-1)^{-1}$;
$$\begin{aligned} &= r^{-1}\cdot(-1) \\ &= (-1)\cdot r^{-1} \\ &= -r^{-1} \end{aligned}$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $(-r)^{-1} = -r^{-1}$

11. ทฤษฎีบท 4.3.2 สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $r - r = 0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} r - r &= r + (-r) \\ &= 0 \end{aligned}$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $r - r = 0$

12.ทฤษฎีบท 4.3.4 สำหรับจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใดๆ $r\cdot(s-t) = r\cdot s - r\cdot t$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} r\cdot(s-t) &= r\cdot[s+(-t)] \\ &= r\cdot s + r\cdot(-t) \\ &= r\cdot s + [-(r\cdot t)] \\ &= r\cdot s - r\cdot t \end{aligned}$$
ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใดๆ $r\cdot(s-t) = r\cdot s - r\cdot t$

13. ทฤษฎีบท 4.3.6 สำหรับจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใดๆ $r-s=t$ ก็ต่อเมื่อ $r=s+t$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใดๆ

$\Rightarrow$ ถ้า $r-s=t$ แล้ว $r=s+t$

พิจารณา $r-s=t$ ....(1)

นำ $s+$ สมการ(1); $(r-s)+s=t+s$

$$r+(-s+s)=t+s$$

$$r=t+s$$

จึงได้ว่า ถ้า $r-s=t$ แล้ว $r=s+t$

$\Leftarrow$ ถ้า $r=s+t$ แล้ว $r-s=t$

พิจารณา $r=s+t$ ....(2)

เนื่องจาก $s\in Q$ มี $-s\in Q$

นำ $-s+$ สมการ(2); $r+(-s)=(s+t)+(-s)$

$$r-s=t+(s-s)$$

$$r-s=t$$

จึงได้ว่า ถ้า $r=s+t$ แล้ว $r-s=t$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใดๆ $r-s=t$ ก็ต่อเมื่อ $r=s+t$

14. ทฤษฎีบท 4.3.8 สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $r\div r=1$ เมื่อ $r\neq 0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ

พิจารณา $r\div r=r\cdot(r)^{-1}$ เมื่อ $r\neq 0$

$$=1$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $r\div r=1$ เมื่อ $r\neq 0$

15. ทฤษฎีบท 4.3.9 สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $1\div r=\frac{1}{r}$ เมื่อ $r\neq 0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใดๆ

$1\div r=1\cdot(r)^{-1}$ เมื่อ $r\neq 0$

$$=1\cdot\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใดๆ $1\div r=\frac{1}{r}$ เมื่อ $r\neq 0$

16. ทฤษฎีบท 4.3.12 สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $-r \div (-s) = r \div s$ เมื่อ $s \neq 0$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ เมื่อ $s \neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} -r \div (-s) &= (-r) \cdot (-s^{-1}) \\ &= r \cdot s^{-1} \\ &= r \div s \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ $-r \div (-s) = r \div s$ เมื่อ $s \neq 0$

17. ทฤษฎีบท 4.3.15 สำหรับ $r, s \in Q$ ถ้า $r, s \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{r \cdot s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s}$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ ให้ $r \neq 0$ และ $s \neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cdot s} &= 1 \cdot (r \cdot s)^{-1} \\ &= s^{-1} \cdot r^{-1} = (1 \cdot s^{-1}) \cdot (1 \cdot r^{-1}) \\ &= (1 \cdot r^{-1}) \cdot (1 \cdot s^{-1}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r และ s ใดๆ ถ้า $r \neq 0$ และ $s \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{r \cdot s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s}$

18. ทฤษฎีบท 4.3.17 สำหรับ $r, s, t, u \in Q$ ถ้า $s, t, u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s} \div \frac{t}{u} = \frac{r}{s} \cdot \frac{u}{t} = \frac{r \cdot u}{s \cdot t}$

พิสูจน์ สำหรับ $r, s, t, u \in Q$ ให้ $s, t, u \neq 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \frac{r}{s} \div \frac{t}{u} &= \left(\frac{r}{s}\right) \cdot \left(\frac{t}{u}\right)^{-1} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot (t \cdot u^{-1})^{-1} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot \left\{(u^{-1})^{-1} \cdot t^{-1}\right\} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot (u \cdot t^{-1}) = \frac{r}{s} \cdot \frac{u}{t} \qquad \text{...........(1)} \end{aligned}$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} \frac{r}{s} \div \frac{t}{u} &= \left(\frac{r}{s}\right) \cdot \left(\frac{t}{u}\right)^{-1} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot (t \cdot u^{-1})^{-1} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot \left\{(u^{-1})^{-1} \cdot t^{-1}\right\} \\ &= (r \cdot s^{-1}) \cdot (u \cdot t^{-1}) \\ &= (r \cdot u) \cdot (t^{-1} \cdot s^{-1}) \end{aligned}$$

$$= (r \cdot u) \cdot (s \cdot t)^{-1} = \frac{r \cdot u}{s \cdot t} \qquad ....(2)$$

ดังนั้น จากสมการ (1) และ (2) ทุกจำนวนตรรกยะ r, s, t และ u ใดๆ ถ้า $s \neq 0, t \neq 0$ และ

$u \neq 0$ แล้ว $\frac{r}{s} \div \frac{t}{u} = \frac{r}{s} \cdot \frac{u}{t} = \frac{r \cdot u}{s \cdot t}$

19. ทฤษฎีบท 4.4.2 จำนวนตรรกยะ r ใดๆ r เป็นจำนวนตรรกยะลบ

พิสูจน์ $\Rightarrow$ จะแสดงว่า ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะลบ (คือ $-r \in Q^+$) แล้ว $r < 0$

ให้ r เป็นจำนวนตรรกยะลบ

จึงได้ว่า $-r \in Q^+$

เนื่องจาก $0 - r \in Q^+$

โดยนิยาม 4.4.1 $r < 0$

จึงได้ว่า ถ้า r เป็นจำนวนตรรกยะลบ แล้ว $r > 0$

$\Leftarrow$ จะแสดงว่าถ้า $r < 0$ แล้ว r เป็นจำนวนตรรกยะลบ

ให้ $r < 0$

โดยนิยาม $0 - r \in Q^+$

แต่ $0 - r = -r$

ดังนั้น $-r \in Q^+$

จึงได้ว่า ถ้า $r < 0$ แล้ว r เป็นจำนวนตรรกยะลบ

ดังนั้น ทุกจำนวนตรรกยะ r ใดๆ r เป็นจำนวนตรรกยะลบ ก็ต่อเมื่อ $r < 0$

20. ทฤษฎีบท 4.4.5 สำหรับจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใดๆ $r < s$ ก็ต่อเมื่อ $r - t < s - t$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนตรรกยะ r, s และ t ใดๆ

$\Rightarrow$ ถ้า $r < s$ แล้ว $r - t < s - t$

ให้ $r < s$

จากนิยาม $s - r > 0$

$$(s - r) + 0 > 0$$

$$(s - r) + (t - t) > 0$$

$$s + t - r - t > 0$$

$$s - t + t - r > 0$$

$$(s - t) - (r - t) > 0$$

นั่นคือ $r + t < s + t$

ดังนั้น ถ้า $r < s$ แล้ว $r + t < s + t$

$\Leftarrow$ ถ้า $r+t<s+t$ แล้ว $r<s$

ให้ $$r+t<s+t$$
$$(s+t)-(r+t)>0$$
$$s+t-r-t>0$$
$$(s-r)+(t-t)>0$$
$$s-r>0$$
นั่นคือ $$r<s$$

ดังนั้น ถ้า $r+t<s+t$ แล้ว $r<s$

ดังนั้นทุกจำนวนตรรกยะ r,s และ t ใดๆ $r<s$ ก็ต่อเมื่อ $r+t<s+t$

เฉลยแบบฝึกหัด 5

1. กำหนดเซต $C=\{x\in Q \mid x<12\}$ จงแสดงว่าเซต C เป็นส่วนตัด

วิธีทำ 1. $C\neq\phi$ เพราะมีจำนวนตรรกยะที่น้อยกว่า 12 เช่น 10 และ $10<12$ และ
$C\neq Q$ เพราะมีจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็นสมาชิกของ C เช่น 15 และ $15>12$

2. ให้ $b\in C$ จึงได้ว่า $b<12$
ถ้า $x\in Q$ และ $x<b$ จะได้ว่า $x<b<12$
นั่นคือ $x<12$
ดังนั้น $x\in C$

3. ให้ $b\in C$ จะได้ว่า $b\in Q$ และ $b<12$
ให้ $x=\dfrac{b+12}{2}$ จะได้ว่า $x\in Q$ และ $b<x<12$
ดังนั้น มี $x\in C$ โดยที่ $x>b$

จาก จากข้อ 1,2 และ 3 จึงได้ว่า C เป็นส่วนตัด

2. จงแสดงว่า $C=\{x\in Q \mid x\leq 0$ หรือ $(x>0$ และ $x^2<2)\}$ เป็นส่วนตัด

วิธีทำ 1. จากเซต C จะพบว่า $C\neq\phi$ และ $C\neq Q$ เพราะมี $3\in Q$ แต่ $3\notin C$

2. ถ้า $b\in C$ และ $x\in Q$ โดยที่ $x<b$
ถ้า $x\leq 0$ จะได้ว่า $x\in C$
ถ้า $x>0$ จากที่ $x<b$ จะได้ว่า $x^2<b^2$
จาก $b^2<2$ ดังนั้น $x^2<2$
นั่นคือ $x\in C$

3. ให้ $b\in C$
ถ้า $b\leq 1$ ให้ $x=\dfrac{4}{3}$ จะได้ว่า $b<x$ และได้ $x^2=\dfrac{16}{9}<2$
ดังนั้น $x\in C$
ถ้า $b>1$ จาก $1<b^2<2$ จะได้ว่า $-1>-b^2>-2$
ดังนั้น $1>2-b^2>0$
ให้ $u=(2-b^2)$ จะได้ว่า $0<u<1$
และให้ $x=b+\dfrac{u}{4}$ จะได้ $x>b$
และจาก $x^2=b^2+\dfrac{bu}{2}+\dfrac{u^2}{16}$
$<b^2+\dfrac{bu}{2}+\dfrac{u}{16}$ เพราะ $u^2<u$

จาก $\frac{3}{2} \notin C$ จะได้ $b < \frac{3}{2}$

จะได้ $\frac{bu}{2} + \frac{u}{16} = u\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{16}\right)$

$< u\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{16}\right)$

$< u$

นั่นคือ $x^2 < b^2 + u$

จาก $b^2 + u = 2$ ดังนั้น $x^2 < 2$

นั่นคือ $x \in C$ และ $b < x$

จาก 1. 2. และ 3 จะได้ C เป็นจำนวนจริง

3. ทฤษฎีบท 5.2.11 สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดใดๆ ถ้า $C + D = D$ แล้ว $C = 0^*$

พิสูจน์ ให้ C, D เป็นส่วนตัดใดๆ

จาก $$C + D = D$$

สำหรับ D ที่เป็นส่วนตัด มี $-D$ เป็นส่วนตัด

$$(C+D)+(-D) = D+(-D)$$

$$C+[D+(-D)] = 0^*$$

$$C + 0^* = 0^*$$

$$C = 0^*$$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C และ D ใดๆ ถ้า $C + D = D$ แล้ว $C = 0^*$

4. ทฤษฎีบท 5.2.15 ถ้า C เป็นส่วนตัดลบจะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดลบ

พิสูจน์ พิจารณา $-C = \{x \in Q \mid x < -t, \exists t \in C'\}$

ถ้า C เป็นจำนวนจริงลบ จะมี $s \in Q^-$ ซึ่ง $s \notin C$

จะมี $r \in Q$ ซึ่ง $s < r < 0$

จะได้ $-s > -r > 0$ หรือ $0 < -r < -s$

จาก $0 < -r$ จะได้ $-r \in Q^+$

จาก $-r < -s$ และ $s \in C'$

จะได้ว่า $-r \in -C$

ดังนั้นมี $-r \in Q^+$ ซึ่ง $-r \in -C$

จะได้ว่า $-C$ เป็นจำนวนจริงบวก

ดังนั้น ทุกส่วนตัดลบ C จะได้ $-C$ เป็นส่วนตัดบวก

5. ทฤษฎีบท 5.2.18 สำหรับ C และ D เป็นส่วนตัดใดๆ $-(C+D)=-C-D$

พิสูจน์ ให้ C,D เป็นส่วนตัดใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}-(C+D) &= -(C+D)+0^* \\ &= -(C+D)+\{[C+(-C)]+[D+(-D)]\} \\ &= -(C+D)+\{[C+D]+[(-C)+(-D)]\} \\ &= [-(C+D)+(C+D)]+[(-C)+(-D)] \\ &= 0^*+[(-C)+(-D)] \\ &= (-C)+(-D) \\ &= -C-D\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกส่วนตัด C และ D ใดๆ $-(C+D)=-C-B$

6. ทฤษฎีบท 5.4.4 สำหรับ C เป็นส่วนตัดใดๆ C เป็นส่วนตัดลบ ก็ต่อเมื่อ $C<0^*$

พิสูจน์ สำหรับ C เป็นส่วนตัดลบ

จึงได้ว่า
$$\begin{aligned} C-0^* &\in R^- \\ -(C-0^*) &\in R^+ \\ 0^*-C &\in R^+ \end{aligned}$$

นิยาม 5.4.1 $\quad C<0^*$

ดังนั้น C เป็นส่วนตัดลบ ก็ต่อเมื่อ $C<0^*$

เฉลยแบบฝึกหัด 6

ข้อ 1 ทฤษฎีบท 6.2.2 สำหรับ จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ z_1+z_2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$, $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

สำหรับ a_1,a_2,b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1,b_1)+(a_2,b_2) \\ &= (a_1+a_2,b_1+b_2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

จึงได้ว่า a_1+a_2 และ b_1+b_2 มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

นั่นคือ (a_1+a_2,b_1+b_2) เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น z_1+z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ข้อ 2 ทฤษฎีบท 6.2.4 สำหรับ จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1+z_2=z_2+z_1$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$,และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

สำหรับ a_1,a_2,b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a_1,b_1)+(a_2,b_2) \\ &= (a_1+a_2,b_1+b_2) \\ &= (a_2+a_1,b_2+b_1) \\ &= (a_2,b_2)+(a_1,b_1) \\ &= z_2+z_1 \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1+z_2=z_2+z_1$

ข้อ 3 ทฤษฎีบท 6.2.9 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $-(z_1+z_2)=(-z_1)+(-z_2)$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

สำหรับ a_1,a_2,b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} -(z_1+z_2) &= (-(a_1+a_2),-(b_1+b_2)) \\ &= ((-a_1+(-a_2)),(-b_1+(-b_2))) \\ &= (-a_1,-b_1)+(-a_2,-b_2) \\ &= (-z_1)+(-z_2) \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $-(z_1+z_2)=(-z_1)+(-z_2)$

ข้อ 4 ทฤษฎีบท 6.2.10 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ สำหรับ $a, a_1, b, b_1 \in R$

พิจารณา $z_1 \cdot z_1 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$

$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

เนื่องจาก a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

จึงได้ว่า $a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2$ และ $a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$ เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ข้อ 5 ทฤษฎีบท 6.2.11 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1 \cdot z_2$ มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ สำหรับ $a, a_1, b, b_1 \in R$

พิจารณา $z_1 \cdot z_1 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$

$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

เนื่องจาก a_1, a_2, b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

จึงได้ว่า $a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2$ และ $a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1$ เป็นจำนวนจริง

นั่นคือ $(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1 \cdot z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนมีผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียว

ข้อ 6 ทฤษฎีบท 6.2.13 สำหรับ จำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$,และ $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ สำหรับ $a, a_1, b, b_1 \in R$

พิจารณา $z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2)$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$= (a_2 a_1 - b_2 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2)$

$= (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_2)$

$= z_2 \cdot z_1$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆจะได้ว่า $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

ข้อ 7 ทฤษฎีบท 6.2.17 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใดๆ

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ และ $z_3 = (a_3, b_3)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

สำหรับ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) \cdot z_3 &= [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3) \\
&= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)(a_3, b_3) \\
&= ((a_1 + a_2)a_3 - (b_1 + b_2)b_3, (a_1 + a_2)b_3 + (b_1 + b_2)a_3) \\
&= (a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_3 - b_2b_3, a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2) \\
&= (a_1a_3 - b_1b_3 + a_2a_3 - b_2b_3, a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2) \\
&= ((a_1a_3 - b_1b_3) + (a_2a_3 - b_2b_3), (a_1b_3 + a_3b_1) + (a_2b_3 + a_3b_2)) \\
&= (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1) + (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) \\
&= (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) + (a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3) \\
&= z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3
\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับ จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ใดๆ $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

ข้อ 8 ทฤษฎีบท 6.2.19 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $(-z_1) \cdot z_2 = -(z_1 \cdot z_2)$

พิสูจน์ ให้ $z_1 = (a_1, b_1)$, และ $z_2 = (a_2, b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

สำหรับ a_1, a_2, b_1 และ b_2 ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา

$$\begin{aligned}
(-z_1) \cdot z_2 &= (-a_1, -b_1) \cdot (a_2, b_2) \\
&= ((-a_1)a_2 - (-b_1)b_2, (-a_1)b_2 + (-b_1)a_2) \\
&= (-a_1a_2 + b_1b_2, -a_1b_2 - b_1a_2) \\
&= (-(a_1a_2 - b_1b_2), -(a_1b_2 + b_1a_2)) \\
&= -(a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \\
&= -((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \\
&= -(z_1 \cdot z_2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ใดๆ $(-z_1) \cdot z_2 = -(z_1 \cdot z_2)$

ข้อ 9 ทฤษฎีบท 6.2.20 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $z\cdot 0=0$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} z\cdot 0 &= (a,b)\cdot(0,0) \\ &= (a\cdot 0-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 0) \\ &= (0,0)=0 \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $z\cdot 0=0$

ข้อ 10 ทฤษฎีบท 6.4.2 สำหรับ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$

พิสูจน์ ให้ $z_1=(a_1,b_1)$ และ $z_2=(a_2,b_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a_1,a_2,b_1 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned} \overline{z_1-z_2} &= \overline{(a_1,b_1)-(a_2,b_2)} \\ &= \overline{(a_1-a_2,b_1-b_2)} \\ &= (a_1-a_2,-(b_1-b_2)) \\ &= (a_1-a_2,-b_1-(-b_2)) \\ &= (a_1,-b_1)-(a_2,-b_2) \\ &= \overline{(a_1,b_1)}-\overline{(a_2,b_2)} \\ &= \overline{z}_1-\overline{z}_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 จะได้ว่า $\overline{z_1-z_2}=\overline{z}_1-\overline{z}_2$

ข้อ 11 ทฤษฎีบท 6.4.5 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $\overline{\overline{z}}=z$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a และ b เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{(a,b)}} \\ &= \overline{\overline{(a,b)}} \\ &= \overline{(a,-b)} \\ &= (a,-(-b)) \\ &= (a,b) \\ &= z \end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับจำนวนเชิงซ้อน z จะได้ว่า $\overline{\overline{z}}=z$

ข้อ 12 ทฤษฎีบท 6.4.6 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $\overline{(-z)}=-\overline{z}$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a และ b เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}\overline{(-z)}&=\overline{(-a,-b)}\\&=(-a,-(-b))\\&=-(a,-b)\\&=-\overline{(a,b)}\\&=-\overline{z}\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $\overline{(-z)}=-\overline{z}$

ข้อ 13 ทฤษฎีบท 6.4.8 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $2\operatorname{Im}(z)i=z-\overline{z}$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนและ a และ b เป็นจำนวนจริง

พิจารณา
$$\begin{aligned}2\operatorname{Im}(z)i&=2bi\\&=(0,2b)=(a+(-a),b+b)\\&=(a,b)+(-a,b)\\&=(a,b)-(a,-b)\\&=(a,b)-\overline{(a,b)}\\&=z-\overline{z}\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $2\operatorname{Im}(z)i=z-\overline{z}$

ข้อ 14 ทฤษฎีบท 6.5.3 สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ $|\overline{z}|=|z|$

พิสูจน์ ให้ $z=(a,b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned}|\overline{z}|&=\left|\overline{(a,b)}\right|\\&=|a-bi|\\&=\sqrt{a^2+(-b)^2}\\&=\sqrt{a^2+b^2}\\&=|z|\end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1 ใดๆ $|\overline{z}_1|=|z_1|$

ข้อ 15 ทฤษฎีบท 6.5.6 สำหรับ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\cdot\overline{z}_2 + z_2\cdot\overline{z}_1$$

พิสูจน์ ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณา
$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)\\ &= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2\\ &= |z_1|^2 + (z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) + |z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2\end{aligned}$$

ดังนั้น ทุกจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เป็นใดๆ

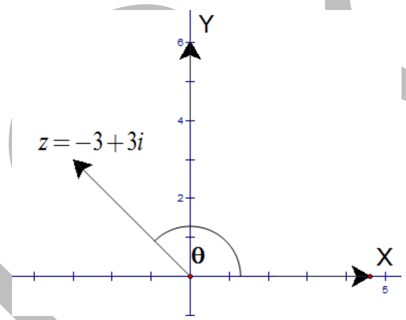
$$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\cdot\overline{z}_2 + z_2\cdot\overline{z}_1$$

ข้อ 16. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $z=-3+3i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z=-3+3i$

$r=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{3}{-3} = -1$ พิจารณารูป



จากรูป $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

จาก
$$\begin{aligned}z &= r(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\right]\end{aligned}$$

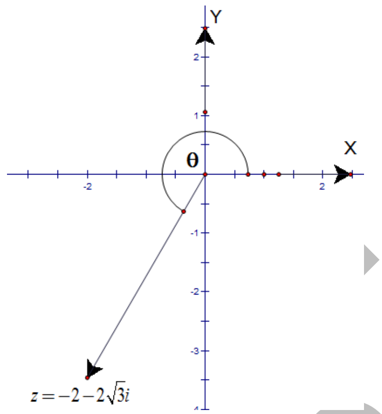
ดังนั้น $z=-3+3i$ ในรูปเชิงขั้ว คือ $z=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\right]$

ข้อ 17. จงเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $z=-2-2\sqrt{3}i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z=-2-2\sqrt{3}i$

$$r=\sqrt{(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

$$\tan\theta=\frac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$$ พิจารณารูป



จากรูป $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$

จาก $$z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

$$=4\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right)\right]$$

ดังนั้น $z=-3+3i$ ในรูปเชิงขั้ว คือ $z=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\right]$

ข้อ 18. กำหนดให้ $z_1=5\left(\cos\dfrac{17\pi}{18}+i\sin\dfrac{17\pi}{18}\right), z_2=9\left(\cos\dfrac{11\pi}{36}+i\sin\dfrac{11\pi}{36}\right)$ จงหา $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}, z_1^2$

วิธีทำ จาก $$z_1\cdot z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$$

$$=(5)(9)\left[\cos\left(\frac{17\pi}{18}+\frac{11\pi}{36}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{18}+\frac{11\pi}{36}\right)\right]$$

$$=45\left[\cos\left(\frac{34+11}{36}\right)\pi+i\sin\left(\frac{34+11}{36}\right)\pi\right]$$

$$=45\left(\cos\frac{45\pi}{36}+i\sin\frac{45\pi}{36}\right)$$

ดังนั้น $z_1 \cdot z_2 = 45\left(\cos\frac{45\pi}{36} + i\sin\frac{45\pi}{36}\right)$

จาก
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$$
$$= \frac{5}{9}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{18} - \frac{11\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{18} - \frac{11\pi}{36}\right)\right]$$
$$= \frac{5}{9}\left[\cos\left(\frac{34-11}{36}\right)\pi + i\sin\left(\frac{34-11}{36}\right)\pi\right]$$
$$= \frac{5}{9}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right)$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{9}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right)$

จาก
$$z_1^2 = r_1^2\left[\cos\left(n\theta_1\right) + i\sin\left(n\theta_1\right)\right]$$
$$= 5^2\left[\cos(2)\left(\frac{17\pi}{18}\right) + i\sin(2)\left(\frac{17\pi}{18}\right)\right]$$
$$= 25\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$$

ดังนั้น $z_1^2 = 25\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$

ข้อ 19 จงหารากที่ 5 ของจำนวนวนเชิงซ้อน $z = 4 + 4i$

วิธีทำ จาก $z = 4 + 4i$

$$r = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

$\tan\theta = \frac{4}{4} = 1$ จึงได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$

จำนวนเชิงซ้อนในรูปพิกัดเชิงขั้ว $z = \sqrt{32}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ให้ $w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{32}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)\right]$

$w = \sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)\right]$ สำหรับ $k = 0,1,2,3$

เมื่อ $k=0;\ w_1=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(0)\pi}{4}\right)\right]$

$$w_1=\sqrt[8]{32}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k=1;\ w_2=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(1)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(1)\pi}{4}\right)\right]$

$$w_2=\sqrt[8]{32}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k=2;\ w_3=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(2)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(2)\pi}{4}\right)\right]$

$$w_3=\sqrt[8]{32}\left[\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right]$$

เมื่อ $k=3;\ w_3=\sqrt[8]{32}\left[\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(3)\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+2(3)\pi}{4}\right)\right]$

$$w_4=\sqrt[8]{32}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right]$$